УДК 517.526

Р. І. Дмитришин

ПРО ДЕЯКІ ОБЛАСТІ ЗБІЖНОСТІ БАГАТОВИМІРНОГО J-ДРОБУ

Досліджено збіжність багатовимірного J-дробу з комплексними частинними чисельниками і знаменниками та дійсними частинними чисельниками в деяких областях простору $\mathbb{C}^N$.

Функціональні неперервні дроби (g-дроби, J-дроби, C-дроби) використовують при дослідженні голоморфних і мероморфних функцій [3, 4]. Гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) є багатовимірним узагальненням неперервних дробів [2].

ГЛД вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)} + z_{i_k}} = \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{-a_{i(1)}^2}{b_{i(1)} + z_{i_1} + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{-a_{i(2)}^2}{b_{i(2)} + z_{i_2} + \ddots}}, \tag{1}$$

де $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, $N \in \mathbb{N}$, $i(k) = i_1, i_2, \ldots, i_k$, – мультиіндекс; $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$, $1 \le i_p \le N$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$, – комплексні сталі, причому всі $a_{i(k)} \ne 0$, називають багатовимірним J-дробом.

Якщо існує дійсна стала $M > 0$ така, що

$$|a_{i(k)}| \le \frac{M}{1 + 2\sqrt{N}}, \quad |b_{i(k)}| \le \frac{M}{1 + 2\sqrt{N}}, \quad 1 \le i_p \le N, \quad 1 \le p \le k, \quad k \ge 1,$$

то ГЛД (1) називають обмеженим, а якщо всі коефіцієнти $a_{i(k)}$ і $b_{i(k)}$ – дійсні числа, то ГЛД (1) називають дійсним.

Кажуть, що ГЛД збігається, якщо існує скінченна границя послідовності його підхідних дробів.

Для обмежених і дійсних багатовимірних J-дробів вигляду (1) вивчено властивості та встановлено ознаки збіжності [2]. Метою цієї роботи є дослідження збіжності ГЛД (1) з комплексними частинними чисельниками і знаменниками та дійсними частинними чисельниками в деяких областях простору $\mathbb{C}^N$.

Наведемо потрібні для дослідження збіжності багатовимірного J-дробу теореми.

Теорема 1 [1]. *Нехай існують додатні сталі* δ, ψ, $\delta < 1$, $\psi < \dfrac{\pi}{2(1+\delta)}$, *такі, що для всіх можливих мультиіндексів елементи ГЛД*

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{1} \tag{2}$$

задовольняють умови

$$\sum_{i_k=1}^{N} \frac{|c_{i(k)}| - \mathrm{Re}\,(c_{i(k)} e^{-i(\psi_{i(k-1)} + \psi_{i(k)})})}{\cos\psi_{i(k)} - p_{i(k)}} \le 2(1-\delta) p_{i(k-1)},$$

$$1 \le i_p \le N, \qquad 1 \le p \le k, \qquad k \ge 1,$$

де $i_0 = 0$; $\psi_{i(k)}$, $p_{i(k)}$ – *деякі дійсні числа такі, що* $|\psi_{i(k)}| \le \psi$, $1 \le i_p \le N$, $1 \le p \le k$, $k \ge 0$; $p_0 \ge 0$, $0 \le p_{i(k)} \le (1-\delta)\cos\psi_{i(k)}$, $1 \le i_p \le N$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$.

Тоді

($\boldsymbol{i}$) *значення всіх підхідних дробів ГЛД* (2) *скінченні й розміщені у півплощині*

$$V_0 = \{ w: \ \operatorname{Re}(we^{-i\psi_0}) \ge 1 - p_0 \};$$

($\boldsymbol{ii}$) *існують скінченні границі послідовностей парних* $\{ f_{2n} \}$ *і непарних* $\{ f_{2n-1} \}$ *підхідних дробів ГЛД* (2);

($\boldsymbol{iii}$) *ГЛД* (2) *збігається, якщо виконується умова*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\max_{i(k)} \ | c_{i(k)} | \right)^{-1} = \infty .$$

Теорема 2 [2]. *Нехай* $F = \{ f_n(\mathbf{z}), \ \mathbf{z} \in D, \ D \subset \mathbb{C}^N, \ n \ge 1 \}$ – *послідовність голоморфних функцій в області* D, *рівномірно обмежених всередині* D.

