УДК 517.526

О. С. Манзій

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ NÖRLUND'A

Досліджено збіжність у вузькому розумінні ланцюгового дробу, в який розвивається відношення гіпергеометричних функцій Ґаусса $\dfrac{F(a,b;c;z)}{F(a+1,b+1;c+1;z)}$. *Встановлено оцінку швидкості збіжності.*

Гіпергеометричні функції є одним з найважливіших класів спеціальних функцій математичної фізики. У пропонованій статті розглядається гіпергеометрична функція Ґаусса

$$F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_m n!} z^n \,, \tag{1}$$

де $a,\ b,\ c,\ z \in \mathbb{C}$; $c \neq 0, -1, -2, \ldots$, $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)$, $(\alpha)_0 = 1$.

Ефективним апаратом наближення функції (1) є ланцюгові дроби. Розвинення у ланцюгові дроби були побудовані для відношення гіпергеометричних функцій $\dfrac{F(a,b;c;z)}{F(a+1,b+1;c+1;z)}$ Nörlund'ом [2] і $\dfrac{F(a,b;c;z)}{F(a,b+1;c+1;z)}$ Ґауссом [1].

Теорема Nörlund'a [2]. *Відношення гіпергеометричних функцій Ґаусса* $\dfrac{F(a,b;c;z)}{F(a+1,b+1;c+1;z)}$ *розвивається у ланцюговий дріб*

$$b_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(z)}{b_k(z)} \,, \tag{2}$$

де $$b_0(z) = 1 - \frac{a+b+1}{c} z \,,$$

$$a_k(z) = \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k-1)(c+k)} z(1-z), \qquad b_k(z) = 1 - \frac{a+b+2k+1}{c+k} z \,. \tag{3}$$

Дріб (2) збігається в області $\left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < \dfrac{1}{2} \right\}$.

Ланцюговий дріб збігається в широкому розумінні, якщо існує границя послідовності його підхідних дробів (можливо, рівна нескінченності) і у вузькому розумінні – якщо існує скінченна границя послідовності його підхідних дробів.

У теоремі Nörlund'a встановлено збіжність ланцюгового дробу (2) у широкому розумінні. Про збіжність ланцюгових дробів, у які розвиваються відношення гіпергеометричних функцій Ґаусса у вузькому розумінні говориться лише те, що такі дроби збігаються в деякому околі початку координат [1], радіус якого не уточнюється. Актуальною є задача встановлення області збіжності у вузькому розумінні ланцюгового дробу (2) та встановлення оцінок похибок апроксимацій підхідними дробами цього дробу.

У пропонованій статті побудовано деяку необмежену область, у якій ланцюговий дріб Nörlund'a збігається у вузькому розумінні, а також встановлено оцінку швидкості його збіжності.

Теорема. *Нехай параметри гіпергеометричної функції Ґаусса задовольняють умови*

$$a,\ b,\ c \in \mathbb{R}_+, \qquad c > \frac{a+b+1}{2} \,.$$

Тоді ланцюговий дріб (2) *збігається у вузькому розумінні до функції*

$$f(z) = \frac{F(a,b;c;z)}{F(a+1,b+1;c+1;z)} \tag{4}$$

в області

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} - \operatorname{Re} z \geq \sqrt{|z||1-z|} \right\}. \tag{5}$$

Для

$$z \in \tilde{D} = P \bigcap B,$$

$$P = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} - \varepsilon - \operatorname{Re} z \geq \sqrt{|z||1-z|} \right\}, \; B = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq M \right\}, \tag{6}$$

де ε, M *– деякі дійсні додатні числа, справджується оцінка швидкості збіжності*

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \frac{b+1}{c} \sqrt{M(M+1)} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{R_k'}{R_k' + \delta_k} \right) \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{R_k''}{R_k'' + \delta_k} \right),$$

$$n = 2, 3, \ldots, \tag{7}$$

де $f_n(z)$ *–* n *-на апроксиманта ланцюгового дробу* (2),

$$R_k' = \frac{a+k}{c+k-1} \sqrt{M(M+1)}, \qquad R_k'' = \frac{b+k}{c+k-1} \sqrt{M(M+1)},$$

$$\delta_k = \frac{a+b+2k+1}{c+k} \varepsilon.$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи ознаку збіжності Прінґсгейма [2] та еквівалентні перетворення ланцюгового дробу [3], можна довести, що дріб

$$b_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(z)}{b_k(z)}$$

збігається у вузькому розумінні в деякій області G, якщо існують такі додатні функції $g_k(z)$, $z \in G$, $k = \overline{0,\infty}$, що для кожного z, $z \in G$, виконуються нерівності

$$|b_k(z)| \geq g_k(z) + \frac{|a_{k+1}(z)|}{g_{k+1}(z)}, \qquad k = \overline{1,\infty}. \tag{8}$$

