

### ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ НА ОСНОВІ ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

Для функції багатьох змінних побудовано інтерполяційний процес на основі гіллястого ланцюгового дроби з нерівнозначними змінними. Встановлено оцінки швидкості збіжності цього інтерполяційного процесу.

Для побудови дробово-раціональних наближень функцій багатьох змінних використовують, зокрема, підхідні дроби різних типів функціональних гіллястих ланцюгових дроби (ГЛД). Двовимірні та тривимірні інтерполяційні ГЛД вивчалися у роботах [2–5].

На множині  $E = E^1 \times E^2 \times \dots \times E^N$ , де  $E^i = \{z^i \in \mathbb{C} : |z^i - a^i| \leq r^i\}$ ,  $a^i \in \mathbb{C}$ ,  $r^i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , розглянемо розбиття  $\Delta = \Delta^1 \times \Delta^2 \times \dots \times \Delta^N$ , де  $\Delta^i = \{z_p^i \in E^i : z_p^i \neq z_q^i, p \neq q, p, q = \overline{0, n}\}$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Нехай функція  $f(z)$ ,  $z = (z^1; z^2; \dots; z^N) \in E$ , задана своїми значеннями у вузлах інтерполяції  $A_{p(N)} = (z_{p_1}^1; z_{p_2}^2; \dots; z_{p_N}^N) \in \Delta$ ,  $p(N) = p_1 p_2 \dots p_N$ ,  $p_\ell = \overline{0, n}$ ,  $\ell = \overline{1, N}$ . Побудуємо інтерполяційний процес для функції  $f(z)$ ,  $z \in E$ , на основі ГЛД з нерівнозначними змінними

$$D_n(\Delta; f; z) = b_0 + \prod_{k=1}^n \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i_k}^-(z)}{b_{i_k}^*}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

де  $1 \leq i_k \leq i_{k-1}$ ,  $i_0 = N$ ;  $\overline{i_k} = e_{i_1} + e_{i_2} + \dots + e_{i_k} = j_1 e_1 + j_2 e_2 + \dots + j_N e_N$ ,  $k = \overline{0, n}$ ,  $e_m = (\delta_{1m}, \delta_{2m}, \dots, \delta_{Nm})$ ;  $\delta_{\ell m}$  – символ Кронекера,  $\ell, m = \overline{1, N}$ . Умову інтерполяції запишемо у вигляді

$$f(A_{p(N)}) = D_n(\Delta; f; A_{p(N)}), \quad 0 \leq p_\ell \leq n, \quad \ell = \overline{1, N}, \quad \sum_{\ell=1}^N p_\ell \leq n. \quad (2)$$

Аналогічно до обернених розділених різниць функції однієї змінної введемо рекурентно частинні обернені розділені різниці (ЧОРР) функції  $f$ :

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= f(z), \\ \varphi_{i_{k+1}}^* \left( z_0^1, \dots, z_{j_1}^1; z_0^2, \dots, z_{j_2}^2; \dots; z_0^N, \dots, z_{j_N}^N \right) &= \left( z_{j_{i_{k+1}}}^{i_{k+1}} - z_{j_{i_{k+1}-1}}^{i_{k+1}} \right) \times \\ &\times \left[ \varphi_{i_k}^* \left( z_0^1, \dots, z_{j_1}^1; \dots; z_0^{i_{k+1}}, z_1^{i_{k+1}}, \dots, z_{j_{i_{k+1}-2}}^{i_{k+1}}, z_{j_{i_{k+1}-1}}^{i_{k+1}}; z_0^{i_{k+1}+1}, \dots, z_{j_{i_{k+1}+1}}^{i_{k+1}+1}; \dots; z_0^N, \dots, z_{j_N}^N \right) - \right. \\ &\left. - \varphi_{i_k}^* \left( z_0^1, \dots, z_{j_1}^1; \dots; z_0^{i_{k+1}}, z_1^{i_{k+1}}, \dots, z_{j_{i_{k+1}-2}}^{i_{k+1}}, z_{j_{i_{k+1}-1}}^{i_{k+1}}; z_0^{i_{k+1}+1}, \dots, z_{j_{i_{k+1}+1}}^{i_{k+1}+1}; \dots; z_0^N, \dots, z_{j_N}^N \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\overline{i_{k+1}} = (j_1, j_2, \dots, j_N)$ ,  $\overline{i_{k+1}} = \overline{i_k} + e_{i_{k+1}}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

