УДК 517.518: 519.652

М. М. Пагіря

# ПРО ЕФЕКТИВНІСТЬ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДЕЯКИМИ ТИПАМИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ

*Розглянуто наближення функцій однієї дійсної змінної різними типами інтерполяційних ланцюгових дробів. Запропоновано рекурентні формули для обчислення коефіцієнтів таких дробів через значення функцій в інтерполяційних точках.*

Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ і визначена значеннями в точках множини

$$X=\{\,x_i:\quad x_i\in[\alpha,\beta],\quad x_i\neq x_j,\quad i\neq j,\quad i,j=0,1,\ldots,n\}.$$

Функцію $f(x)$ наближається деякою іншою функцією $g(x;b_0,b_1,\ldots,b_n)$, параметри $b_0,b_1,\ldots,b_n$ якої вибирають так, щоб у точках множини $X$ виконувались співвідношення

$$y_k=g(x_k;b_0,b_1,\ldots,b_n),\tag{1}$$

де $y_k=f(x_k)$, $k=0,1,\ldots,n$. У випадку, коли апроксимуючу функцію вибирають у вигляді лінійної комбінації функцій із системи функцій Чебишова, то говорять про лінійну інтерполяцію узагальненим многочленом [1].

У цій роботі розглянемо деякі випадки нелінійної інтерполяції функціональним ланцюговим дробом (ФЛД) вигляду [4]

$$D_n(x)=\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}=b_0(x)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n}\frac{a_k(x)}{b_k(x)}=b_0(x)+\frac{a_1(x)}{b_1(x)}+\cdots+\frac{a_n(x)}{b_n(x)}.\tag{2}$$

У класі скінченних ФЛД вигляду (2) досліджують інтерполяційні ланцюгові дроби (ІЛД), тобто ланцюгові дроби, які задовольняють співвідношення (1):

$$D_n(x_i)=\frac{P_n(x_i)}{Q_n(x_i)}=b_0(x_i)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n}\frac{a_k(x_i)}{b_k(x_i)}=y_i,\qquad i=0,1,\ldots,n.\tag{3}$$

Залежно від вибору вигляду частинних чисельників $a_k(x)$ і частинних знаменників $b_k(x)$ можна побудувати різні ІЛД. У роботі розглядаються випадки, коли $a_k(x)$ і $b_k(x)$ вибрано у вигляді многочленів. Основна увага зосереджена на питанні побудови таких дробів, тобто на однозначному визначенні невідомих параметрів − коефіцієнтів частинних чисельників $a_k(x)$ і знаменників $b_k(x)$ через значення функції в інтерполяційних вузлах. Запропоновано рекурентні формули для визначення коефіцієнтів у вигляді ланцюгових дробів, які з обчислювальної точки зору є менш чутливими до похибок заокруглень.

Різницю $r_n(x)=f(x)-D_n(x)=f(x)-P_n(x)/Q_n(x)$ будемо називати залишковим членом ІЛД (2).

**Теорема 1.** *Нехай функція* $f(x)$, *неперервна на проміжку* $[\alpha,\beta]$ *і визначена значеннями в точках множини* $X$, *наближається ІЛД* (2), *і нехай функція* $f(x)$ *задовольняє такі умови:*

*1)* $f(x) = f_1(x) / \omega_m(x)$, *де* $\omega_m(x) = \prod_{s=1}^{p}(x - \mu_s)^{k_s}$, $\sum_{s=1}^{p} k_s = m$, $\mu_s$ *− полюси функції* $f(x)$ *на проміжку* $[\alpha, \beta]$, *а функція* $f_1(x)$ *не має особливостей на цьому проміжку;*

*2) степені канонічних чисельника* $P_n(x)$ *і знаменника* $Q_n(x)$ *задовольняють нерівності* $\deg Q_n(x) \geq m$, $\deg\left(P_n(x)\omega_m(x)\right) \leq n$ *відповідно;*

*3)* $\mu_i \neq x_j$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *де* $x_j$ *− інтерполяційні вузли;*