Покажемо, що в області (5) для ланцюгового дробу (2) виконуються умови (8), якщо $g_k(z)$ вибрати наступним чином:

$$g_k(z) = \frac{a+k}{c+k} \sqrt{|z||1-z|}, \qquad k = \overline{1,\infty}. \tag{9}$$

Згідно з формулами (3) і (9) нерівності (8) можемо записати у вигляді

$$\left| 1 - \frac{a+b+2k+1}{c+k} z \right| \geq \frac{a+k}{c+k} \sqrt{|z||1-z|} +$$

$$+ \frac{(a+k+1)(b+k+1)}{(c+k)(c+k+1)} \cdot |z(1-z)| \cdot \left(\frac{a+k+1}{c+k+1} \sqrt{|z||1-z|} \right)^{-1},$$

$$k = \overline{1,\infty}. \tag{10}$$

Нерівність (10) після деяких спрощень набуде вигляду

$$\left| \frac{c+k}{a+b+2k+1} - z \right| \geq \sqrt{|z||1-z|}, \qquad k = \overline{1,\infty}. \tag{11}$$

Оскільки

$$\left|\frac{c+k}{a+b+2k+1}-z\right| \ge \frac{c+k}{a+b+2k+1}-\operatorname{Re} z \ge \frac{1}{2}-\operatorname{Re} z\,,$$

то нерівність (8) виконується в області (5). Отже, дріб (2) збігається у вузькому розумінні для кожного $z,\ z \in D$.

Встановимо оцінку швидкості збіжності ланцюгового дробу (2) в області (6). Розглянемо ланцюговий дріб

$$|\,b_0(z)\,| + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{-|\,a_k(z)\,|}{|\,b_k(z)\,|}. \tag{12}$$

Введемо позначення:

$$Q_n^{(n)}(z) = b_n(z), \qquad Q_p^{(n)}(z) = b_p(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=p+1}^{n} \frac{a_k(z)}{b_k(z)}\,,$$

$$\bar{Q}_n^{(n)}(z) = |\,b_n(z)\,|, \qquad \bar{Q}_p^{(n)}(z) = |\,b_p(z)\,| + \mathop{\mathrm{D}}_{k=p+1}^{n} \frac{-|\,a_k(z)\,|}{|\,b_k(z)\,|}\,,$$

де $n = \overline{0,\infty},\ p = \overline{0,n-1}$. Методом математичної індукції за k легко показати, що

$$\left|\,Q_k^{(n)}(z)\,\right| \ge \left|\,\bar{Q}_k^{(n)}(z)\,\right|, \qquad n = \overline{0,\infty}, \qquad k = \overline{0,n-1}\,.$$

Оцінимо різницю між сусідніми підхідними дробами ланцюгового дробу (2):

$$|\,f_n(z) - f_{n-1}(z)\,| = \frac{\prod_{k=1}^{n} |\,a_k(z)\,|}{\prod_{k=1}^{n-1} \left|\,Q_k^{(n-1)}(z)\,\right| \prod_{k=1}^{n} \left|\,Q_k^{(n)}(z)\,\right|} \le$$

$$\le \frac{\prod_{k=1}^{n} |\,a_k(z)\,|}{\prod_{k=1}^{n-1} \bar{Q}_k^{(n-1)}(z) \prod_{k=1}^{n} \bar{Q}_k^{(n)}(z)} = \bar{f}_n(z) - \bar{f}_{n-1}(z)\,,$$

де $f_n(z),\ \bar{f}_n(z)$ – підхідні дроби ланцюгових дробів (2), (12) відповідно.

Розглянемо ланцюговий дріб вигляду

$$\tilde{b}_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_k(z)}{\tilde{b}_k(z)}\,, \tag{13}$$

де

$$\tilde{b}_0(z) = |\,b_0(z)\,| - \frac{|\,a_1(z)\,|}{g_1(z)}, \qquad \tilde{a}_{2k-1}(z) = \frac{|\,a_k(z)\,|}{g_k(z)}, \qquad \tilde{b}_{2k-1}(z) = 1\,,$$

$$\tilde{a}_{2k}(z) = g_k(z), \quad \tilde{b}_{2k}(z) = |\,b_k(z)\,| - g_k(z) - \frac{|\,a_{k+1}(z)\,|}{g_{k+1}(z)}, \quad k = \overline{1,\infty},\ z \in \tilde{D}\,, \tag{14}$$

$g_{i(k)}(z)$ визначені згідно з (9).