Якщо послідовнісить $\{ f_n(\mathbf{z}) \}$ *збігається у кожній точці множини* $\Delta \subset D$, *яка є* $2N$*-вимірним околом,* N*-вимірним дійсним околом або* N*-вимірним комплексним околом точки* $z_0 \in D$, *то* $\{ f_n(\mathbf{z}) \}$ *збігається рівномірно на кожній компактній підмножині множини* D *до голоморфної функції в* D.

Нехай

$$f_n(\mathbf{z}) = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)} + z_{i_k}}, \qquad n \ge 1,$$

– n-й підхідний дріб багатовимірного J-дробу (1).

Справджується наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай для елементів багатовимірного* J*-дробу* (1) *виконуються такі умови*:

($\boldsymbol{a}$) $b_{i(k)} = id_{i(k)}, \qquad d_{i(k)} \ge 0, \quad 1 \le i_p \le N, \quad 1 \le p \le k, \quad k \ge 1;$

($\boldsymbol{б}$) $a_{i(k)}$ – *ненульові комплексні сталі, які задовольняють нерівності*

$$\sum_{i_k=1}^{N} \frac{(\operatorname{Im} a_{i(k)})^2}{\ell_{i_k}(1 - g_{i(k)})} \le (1 - \delta)\, \ell_{i_{k-1}} g_{i(k-1)},$$

$$1 \le i_p \le N, \qquad 1 \le p \le k, \qquad k \ge 1, \quad i_0 = 0, \tag{3}$$

де $0 < \delta < 1$; $\ell_0 = 1$, ℓ_n, $1 \le n \le N$, – *деякі додатні числа, а* $\{ g_{i(k)} \}$ – *послідовність дійсних чисел таких, що*

$$g_0 \ge 0, \qquad 0 \le g_{i(k)} \le 1 - \delta, \qquad 1 \le i_p \le N, \quad 1 \le p \le k, \quad k \ge 1. \tag{4}$$

Тоді

($\boldsymbol{i}$) *послідовності парних* $\{ f_{2n}(\mathbf{z}) \}$ *і непарних* $\{ f_{2n-1}(\mathbf{z}) \}$ *підхідних дробів ГЛД* (1) *збігаються до голоморфних функцій в області*

$$P(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_N, d, \delta) = \Bigg\{ \mathbf{z} : | d - iz_n | > \frac{\ell_n}{\cos(\arg(d - iz_n))},$$

$$| \arg(d - iz_n) | < \frac{\pi}{2(1+\delta)}, \qquad 1 \le n \le N \Bigg\}, \tag{5}$$

де $d = \inf\limits_{i(k)} d_{i(k)}$, *причому збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області* $P(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_N, d, \delta)$;

(***ii***) *ГЛД* (1) *збігається до функції, голоморфної в* $P(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_N, d, \delta)$, *якщо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\max_{i(k)} \frac{|a_{i(k)}|^2}{\ell_{i_{k-1}} \ell_{i_k}} \right)^{-1} = \infty .$$

Д о в е д е н н я. Еквівалентними перетвореннями багатовимірний J-дріб (1) зведемо до вигляду

$$i \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}(\mathbf{z})}{1}, \tag{6}$$

де

$$c_{i(1)}(\mathbf{z}) = \frac{a_{i(1)}^2}{d_{i(1)} - iz_{i_1}}, \qquad 1 \le i_1 \le N,$$

$$c_{i(k)}(\mathbf{z}) = \frac{a_{i(k)}^2}{(d_{i(k-1)} - iz_{i_{k-1}})(d_{i(k)} - iz_{i_k})}, \quad 1 \le i_p \le N, \quad 1 \le p \le k, \quad k \ge 2.$$

Покладемо $r_0 = d_0 = 1, \quad \alpha_0 = z_0 = 0, \quad p_0 = g_0$ і

$$\frac{1}{d_{i(k)} - iz_{i_k}} = r_{i(k)} e^{i\alpha_{i(k)}}, \qquad\qquad p_{i(k)} = g_{i(k)} \cos\alpha_{i(k)},$$