*4) функція* $G(x) = f_1(x) \cdot Q_n(x)$ *на проміжку* $[\alpha, \beta]$ *неперервна разом із похідними до* $n$*-го порядку включно й існує похідна* $(n+1)$*-го порядку.*

*Тоді для довільної точки* $x \in (\alpha, \beta) \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_p, \mu_1, \ldots, \mu_p\}$ *існує точка* $\xi \in (\alpha, \beta)$, *що виконується рівність*

$$\frac{f_1(x)}{\omega_m(x)} - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)}{(n+1)!\, Q_n(x)\, \omega_m(x)} \left. \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[f_1(x)\, Q_n(x)\right] \right|_{x=\xi}.$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f_1(x)\, Q_n(x) - \omega_m(x)\, P_n(x) - \lambda\, (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n),$$

де $\lambda$ − деякий параметр. З огляду на умови (3) функція $F(x)$ перетворюється у нуль в інтерполяційних вузлах. Визначимо параметр $\lambda$ так, щоб функція $F(x)$ дорівнювала нулеві в деякій точці $x^*$, $x^* \in (\alpha, \beta)$, $x^* \neq x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Для цього $\lambda$ виберемо таким чином:

$$\lambda = \frac{f_1(x^*)\, Q_n(x^*) - \omega_m(x^*)\, P_n(x^*)}{(x^* - x_0)(x^* - x_1) \ldots (x^* - x_n)}.$$

Оскільки функція $F(x)$ перетворюється в нуль у точках $x^*, x_0, x_1, \ldots, x_n$ і $x^* \in (\alpha, \beta)$, то згідно із узагальненою теоремою Ролля існує така точка $\xi$, $\xi \in (\alpha, \beta)$, що $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. Далі, за припущенням теореми $\deg\left(P_n(x)\omega_m(x)\right) \leq$ $\leq n$. Тому

$$F(x^*) = f_1(x^*)\, Q_n(x^*) - \omega_m(x^*)\, P_n(x^*) - \frac{\prod_{i=0}^{n}(x^* - x_i)}{(n+1)!} \left. \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[f_1(x)\, Q_n(x)\right] \right|_{x=\xi} = 0,$$

де $\xi \in (\alpha, \beta)$. З огляду на довільність точки $x^*$ звідси випливає твердження теореми. Теорему доведено. ◊

У 1909 році Т. Н. Тіле [4, 5] запропонував ІЛД вигляду

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{x - x_{k-1}}{b_k}, \tag{4}$$

де $x_k$ − вузли інтерполяції, $b_k$ − коефіцієнти, які визначаються за значеннями функції $f(x)$ в інтерполяційних вузлах через обернені поділені різниці $b_k = \Phi_k[x_0, \ldots, x_k]$, $k = 0, 1, \ldots, n$. У свою чергу, обернена поділена різниця $k$-го порядку обчислюється за формулою [4, 5]

$$\Phi_k[x_0,\ldots,x_k] =$$

$$= \frac{x_k - x_{k-1}}{\Phi_{k-1}[x_0,\ldots,x_{k-2},x_k] - \Phi_{k-1}[x_0,\ldots,x_{k-2},x_{k-1}]}, \quad \Phi_0[x] = f(x).$$

Коефіцієнти $b_k$ дробу (4) можна також обчислювати за допомогою співвідношень [3]

$$b_0 = y_0, \quad b_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{-b_{k-1}} + \ldots + \frac{x_k - x_1}{-b_1} + \frac{x_k - x_0}{y_k - b_0}, \quad k = 1,\ldots,n. \quad (5)$$

У роботі [4] показано, що інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле (4) належить до класу дробово-раціональних функцій, а степені канонічних чисельника $P_n(x)$ і знаменника $Q_n(x)$ не перевищують $[(n+1)/2]$ і $[n/2]$ відповідно, де $[a]$ − ціла частина числа $a$.

ІЛД можна побудувати у вигляді правильного $C$-дробу

$$D_n^{(1)}(x) = \frac{P_n^{(1)}(x)}{Q_n^{(1)}(x)} = b_0^{(1)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{b_k^{(1)}(x - x_{k-1})}{1}, \quad (6)$$

де $b_i^{(1)}$, $i = 0,1,\ldots,n$, − деякі коефіцієнти.