Використовуючи означення парної частини ланцюгового дробу [3] та еквівалентних перетворень, можна перевірити, що дріб (12) є парною частиною ланцюгового дробу (13). Згідно з умовами (8) в області $\tilde{D}$ ланцюговий дріб (13) є дробом з додатними елементами. Його підхідні дроби мають властивість вилки [3] і тому для $n > m$ запишемо

$$\left| \tilde{f}_{2n}(z) - \tilde{f}_{2m}(z) \right| \leq \left| \tilde{f}_{2m}(z) - \tilde{f}_{2m-1}(z) \right|,$$

де $\tilde{f}_n(z)$ − підхідні дроби ланцюгового дробу (13).

Оцінимо різницю між сусідніми підхідними дробами ланцюгового дробу (13). Введемо позначення

$$\tilde{Q}_n^{(n)}(z) = \tilde{b}_n(z), \qquad \tilde{Q}_p^{(n)}(z) = \tilde{b}_p(z) + \underset{k=p+1}{\overset{n}{\mathrm{D}}} \frac{\tilde{a}_k(z)}{\tilde{b}_k(z)}, \quad n = \overline{0,\infty}, \quad p = \overline{0, n-1}.$$

Тоді

$$\tilde{Q}_p^{(n)}(z) = \tilde{b}_p(z) + \frac{\tilde{a}_{p+1}(z)}{\tilde{Q}_{p+1}^{(n)}(z)}. \tag{15}$$

Враховуючи формулу

$$\left| \tilde{f}_{2m}(z) - \tilde{f}_{2m-1}(z) \right| = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2m} \tilde{a}_k(z)}{\prod\limits_{k=1}^{2m-1} \tilde{Q}_k^{(2m-1)}(z) \prod\limits_{k=1}^{2m} \tilde{Q}_k^{(2m)}(z)}, \tag{16}$$

оцінимо швидкість збіжності дробу (13) в області $\tilde{D}$. Якщо виконується нерівність $\frac{1}{2} - \varepsilon - \operatorname{Re} z \geq \sqrt{|z||1-z|}$, то згідно з умовою $c > \frac{a+b+1}{2}$, яка накладена на параметри функції (1), виконується нерівність

$$\left| \frac{c+k}{a+b+2k+1} - z \right| \geq \varepsilon + \sqrt{|z||1-z|},$$

рівносильна нерівності

$$\left| 1 - \frac{a+b+2k+1}{c+k} z \right| \geq \frac{a+b+2k+1}{c+k} \left(\varepsilon + \sqrt{|z||1-z|} \right). \tag{17}$$

Використовуючи позначення $\delta_k = \frac{a+b+2k+1}{c+k} \varepsilon$, формули (3) і (9), нерівність (17) запишемо у вигляді

$$|b_k(z)| - \delta_k \geq g_k(z) + \frac{|a_{k+1}(z)|}{g_{k+1}(z)}. \tag{18}$$

Отже, в області $\tilde{D}$ коефіцієнти дробу (13) задовольняють умови (18), де $g_{i(k)}(z)$ визначені формулою (9).

Розглянемо вирази

$$R_{2k}(z) = \frac{\tilde{a}_{2k}(z)}{\tilde{Q}_{2k-1}^{(2m)}(z)\, \tilde{Q}_{2k}^{(2m)}(z)}, \qquad k = \overline{1, m},$$

$$L_{2k+1}(z) = \frac{\tilde{a}_{2k+1}(z)}{\tilde{Q}_{2k}^{(2m-1)}(z)\, \tilde{Q}_{2k+1}^{(2m-1)}(z)}, \qquad k = \overline{1, m-1}.$$

Згідно з формулами (14) і (15) маємо

$$R_{2k}(z) = \frac{\tilde{a}_{2k}(z)}{\left(1 + \frac{\tilde{a}_{2k}(z)}{\tilde{Q}_{2k}^{(2m)}(z)} \right) \tilde{Q}_{2k}^{(2m)}(z)} = \frac{g_k(z)}{\tilde{b}_{2k}(z) + \frac{\tilde{a}_{2k+1}(z)}{\tilde{Q}_{2k+1}^{(2m)}(z)} + g_k(z)} =$$

$$= \frac{g_k(z)}{|b_k(z)| - \frac{|a_{k+1}(z)|}{g_{k+1}(z)} + \frac{|a_{k+1}(z)|}{g_{k+1}(z) \tilde{Q}_{2k}^{(2m)}(z)}},$$