Використовуючи рекурентні співвідношення (3) для ЧОРР, отримаємо розв'язання функції  $f$  у ГЛД з нерівнозначними змінними

$$\begin{aligned}
& f(z^1; z^2; \dots; z^N) = \\
& = b_0 + \sum_{i_1=1}^N \frac{z^{i_1} - z_{j_{i_1}-1}^{i_1}}{b_{i_1}^- + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{z^{i_2} - z_{j_{i_2}-1}^{i_2}}{b_{i_2}^- + \dots + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{z^{i_n} - z_{j_{i_n}-1}^{i_n}}{b_{i_n}^- + \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \frac{z^{i_{n+1}} - z_{j_{i_{n+1}}-1}^{i_{n+1}}}{g_{i_{n+1}}^*(z^1; \dots; z^{i_{n+1}})}}}}, \quad (4)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
& b_0 = \varphi_0(z_0^1; \dots; z_0^N), \\
& b_{i_k}^- = \varphi_{i_k}^-(z_0^1, \dots, z_{j_1}^1; z_0^2, \dots, z_{j_2}^2; \dots; z_0^N, \dots, z_{j_N}^N), \quad \overline{i_k} = (j_1, j_2, \dots, j_N), \quad k = \overline{1, n}, \\
& g_{i_{n+1}}^*(z^1; \dots; z^{i_{n+1}}) = \\
& = \varphi_{i_{n+1}}^* \left( z_0^1, \dots, z_{j_1-1}^1, z^1, \dots; z_0^{i_{n+1}}, z_1^{i_{n+1}}, \dots, z_{j_{i_{n+1}}-1}^{i_{n+1}}, z^{i_{n+1}}; z_0^{i_{n+1}+1}, \dots, z_{j_{i_{n+1}+1}}^{i_{n+1}+1}; \dots; z_0^N, \dots, z_{j_N}^N \right), \quad (5)
\end{aligned}$$

тобто згідно зі співвідношенням (3)  $g_{i_{n+1}}^*(z^1; \dots; z^{i_{n+1}})$  – це ЧОРР функції  $\varphi_{i_{n+1}}^*$ , у якій замість вузлів  $z_{j_p}^p \in \Delta^p$ ,  $p = \overline{1, i_{n+1}}$ , вибрано довільні точки  $z^p \in E^p$ ,  $z^p \notin \Delta^p$ ,  $p = \overline{1, i_{n+1}}$ .

Дійсно, згортаючи дріб (4) і використовуючи співвідношення (3), (5), маємо

$$b_{i_k}^- + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{z^{i_{k+1}} - z_{j_{i_{k+1}}-1}^{i_{k+1}}}{g_{i_{k+1}}^*(z^1; \dots; z^{i_{k+1}})} = g_{i_k}^*(z^1; \dots; z^{i_k}), \quad k = n, n-1, \dots, 1,$$

і т. д. На останньому кроці згортання отримаємо

$$\begin{aligned}
& b_0 + \sum_{i_1=1}^N \frac{z^{i_1} - z_{j_{i_1}-1}^{i_1}}{g_{i_1}^*(z^1; \dots; z^{i_1})} = b_0 + \\
& + \sum_{i_1=1}^N \frac{z^{i_1} - z_{j_{i_1}-1}^{i_1}}{z^{i_1} - z_{j_{i_1}-1}^{i_1}} f \left[ (z^1; \dots; z^{i_1}; z_0^{i_1+1}; \dots; z_0^N) - f(z^1; \dots; z^{i_1-1}; z_0^1; \dots; z_0^N) \right] = \\
& = f(z^1; z^2; \dots; z^N).
\end{aligned}$$

Для залишків ГЛД (4) введемо позначення

$$r_{i_{n+1}}^*(z^1; \dots; z^{i_{n+1}}) = \frac{z^{i_{n+1}} - z_{j_{i_{n+1}}-1}^{i_{n+1}}}{g_{i_{n+1}}^*(z^1; \dots; z^{i_{n+1}})}. \quad (6)$$