Вкажемо спосіб безпосереднього обчислення коефіцієнтів ІЛД (6) через значення функції $f(x)$ в інтерполяційних вузлах.

Очевидно, що $b_0^{(1)} = y_0$, $b_1^{(1)} = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$. Покажемо, що при $k = 2,3,\ldots,n$ мають місце співвідношення

$$b_k^{(1)} =$$

$$= \frac{1}{x_k - x_{k-1}}\left(-1 + \frac{b_{k-1}^{(1)}(x_k - x_{k-2})}{-1} + \ldots + \frac{b_2^{(1)}(x_k - x_1)}{-1} + \frac{b_1^{(1)}(x_k - x_0)}{y_k - b_0^{(1)}}\right). \quad (7)$$

При $k = 2$ зі співвідношень (3) отримуємо

$$D_n^{(1)}(x_2) = y_2 = b_0^{(1)} + \frac{b_1^{(1)}(x_2 - x_0)}{1 + b_2^{(1)}(x_2 - x_1)}$$

або

$$b_2^{(1)} = \frac{1}{x_2 - x_1}\left(-1 + \frac{b_1^{(1)}(x_2 - x_0)}{y_2 - b_0^{(1)}}\right).$$

Нехай формула (7) справджується для $k = m - 1 < n$. Тоді для $k = m$ маємо

$$D_n^{(1)}(x_m) = y_m = b_0^{(1)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{m} \frac{b_k^{(1)}(x_m - x_{k-1})}{1} = b_0^{(1)} + \frac{b_1^{(1)}(x_m - x_0)}{1 + \mathop{\mathrm{K}}\limits_{k=2}^{m} \frac{b_k^{(1)}(x - x_{k-1})}{1}}.$$

Позначимо

$$\delta = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=2}^{m} \frac{b_k^{(1)}(x - x_{k-1})}{1}. \quad (8)$$

Тоді

$$y_m = b_0^{(1)} + \frac{b_1^{(1)}(x_m - x_0)}{\delta} \qquad \text{або} \qquad \delta = \frac{b_1^{(1)}(x_1 - x_0)}{y_m - b_0^{(1)}}.$$

Оскільки ланцюговий дріб (8) складається із $(m-1)$-го поверху, то згідно з припущенням індукції його коефіцієнти визначаються за рекурентним співвідношенням (7), тобто

$$b_m^{(1)} =$$

$$= \frac{1}{x_m - x_{m-1}} \left( -1 + \frac{b_{m-1}^{(1)}(x_m - x_{m-2})}{-1} + \ldots + \frac{b_3^{(1)}(x_m - x_2)}{-1} + \frac{b_2^{(1)}(x_m - x_1)}{-1+\delta} \right).$$

Підставляючи в останнє співвідношення замість $\delta$ його значення, отримуємо формулу (7) при $k = m$.

Можна показати, що коефіцієнти ІЛД (4) і (6) задовольняють співвідношення $b_0^{(1)} = b_0$, $b_1^{(1)} = 1/b_1$, $b_i^{(1)} = 1/(b_i b_{i-1})$, $i = 2,3,\ldots,n$, тобто ці дроби еквівалентні. З еквівалентності ІЛД (4) і (6) випливає, що

$$\deg P_n^{(1)}(x) \le [(n+1)/2], \qquad \deg Q_n^{(1)}(x) \le [n/2].$$

ІЛД можна також побудувати у вигляді ланцюгових дробів, які є оберненими до ІЛД Тіле (4) і ІЛД вигляду (6) відповідно:

$$D_n^{(2)}(x) = \frac{P_n^{(2)}(x)}{Q_n^{(2)}(x)} = \left( b_0^{(2)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{x - x_{k-1}}{b_k^{(2)}} \right)^{-1}, \tag{9}$$

$$D_n^{(3)}(x) = \frac{P_n^{(3)}(x)}{Q_n^{(3)}(x)} = \left( b_0^{(3)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{b_k^{(3)}(x - x_{k-1})}{1} \right)^{-1}. \tag{10}$$

Крім того, можна показати, що ІЛД (9) і (10) еквівалентні.