де $1 \le i_p \le N$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$. Тоді для будь-якого мультиндексу $i(k)$, $1 \le i_p \le N$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$, із умов (3) отримуємо

$$\sum_{i_k=1}^{N} \frac{\left| \dfrac{a_{i(k)}^2}{(d_{i(k-1)} - iz_{i_{k-1}})(d_{i(k)} - iz_{i_k})} \right| - \mathrm{Re} \dfrac{a_{i(k)}^2 e^{-i(\alpha_{i(k-1)} + \alpha_{i(k)})}}{(d_{i(k-1)} - iz_{i_{k-1}})(d_{i(k)} - iz_{i_k})}}{r_{i(k)} \ell_{i_k} (1 - g_{i(k)})} \le$$

$$\le 2(1-\delta) r_{i(k-1)} \ell_{i_{k-1}} g_{i(k-1)}$$

або

$$\sum_{i_k=1}^{N} \frac{|c_{i(k)}(\mathbf{z})| - \mathrm{Re}\left(c_{i(k)}(\mathbf{z}) e^{-i(\alpha_{i(k-1)} + \alpha_{i(k)})} \right)}{\dfrac{r_{i(k)} \ell_{i_k}}{\cos\alpha_{i(k)}} (\cos\alpha_{i(k)} - p_{i(k)})} \le 2(1-\delta) \frac{r_{i(k-1)} \ell_{i_{k-1}}}{\cos\alpha_{i(k-1)}} p_{i(k-1)}. \tag{7}$$

На підставі умов (4) маємо

$$p_0 \ge 0, \quad 0 \le p_{i(k)} \le (1-\delta)\cos\alpha_{i(k)}, \quad 1 \le i_p \le N, \quad 1 \le p \le k, \quad k \ge 1. \tag{8}$$

Тому для кожного $\mathbf{z} \in P(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_N, d, \delta)$ і для будь-якого мультиндексу $i(k)$, $1 \le i_p \le N$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$, отримуємо

$$r_{i(k)} \ell_{i_k} = \frac{\ell_{i_k}}{|d_{i(k)} - iz_{i_k}|} \le \frac{\ell_{i_k}}{|d - iz_{i_k}|} < 1 + \cos(\arg(d - iz_n)) \le \cos\alpha_{i(k)}. \tag{9}$$

Використовуючи співвідношення (8) і (9), нерівність (7) запишемо у вигляді

$$\sum_{i_k=1}^{N} \frac{|\,c_{i(k)}(\mathbf{z})\,| - \mathrm{Re}\,(c_{i(k)}(\mathbf{z})\,e^{-i(\alpha_{i(k-1)}+\alpha_{i(k)})})}{\cos\alpha_{i(k)} - p_{i(k)}} \le 2(1-\delta)p_{i(k-1)}\,.$$

Отже, компоненти ГЛД (6) задовольняють умови теореми 1 тоді й лише тоді, коли $\mathbf{z} \in P(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_N, d, \delta)$.

Із твердження (***ii***) теореми 1 випливає, що послідовності парних і непарних підхідних дробів ГЛД (6) збігаються до скінченних значень для всіх $\mathbf{z} \in P(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_N, d, \delta)$, і, крім того, з твердження (***i***) цієї теореми заключаємо, що значення всіх ГЛД

$$Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{n} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}(\mathbf{z})}{1}, \qquad 1 \le i_1 \le N, \qquad n \ge 2\,,$$

розміщені у відповідних півплощинах

$$V_{i(1)}(\alpha_{i(1)}, p_{i(1)}) = \{\, w: \ \ \mathrm{Re}\,(we^{-i\alpha_{i(1)}}) \ge 1 - p_{i(1)} \}, \quad 1 \le i_1 \le N\,.$$

Із нерівностей (8) випливає, що в області $P(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_N, d, \delta)$ всі $Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z}) \ne 0$.

Очевидно, що

$$f_n(\mathbf{z}) = i \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}(\mathbf{z})}{Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})}, \qquad n \ge 1\,,$$

– голоморфні функції в області (5).