Тоді рівність (4) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
& f(z^1; z^2; \dots; z^N) = \\
& = b_0 + \sum_{i_1=1}^N \frac{z^{i_1} - z_{j_{i_1}^{-1}}^{i_1}}{b_{i_1}^- + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{z^{i_2} - z_{j_{i_2}^{-1}}^{i_2}}{b_{i_2}^- + \dots + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{z^{i_n} - z_{j_{i_n}^{-1}}^{i_n}}{b_{i_n}^- + \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} r_{i_{n+1}}^-(z^1; \dots; z^{i_{n+1}})}}}. \quad (7)
\end{aligned}$$

Зауважимо, що  $r_{i_{n+1}}^-(z^1; \dots; z^{i_{n+1}-1}; z_{j_{i_{n+1}}^{-1}}^{i_{n+1}}) = 0$  і умова інтерполяції (2)

виконується.

Отже, для функції багатьох змінних  $f(z)$ ,  $z \in E$ , на розбитті  $\Delta$  побудовано інтерполяційний процес  $\{D_n(\Delta; f; z)\}_{n=1}^\infty$  на основі ГЛД з нерівнозначними змінними

$$D_n(\Delta; f; z) = b_0 + \prod_{k=1}^n \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{z^{i_k} - z_{j_{i_k}^{-1}}^{i_k}}{b_{i_k}^-}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Використовуючи методику, запропоновану в [1], маємо, що

$$\begin{aligned}
& |f(z) - D_n(\Delta; f; z)| \leq \\
& \leq \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^{i_1} \dots \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{\prod_{k=1}^n |z^{i_k} - z_{j_{i_k}^{-1}}^{i_k}|}{\prod_{k=1}^n |F_{i_k}^{(n)}| \prod_{k=1}^n |Q_{i_k}^{(n)}|} \left| \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} r_{i_{n+1}}^-(z^1; \dots; z^{i_{n+1}}) \right|, \quad (9)
\end{aligned}$$

де

$$Q_{i_s}^{(s)} = b_{i_s}^-, \quad Q_{i_k}^{(s)} = b_{i_k}^- + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{z^{i_{k+1}} - z_{j_{i_{k+1}}^{-1}}^{i_{k+1}}}{Q_{i_{k+1}}^{(s)}}, \quad k = s-1, s-2, \dots, 1, \quad s = \overline{1, n},$$

$$F_{i_s}^{(s)} = b_{i_s}^-, \quad s = \overline{1, n-1}, \quad F_{i_n}^{(n)} = b_{i_n}^- + \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} r_{i_{n+1}}^-(z^1; \dots; z^{i_{n+1}}),$$

$$F_{i_k}^{(s)} = b_{i_k}^- + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{z^{i_{k+1}} - z_{j_{i_{k+1}}^{-1}}^{i_{k+1}}}{F_{i_{k+1}}^{(s)}}, \quad k = s-1, s-2, \dots, 1, \quad s = \overline{1, n},$$

$$D_n(\Delta; f; z) = Q_0^{(n)} = b_0 + \sum_{i_1=1}^N \frac{z^{i_1} - z_{j_{i_1}^{-1}}^{i_1}}{Q_{i_1}^{(n)}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$f(z^1; z^2; \dots; z^N) = F_0^{(n)} = b_0 + \sum_{i_1=1}^N \frac{z^{i_1} - z_{j_{i_1}^{-1}}^{i_1}}{F_{i_1}^{(n)}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Теорема 1.** Нехай існує таке  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , що частинні обернені розділені різниці на множині  $E$ , де  $r^i = 1$ ,  $i = \overline{1, N}$ , задовольняють умову

$$\begin{aligned}
& \left| \varphi_{i_k^*}^-(z_0^1, \dots, z_{j_1}^1; z_0^2, \dots, z_{j_2}^2; \dots; z_0^N, \dots, z_{j_N}^N) \right| \geq \\
& \geq 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \left| z^{i_{k+1}} - z_{j_{i_{k+1}-1}}^{i_{k+1}} \right| + \varepsilon, \quad \overline{i_k^*} = (j_1, j_2, \dots, j_N), \quad k = \overline{0, n}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Тоді справджується така оцінка швидкості збіжності інтерполяційного процесу (8):

$$\left| f(z) - D_n(\Delta; f; z) \right| < \frac{N(N+1)\dots(N+n)}{(1+\varepsilon)^{2n}(n+1)!}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Д о в е д е н н я. Оцінимо  $\left| Q_{i_k^*}^{(n)} \right|$  знизу, використовуючи метод математичної індукції і враховуючи умову (10) теореми:

$$\begin{aligned}
\left| Q_{i_n^*}^{(n)} \right| &= \left| b_{i_n^*}^- \right| \geq 1 + \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \left| z^{i_{n+1}} - z_{j_{i_{n+1}-1}}^{i_{n+1}} \right| + \varepsilon > 1 + \varepsilon, \\
\left| Q_{i_{n-1}^*}^{(n)} \right| &= \left| b_{i_{n-1}^*}^- + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{z^{i_n} - z_{j_{i_n}-1}^{i_n}}{Q_{i_n^*}^{(n)}} \right| \geq \left| b_{i_{n-1}^*}^- \right| - \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{\left| z^{i_n} - z_{j_{i_n}-1}^{i_n} \right|}{\left| Q_{i_n^*}^{(n)} \right|} \geq \\
&\geq 1 + \varepsilon + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \left| z^{i_n} - z_{j_{i_n}-1}^{i_n} \right| \left( 1 - \frac{1}{\left| Q_{i_n^*}^{(n)} \right|} \right) > 1 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Припустимо, що  $\left| Q_{i_{k+1}^*}^{(n)} \right| > 1 + \varepsilon$  для  $k+1 \leq n$ . Тоді

$$\left| Q_{i_k^*}^{(n)} \right| \geq 1 + \varepsilon + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \left| z^{i_{k+1}} - z_{j_{i_{k+1}-1}}^{i_{k+1}} \right| \left( 1 - \frac{1}{\left| Q_{i_{k+1}^*}^{(n)} \right|} \right) > 1 + \varepsilon.$$

Отже,  $\left| Q_{i_k^*}^{(n)} \right| > 1 + \varepsilon$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

Оцінимо  $\left| F_{i_k^*}^{(n)} \right|$  знизу:

$$\begin{aligned}
\left| F_{i_n^*}^{(n)} \right| &= \left| b_{i_n^*}^- + \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} r_{i_{n+1}^*}^-(z^1; \dots; z^{i_{n+1}}) \right| \geq \left| b_{i_n^*}^- \right| - \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \left| r_{i_{n+1}^*}^-(z^1; \dots; z^{i_{n+1}}) \right| \geq \\
&\geq 1 + \varepsilon + \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \left( \left| z^{i_{n+1}} - z_{j_{i_{n+1}-1}}^{i_{n+1}} \right| - \left| r_{i_{n+1}^*}^-(z^1; \dots; z^{i_{n+1}}) \right| \right). \quad (12)
\end{aligned}$$

Легко бачити, що з умови (10) теореми випливає наступна оцінка:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial \varphi_{i_k^*}^-}{\partial z^{i_{k+1}}} (z_0^1, \dots, z_{j_1-1}^1, z^1; \dots; z_0^{i_{k+1}}, \dots, z_{j_{i_{k+1}-1}}^{i_{k+1}}, z^{i_{k+1}}; z_0^{i_{k+1}+1}, \dots, z_{j_{i_{k+1}+1}}^{i_{k+1}+1}; \dots; z_0^N, \dots, z_{j_N}^N) \right| < 1, \\
& \overline{i_k^*} = (j_1, j_2, \dots, j_N), \quad k = \overline{0, n}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Зі співвідношень (6), (5), (3) і (13) отримуємо, що

$$\left| r_{i_{n+1}^*}^-(z^1; \dots; z^{i_{n+1}}) \right| < \left| z^{i_{n+1}} - z_{j_{i_{n+1}-1}}^{i_{n+1}} \right|. \quad (14)$$

Враховуючи оцінку (14) у виразі (12), маємо, що  $\left| F_{i_n^*}^{(n)} \right| > 1 + \varepsilon$ .