Вкажемо явні формули для визначення коефіцієнтів ІЛД (9) і (10) через значення функції $f(x)$ в інтерполяційних вузлах.

Зі співвідношень (3) при $n = 0,\ 1$ отримуємо

$$b_0^{(2)} = b_0^{(3)} = \frac{1}{y_0}, \qquad b_1^{(2)} = \frac{x_1 - x_0}{\frac{1}{y_1} - b_0^{(2)}}, \qquad b_1^{(3)} = \frac{\frac{1}{y_1} - b_0^{(3)}}{x_1 - x_0}.$$

Аналогічними, як і в попередньому випадку, міркуваннями можна показати, що коефіцієнти дробів (9) і (10) для $k = 2,\ldots,n$ визначаються відповідно за формулами

$$b_k^{(2)} = \frac{x_k - x_{k-1}}{-b_{k-1}^{(2)}} + \ldots + \frac{x_k - x_1}{-b_1^{(2)}} + \frac{x_k - x_0}{\frac{1}{y_k} - b_0^{(2)}},$$

$$b_k^{(3)} = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \left( -1 + \frac{b_{k-1}^{(3)}(x_k - x_{k-2})}{-1} + \ldots + \frac{b_2^{(3)}(x_k - x_1)}{-1} + \frac{b_1^{(3)}(x_k - x_0)}{\frac{1}{y_k} - b_0^{(3)}} \right).$$

Оскільки ІЛД (9) є оберненим до ІЛД (4), то степені канонічних чисельника $P_n^{(2)}(x)$ знаменника $Q_n^{(2)}(x)$ ІЛД (9) відповідно не перевищують значення $[n/2]$ і $[(n+1)/2]$. На підставі еквівалентності ІЛД (9) і (10) отримуємо

$$\deg P_n^{(3)}(x) \le [n/2], \qquad \deg Q_n^{(3)}(x) \le [(n+1)/2].$$

ІЛД вигляду

$$J_n(x) = \frac{P_n^{(j)}(x)}{Q_n^{(j)}(x)} = \frac{b_0^{(j)}}{1 + b_1^{(j)}(x - x_0)} - \frac{b_2^{(j)}(x - x_0)(x - x_1)}{1 + b_3^{(j)}(x - x_2)} -$$

$$- \frac{b_4^{(j)}(x - x_2)(x - x_3)}{1 + b_5^{(j)}(x - x_4)} - \frac{b_6^{(j)}(x - x_4)(x - x_5)}{1 + b_7^{(j)}(x - x_6)} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{b_{2m-2}^{(j)}(x - x_{2m-4})(x - x_{2m-3})}{1 + b_{2m-1}^{(j)}(x - x_{2m-2}) - b_*^{(j)}}, \qquad (11)$$

де $\quad m = [(n+1)/2]$,

$$b_*^{(j)} = \begin{cases} 0, & n = 2s+1, \\ b_n^{(j)}(x - x_{n-2})(x - x_{n-1}), & n = 2s, \end{cases}$$

будемо називати інтерполяційним ланцюговим $J$-дробом.

Зі співвідношень (3) отримуємо

$$b_0^{(j)} = y_0, \qquad b_1^{(j)} = \frac{1}{x_1 - x_0}\left(-1 + \frac{b_0^{(j)}}{y_1}\right),$$

$$b_2^{(j)} = \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}\left(-1 + b_1^{(j)}(x_2 - x_0) - \frac{b_0^{(j)}}{y_2}\right).$$

Методом математичної індукції можна показати, що при $k = 3, 4, \ldots, n$, мають місце формули

$$b_k^{(j)} = \frac{1}{x_k - x_{k-1}}\left(-1 + \frac{b_{k-1}^{(j)}(x_k - x_{k-3})(x_k - x_{k-2})}{1 + b_{k-2}^{(j)}(x_k - x_{k-3})} - \right.$$

$$\left. - \frac{b_{k-3}^{(j)}(x_k - x_{k-5})(x_k - x_{k-4})}{1 + b_{k-4}^{(j)}(x_k - x_{k-5})} - \ldots - \frac{b_2^{(j)}(x_k - x_0)(x_k - x_1)}{1 + b_3^{(j)}(x_k - x_0)} - \frac{b_0^{(j)}}{y_k}\right),$$