Нехай $C = \max\limits_{1 \le i_1 \le N} \dfrac{|\,a_{i(1)}^2\,|}{\ell_{i_1}}$. Оскільки $|\,\alpha_{i(1)}\,| \le |\,\arg\,(d - iz_{i_1})\,| < \dfrac{\pi}{2(1+\delta)}$, $1 \le i_1 \le N$, то з умов (8) і (9) при $n \ge 1$ маємо

$$|\,f_n(\mathbf{z})\,| = \left|\, \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}(\mathbf{z})}{Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})} \,\right| \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|\,a_{i(1)}^2\,|}{(1 - p_{i(1)})\,|\,d_{i(1)} - iz_{i_1}\,|} <$$

$$< \frac{\cos\dfrac{\pi}{2(1+\delta)}}{1 - (1-\delta)\cos\dfrac{\pi}{2(1+\delta)}}\, CN = M\,,$$

тобто послідовність $\{\,f_n(\mathbf{z})\,\}$ рівномірно обмежена всередині області $P(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_N, d, \delta)$. Із теореми 2 випливає, що послідовності парних і непарних підхідних дробів ГЛД (6) рівномірно збігаються до голоморфних функцій на кожній компактній підмножині області (5). Твердження (***ii***) отримуємо із твердження (***iii***) теореми 1 і теореми 2.

Теорему доведено. ◊

Наступна теорема стосується області збіжності багатовимірного J-дробу з дійсними частинними чисельниками.

Теорема 4. *Нехай багатовимірний* J*-дріб* (1) *такий, що* $b_{i(k)} = id_{i(k)}$, $d_{i(k)} \ge 0$, $1 \le i_p \le N$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$, *а всі* $a_{i(k)}$ *– додатні дійсні сталі.*

Тоді

(***i***) *послідовності парних* $\{\,f_{2n}(\mathbf{z})\,\}$ *і непарних* $\{\,f_{2n-1}(\mathbf{z})\,\}$ *підхідних дробів ГЛД* (1) *збігаються до голоморфних функцій в області*

$$R(d, \delta) = \left\{ \mathbf{z}: \ |\,\arg\,(d - iz_n)\,| < \frac{\pi}{2(1+\delta)}, \quad 1 \le n \le N \right\},$$

де $d = \inf\limits_{i(k)} d_{i(k)}$, δ – *деяка стала*, $0 < \delta < 1$, *причому збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області* $R(d,\delta)$;

(***ii***) *ГЛД* (1) *збігається до функції, голоморфної в* $R(d,\delta)$, *якщо існує дійсна стала* $M > 0$ *така, що* $|\, d - iz_n \,| \ge M$, $1 \le n \le N$, *і, крім того,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\max_{i(k)} a_{i(k)}^2 \right)^{-1} = \infty .$$

Д о в е д е н н я. Якщо всі $a_{i(k)} > 0$, то умови (5) справджуються при кожному $\ell_n > 0$, $1 \le n \le N$.

Нехай K – довільна компактна підмножина області $R(d,\delta)$. Тоді вірні такі включення: $K \subset P(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_N, d, \delta) \subset R(d,\delta)$ для деяких досить малих $\ell_n > 0$, $1 \le n \le N$. Тому теорема 2 є наслідком теореми 1.

Теорему доведено. ◊

Досліджено області збіжності для багатовимірних J-дробів, відмінні від відомих раніше. Подібні результати для неперервних J-дробів нам невідомі.

1. *Антонова Т. М.* Багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 7–12.
2. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
3. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
4. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: Van Nostrand, 1948. – 433 p.

О НЕКОТОРЫХ ОБЛАСТЯХ СХОДИМОСТИ МНОГОМЕРНОЙ J -ДРОБИ

Исследована сходимость многомерной J-дроби с комплексными частными числителями и знаменателями и вещественными частными числителями в некоторых областях пространства $\mathbb{C}^N$.

ON SOME REGIONS OF CONVERGENCE OF MULTIDIMENSIONAL J -FRACTION

We investigate the convergence of multidimensional J-fraction with complex partial numerators and denominators and real partial numerators in some regions of space $\mathbb{C}^N$.

Прикарпат. ун-т
ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
01.11.02