Припустимо, що  $\left| F_{i_{k+1}^*}^{(n)} \right| > 1 + \varepsilon$  для  $k + 1 \leq n$ . Тоді

$$\begin{aligned} \left| F_{i_k^*}^{(n)} \right| &= \left| b_{i_k^*} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{z^{i_{k+1}} - z^{j_{i_{k+1}}-1}}{F_{i_{k+1}^*}^{(n)}} \right| \geq \\ &\geq 1 + \varepsilon + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \left| z^{i_{k+1}} - z^{j_{i_{k+1}}-1} \right| \left( 1 - \frac{1}{\left| F_{i_{k+1}^*}^{(n)} \right|} \right) > 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже,  $\left| F_{i_k^*}^{(n)} \right| > 1 + \varepsilon$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} r_{i_{n+1}^*} (z^1; \dots; z^{i_{n+1}}) \right| &\leq \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \left| r_{i_{n+1}^*} (z^1; \dots; z^{i_{n+1}}) \right| < \\ &< \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \left| z^{i_{n+1}} - z^{j_{i_{n+1}}-1} \right| < i_n, \end{aligned}$$

оскільки  $r^i = 1$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Підставивши у нерівність (9) оцінки для виразів

$\left| Q_{i_k^*}^{(n)} \right|$ ,  $\left| F_{i_k^*}^{(n)} \right|$  та  $\left| \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} r_{i_{n+1}^*} (z^1; \dots; z^{i_{n+1}}) \right|$ , отримуємо оцінку (11).  $\diamond$

**Теорема 2.** Нехай на множині  $E$ , де  $r^i = 1 - \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $i = \overline{1, N}$ , частинні обернені розділені різниці задовольняють умову

$$\begin{aligned} \left| \varphi_{i_k^*} (z_0^1, \dots, z_{j_1}^1; z_0^2, \dots, z_{j_2}^2; \dots; z_0^N, \dots, z_{j_N}^N) \right| &\geq \\ &\geq 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \left| z^{i_{k+1}} - z^{j_{i_{k+1}}-1} \right|, \quad \overline{i_k^*} = (j_1, j_2, \dots, j_N), \quad k = \overline{0, n}. \quad (15) \end{aligned}$$

Тоді справджується така оцінка швидкості збіжності інтерполяційного процесу (8):

$$\left| f(z) - D_n(\Delta; f; z) \right| < \frac{(1 - \varepsilon)^{n+1} N(N+1) \dots (N+n)}{(n+1)!}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

**Д о в е д е н н я.** Використовуючи метод математичної індукції, а також враховуючи умову (15), легко встановити оцінки  $\left| Q_{i_k^*}^{(n)} \right| > 1$ ,  $\left| F_{i_k^*}^{(n)} \right| > 1$ ,

$k = \overline{0, n}$ . Зауважимо, що з умови (15) випливає оцінка (13). Зі співвідношень (6), (5), (3), (13) і (14) маємо наступну оцінку:

$$\left| \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} r_{i_{n+1}^*} (z^1; \dots; z^{i_{n+1}}) \right| < i_n(1 - \varepsilon).$$

Підставивши отримані оцінки у нерівність (9), отримаємо оцінку (16).  $\diamond$

При виконанні умов теорем 1 і 2 інтерполяційний процес (8) є збіжним, оскільки праві частини нерівностей (11) і (16) прямують до нуля при  $n \rightarrow \infty$ .

1. Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
2. Пагіря М. М. Інтерполювання функцій ланцюговим дробом та його узагальненнями у випадку функцій багатьох змінних // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. Математика. – 1998. – Вип. 3. – С. 155–164.
3. Kuchminskaia Kh. I. On approximation of functions by two-dimensional continued fractions // Lect. Notes Math. – 1987. – **1237**. – P. 207–216.
4. Kuchminskaia Kh. I., Siemaszko W. Rational approximation and interpolation of functions by branched continued fractions // Lect. Notes Math. – 1987. – **1237**. – P. 24–40.
5. Siemaszko W. Thiele-type branched continued fractions for two-variable functions // J. Comput. and Appl. Math. – 1983. – No. 9. – P. 137–153.

**ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ ВЕТВЯЩЕЙСЯ ЦЕПНОЙ ДРОБИ С НЕРАВНОЗНАЧНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ**

*Для функции многих переменных построен интерполяционный процесс на основе ветвящейся цепной дроби с неравнозначными переменными. Установлены оценки скорости сходимости этого интерполяционного процесса.*

**ESTIMATIONS OF SPEED OF CONVERGENCE OF INTERPOLATION PROCESS BASED ON BRANCHED CONTINUED FRACTION WITH UNEQUAL VARIABLES**

*For the multivariable function the interpolation process based on the branched continued fraction with unequal variables has been constructed. The estimations of speed of convergence of this interpolation process have been determined.*

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано  
01.12.02