якщо $k = 2l - 1$, і

$$b_k^{(j)} = \frac{1}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k-2})}\left(1 + b_{k-1}^{(j)}(x_k - x_{k-2}) + \right.$$

$$+ \frac{b_{k-2}^{(j)}(x_k - x_{k-4})(x_k - x_{k-3})}{1 + b_{k-3}^{(j)}(x_k - x_{k-4})} - \frac{b_{k-4}^{(j)}(x_k - x_{k-6})(x_k - x_{k-5})}{1 + b_{k-5}^{(j)}(x_k - x_{k-6})} - \ldots$$

$$\left. \ldots - \frac{b_2^{(j)}(x_k - x_0)(x_k - x_1)}{1 + b_1^{(j)}(x_k - x_0)} - \frac{b_0^{(j)}}{y_k}\right),$$

якщо $k = 2l$.

Очевидно, що $\deg P_0^{(j)} = \deg P_1^{(j)} = \deg P_2^{(j)} = \deg Q_0^{(j)} = 0$, а $\deg Q_1^{(j)} \le 1$, $\deg Q_2^{(j)} \le 2$.

**Твердження 1.** *Степені канонічних чисельника* $P_n^{(j)}(x)$ *і знаменника* $Q_n^{(j)}(x)$ *ІЛД* (11) *задовольняють нерівності*

$$\deg P_n^{(j)}(x) \le [n/2], \qquad \deg Q_n^{(j)}(x) \le [(n+2)/2], \qquad n \ge 3. \qquad (12)$$

*Д о в е д е н н я.* Очевидно, що $P_3^{(j)}(x) \le 1$, $Q_3^{(j)}(x) \le 2$. Нехай співвідношення (12) виконується при $n = k - 1 > 3$. Тоді при $n = k$ отримаємо

$$J_k(x) = \frac{P_k^{(j)}(x)}{Q_k^{(j)}(x)} = \frac{b_0^{(j)}}{1 + b_1^{(j)}(x - x_0)} - \frac{b_2^{(j)}(x - x_0)(x - x_1)}{1 + b_3^{(j)}(x - x_2)} -$$

$$- \frac{b_4^{(j)}(x - x_2)(x - x_3)}{1 + b_5^{(j)}(x - x_4)} - \frac{b_6^{(j)}(x - x_4)(x - x_5)}{1 + b_7^{(j)}(x - x_6)} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{b_{2m-2}^{(j)}(x - x_{2m-4})(x - x_{2m-3})}{1 + b_{2m-1}^{(j)}(x - x_{2m-2}) - b_*^{(j)}},$$

де $\quad m = [\,(k+1)/2\,]$,

$$b_*^{(j)} = \begin{cases} 0, & k = 2s+1, \\ b_k^{(j)}(x - x_{k-2})(x - x_{k-1}), & k = 2s. \end{cases}$$

За припущенням степені канонічних чисельника та знаменника інтерполяційного ланцюгового $J$-дробу

$$\frac{\bar{P}_{k-2}^{(j)}(x)}{\bar{Q}_{k-2}^{(j)}(x)} = \frac{b_2^{(j)}}{1 + b_3^{(j)}(x - x_2)} - \cdots - \frac{b_{2m-2}^{(j)}(x - x_{2m-4})(x - x_{2m-3})}{1 + b_{2m-1}^{(j)}(x - x_{2m-2}) - b_*^{(j)}}$$

задовольняють нерівності $\deg \bar{P}_{k-2}^{(j)} \le [\,(k-2)/2\,]$, $\deg \bar{Q}_{k-2}^{(j)} \le [\,k/2\,]$ відповідно. Дріб (13) запишемо у вигляді

$$\frac{P_k^{(j)}(x)}{Q_k^{(j)}(x)} = \frac{b_0^{(j)}\,\bar{Q}_{k-2}^{(j)}(x)}{\left(1 + b_1^{(j)}(x - x_0)\right)\bar{Q}_{k-2}^{(j)}(x) - (x - x_0)(x - x_1)\,\bar{P}_{k-2}^{(j)}(x)}.$$

Звідси отримуємо нерівності (12) при $n = k$. Твердження доведено. ◊

У роботі [2] наведено інші типи ІЛД. Розглянемо приклади наближення деяких функцій наведеними вище ІЛД. Усі розглянуті ІЛД реалізовано на мові Fortran в операційній системі ASP Linux 7.3. Обчислення проводились на комп'ютері з процесором Celeron-500 і 128 Mb RAM.