$$L_{2k+1}(z)=\frac{\tilde{a}_{2k+1}(z)}{\left(\tilde{b}_{2k}(z)+\dfrac{\tilde{a}_{2k+1}(z)}{\tilde{Q}_{2k+1}^{(2m-1)}(z)}\right)\tilde{Q}_{2k+1}^{(2m-1)}(z)}=$$

$$=\frac{\dfrac{|a_{k+1}(z)|}{g_{k+1}(z)}}{\left(|b_k(z)|-g_k(z)-\dfrac{|a_{k+1}(z)|}{g_{k+1}(z)}\right)\tilde{Q}_{2k+1}^{(2m-1)}(z)+\dfrac{|a_{k+1}(z)|}{g_{k+1}(z)}}.$$

На підставі нерівності (18) запишемо

$$R_{2k}(z)\le\frac{g_k(z)}{g_k(z)+\delta_k}, \tag{19}$$

$$L_{2k+1}(z)\le\frac{|a_{k+1}(z)|}{g_{k+1}(z)}\cdot\left(\frac{|a_{k+1}(z)|}{g_{k+1}(z)}+\delta_k\right)^{-1}. \tag{20}$$

Враховуючи нерівності

$$\left|\tilde{f}_{2m}(z)-\tilde{f}_{2m-1}(z)\right|\le\frac{\tilde{a}_1(z)}{\tilde{Q}_1^{(2m-1)}(z)}\prod_{k=1}^{m}R_{2k}(z)\prod_{k=1}^{m-1}L_{2k+1}(z),$$

$$\left|\tilde{Q}_1^{(2m-1)}(z)\right|>1,$$

а також нерівності (19) і (20), отримуємо оцінку зверху для різниці апроксимант $\left|\tilde{f}_{2n}(z)-\tilde{f}_{2m}(z)\right|$:

$$\left|\tilde{f}_{2n}(z)-\tilde{f}_{2m}(z)\right|\le\left|\tilde{f}_{2m}(z)-\tilde{f}_{2m-1}(z)\right|\le$$

$$\le\frac{b+1}{c}\sqrt{M(M+1)}\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{R_k'}{R_k'+\delta_k}\right)\prod_{k=1}^{m-1}\left(\frac{R_k''}{R_k''+\delta_k}\right), \tag{21}$$

де

$$R_k'=\frac{a+k}{c+k-1}\sqrt{M(M+1)},\qquad R_k''=\frac{b+k}{c+k-1}\sqrt{M(M+1)}.$$

Враховуючи, що

$$|f_n(z)-f_{n-1}(z)|\le\left|\bar{f}_n(z)-\bar{f}_{n-1}(z)\right|\le\left|\tilde{f}_{2n}(z)-\tilde{f}_{2n-1}(z)\right|$$

і переходячи в нерівності (21) до границі при $n\to\infty$, отримуємо оцінку (7). ◊

З оцінки (7) випливає рівномірна збіжність підхідних дробів ланцюгового дробу (2) на компактах області $\tilde{D}$. Враховуючи, що в околі точки $z=0$ дріб (2) збігається до функції $\dfrac{F(a,b;c;z)}{F(a+1,b+1;c+1;z)}$, теорему про єдиність і принцип аналітичного продовження, доходимо висновку, що ланцюговий дріб (2) збігається до функції $\dfrac{F(a,b;c;z)}{F(a+1,b+1;c+1;z)}$ в області $\tilde{D}$.

1. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
2. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions with applications. – Amsterdam: North-Holland, 1992. – 606 p.
3. *Perron O.* Die Lehre von der Kettenbruchen. – Stuttgart: Teubner, 1957. – Vol. 2. – 524 S.

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ НЕПРЕРЫВНОЙ ДРОБИ NÖRLUND 'А

Исследована в узком смысле сходимость непрерывной дроби, в которую разлагается отношение гипергеометрических функций Гаусса $\dfrac{F(a,b;c;z)}{F(a+1,b+1;c+1;z)}$. *Установлена оценка скорости сходимости.*

ESTIMATION OF SPEED OF CONVERGENCE OF NÖRLUND CONTINUED FRACTION

The convergence (in the restricted sense) for continued fraction, being the expansion of Gauss hypergeometric functions ratio, $\dfrac{F(a,b;c;z)}{F(a+1,b+1;c+1;z)}$ *is investigated. The estimation of speed of convergence is obtained.*

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
01.12.02