***Приклад 1.*** На множині $G = [-10.01, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 10.003\,]$, де $\varepsilon = 10^{-7}$, функцію $f(x) = \mathrm{sh}(x)/x^2$ наближали ІЛД. За вузли інтерполяції брали корені многочлена Чебишова 1-го роду. На множині G вибирали послідовність псевдовипадкових точок $t_k$, $k = 1, \ldots, 100000$, і обчислювали максимальні абсолютні похибки ІЛД:

$$\Delta = \max\left| f(t) - D_n(t) \right|, \quad \Delta_1 = \max\left| f(t) - D_n^{(1)}(t) \right|, \quad \Delta_2 = \max\left| f(t) - D_n^{(2)}(t) \right|,$$

$$\Delta_3 = \max\left| f(t) - D_n^{(3)}(t) \right|, \quad \Delta_j = \max\left| f(t) - D_n^{(j)}(t) \right|,$$

де $t = t_k$, $k = 1, \ldots, 100000$. Результати обчислень наведено в табл. 1.

Таблиця 1

| № | $n$ | $\Delta$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 29 | $0.4522\cdot 10^{+02}$ | $0.3625\cdot 10^{-02}$ | $0.4318\cdot 10^{+02}$ | $0.1245\cdot 10^{-03}$ | $0.2708\cdot 10^{-02}$ |
| 2 | 30 | $0.9235\cdot 10^{-03}$ | $0.9240\cdot 10^{-03}$ | $0.9140\cdot 10^{-03}$ | $0.9151\cdot 10^{-03}$ | $0.9232\cdot 10^{-03}$ |
| 3 | 31 | $0.2232\cdot 10^{-02}$ | $0.1053\cdot 10^{+01}$ | $0.2098\cdot 10^{-02}$ | $0.1143\cdot 10^{+01}$ | $0.2173\cdot 10^{+00}$ |
| 4 | 32 | $0.2884\cdot 10^{-04}$ | $0.2623\cdot 10^{-04}$ | $0.3045\cdot 10^{-04}$ | $0.3136\cdot 10^{-04}$ | $0.6463\cdot 10^{-04}$ |
| 5 | 33 | $0.1600\cdot 10^{-02}$ | $0.8330\cdot 10^{-03}$ | $0.1194\cdot 10^{-02}$ | $0.1130\cdot 10^{-02}$ | $0.6735\cdot 10^{-03}$ |
| 6 | 40 | $0.1275\cdot 10^{-05}$ | $0.5132\cdot 10^{-06}$ | $0.8529\cdot 10^{-06}$ | $0.1787\cdot 10^{-05}$ | $0.2076\cdot 10^{-04}$ |
| 7 | 46 | $0.5122\cdot 10^{-08}$ | $0.1109\cdot 10^{-06}$ | $0.3529\cdot 10^{-06}$ | $0.4586\cdot 10^{-06}$ | $0.5226\cdot 10^{-05}$ |
| 8 | 50 | $0.2387\cdot 10^{-07}$ | $0.4489\cdot 10^{-05}$ | $0.2775\cdot 10^{-06}$ | $0.1868\cdot 10^{-05}$ | $0.1137\cdot 10^{-04}$ |

З аналізу результатів обчислень випливає, що максимальні абсолютні похибки дробу Тіле $(\Delta)$, $C$-дробу $(\Delta_1)$, обернених до них дробів $(\Delta_2,\ \Delta_3)$ та $J$-дробу $(\Delta_J)$ є, взагалі кажучи, різними. Побудовані ІЛД за значеннями функції в інтерполяційних вузлах, дають різні апроксимаційні апарати.

***Приклад 2.*** Функцію $f(x) = \exp(x)/(1 + x^2)$ наближали ІЛД на множині $G = [-15.0, 15.01]$. Вузли інтерполяції − корені многочлена Чебишова 1-го роду. Максимальні абсолютні відхилення обчислювали на множині із $k = 100000$ псевдовипадкових точок (табл. 2).

Таблиця 2

| № | $n$ | $\Delta$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_J$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 25 | $0.4361\cdot 10^{-05}$ | $0.1362\cdot 10^{-04}$ | $0.4497\cdot 10^{-05}$ | $0.1333\cdot 10^{-04}$ | $0.1355\cdot 10^{-04}$ |
| 2 | 26 | $0.2774\cdot 10^{-02}$ | $0.9633\cdot 10^{-06}$ | $0.6997\cdot 10^{-06}$ | $0.1414\cdot 10^{-05}$ | $0.8410\cdot 10^{-06}$ |
| 3 | 27 | $0.2806\cdot 10^{-07}$ | $0.1850\cdot 10^{-06}$ | $0.3227\cdot 10^{-06}$ | $0.8282\cdot 10^{-07}$ | $0.5194\cdot 10^{-06}$ |
| 4 | 28 | $0.7212\cdot 10^{-07}$ | $0.1284\cdot 10^{-04}$ | $0.6866\cdot 10^{-07}$ | $0.2597\cdot 10^{-06}$ | $0.2506\cdot 10^{-06}$ |
| 5 | 29 | $0.6152\cdot 10^{-08}$ | $0.1632\cdot 10^{-07}$ | $0.9641\cdot 10^{-09}$ | $0.1262\cdot 10^{-07}$ | $0.8655\cdot 10^{-08}$ |
| 6 | 30 | $0.5266\cdot 10^{-08}$ | $0.1506\cdot 10^{-08}$ | $0.2674\cdot 10^{-07}$ | $0.1060\cdot 10^{-08}$ | $0.3287\cdot 10^{-08}$ |
| 7 | 31 | $0.9823\cdot 10^{-10}$ | $0.3201\cdot 10^{-09}$ | $0.4911\cdot 10^{-10}$ | $0.3638\cdot 10^{-09}$ | $0.2547\cdot 10^{-09}$ |
| 8 | 32 | $0.1770\cdot 10^{-06}$ | $0.7276\cdot 10^{-11}$ | $0.9641\cdot 10^{-10}$ | $0.7822\cdot 10^{-10}$ | $0.9823\cdot 10^{-10}$ |
| 9 | 33 | $0.3399\cdot 10^{-09}$ | $0.2001\cdot 10^{-10}$ | $0.2365\cdot 10^{-10}$ | $0.2001\cdot 10^{-10}$ | $0.1819\cdot 10^{-10}$ |
| 10 | 34 | $0.9095\cdot 10^{-11}$ | $0.5457\cdot 10^{-11}$ | $0.2365\cdot 10^{-10}$ | $0.1819\cdot 10^{-11}$ | $0.7276\cdot 10^{-11}$ |

Як і в прикладі 1, максимальні абсолютні похибки відрізняються між собою, й іноді суттєво, наприклад, при $n = 26$ і $n = 32$.

***Приклад 3.*** На проміжку $[0.05,\ 5.5]$ функцію $f(x) = \ln x$ наближали за своїми значеннями в інтерполяційних вузлах − коренях многочлена Чебишова ІЛД. Максимальні абсолютні похибки обчислювали за значеннями в $k = 100000$ точках. У табл. 3 наведено результати обчислень у випадку, коли кількість вузлів інтерполяції зростає з кроком 5. З аналізу результатів випливає, що максимальні абсолютні похибки інтерполяційних дробів хоч є «досить» близькими, але все таки різними.

Таблиця 3

| № | $n$ | $\Delta$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_J$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | $0.3117\cdot 10^{+00}$ | $0.3185\cdot 10^{+00}$ | $0.3117\cdot 10^{+00}$ | $0.3185\cdot 10^{+00}$ | $0.3185\cdot 10^{+00}$ |
| 2 | 10 | $0.1962\cdot 10^{-01}$ | $0.1962\cdot 10^{-01}$ | $0.1962\cdot 10^{-01}$ | $0.1962\cdot 10^{-01}$ | $0.2621\cdot 10^{-01}$ |
| 3 | 15 | $0.1155\cdot 10^{-02}$ | $0.1162\cdot 10^{-02}$ | $0.1155\cdot 10^{-02}$ | $0.1162\cdot 10^{-02}$ | $0.1162\cdot 10^{-02}$ |
| 4 | 20 | $0.1024\cdot 10^{-03}$ | $0.9693\cdot 10^{-04}$ | $0.1027\cdot 10^{-03}$ | $0.9344\cdot 10^{-04}$ | $0.1388\cdot 10^{-03}$ |
| 5 | 25 | $0.7338\cdot 10^{-05}$ | $0.7120\cdot 10^{-05}$ | $0.7283\cdot 10^{-05}$ | $0.6811\cdot 10^{-05}$ | $0.7452\cdot 10^{-05}$ |
| 6 | 30 | $0.1174\cdot 10^{-05}$ | $0.1238\cdot 10^{-05}$ | $0.1175\cdot 10^{-05}$ | $0.1129\cdot 10^{-05}$ | $0.2042\cdot 10^{-05}$ |
| 7 | 35 | $0.1691\cdot 10^{-06}$ | $0.1702\cdot 10^{-06}$ | $0.1691\cdot 10^{-06}$ | $0.1678\cdot 10^{-06}$ | $0.1705\cdot 10^{-06}$ |
| 8 | 40 | $0.2787\cdot 10^{-07}$ | $0.3077\cdot 10^{-07}$ | $0.2787\cdot 10^{-07}$ | $0.2838\cdot 10^{-07}$ | $0.3968\cdot 10^{-07}$ |
| 9 | 45 | $0.4599\cdot 10^{-08}$ | $0.4549\cdot 10^{-08}$ | $0.4598\cdot 10^{-08}$ | $0.3660\cdot 10^{-08}$ | $0.4627\cdot 10^{-08}$ |
| 10 | 50 | $0.3054\cdot 10^{-08}$ | $0.2546\cdot 10^{-08}$ | $0.5762\cdot 10^{-08}$ | $0.9667\cdot 10^{-08}$ | $0.1730\cdot 10^{-08}$ |

У роботі розглянуто різні типи ІЛД. Вказано на еквівалентність (з аналітичної точки зору) деяких дробів. Однак з обчислювальної точки зору ці дроби можуть відрізнятися. Подальше дослідження задачі інтерполяції функцій ІЛД і встановлення взаємозв'язку між різними типами ІЛД, а також задач, що виникають при цьому, є перспективним.

1. *Гаврилюк І. П., Макаров В. Л.* Методи обчислень: У 2 ч. – К.: Вища шк., 1995. – Ч. 1. – 367 с.
2. *Пагіря М. М.* Деякі типи інтерполяційних ланцюгових дробів // Комп'ютерна математика. Оптимізація обчислень: Зб. наук. праць. – К.: Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 2001. – Т. 1. – С. 328–333.
3. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом Тіле // Зб. наук. праць з обчислювальної математики. – Ужгород, 1997. – С. 21–26.
4. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
5. *Hildebrand F. B.* Introduction to numerical analysis. – New York: McGraw-Hill, 1956. – 511 p.

## ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫМИ ТИПАМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

*Рассмотрены приближения функций одной действительной переменной разными типами интерполяционных цепных дробей. Предложены рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов таких дробей через значения функций в интерполяционных точках.*

## ON FUNCTION APPROXIMATION EFFECTIVENESS OF SOME TYPES OF INTERPOLATION CONTINUED FRACTIONS

*We consider the approximation of functions of one real variable by some types of interpolation continued fractions. We propose the recurrent formulas to calculate the coefficients of such fractions by the value of function at interpolation points.*

Ужгород. нац. ун-т, Ужгород

Одержано
01.12.02