УДК 517.526

Т. М. Антонова

ЗБІЖНІСТЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З КОМПЛЕКСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ТА ЇХ ПАРНИХ ЧАСТИН

Доведено ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів і їх парних частин. Досліджено збіжність одного класу функціональних гіллястих ланцюгових дробів. Встановлено багатовимірний аналог теореми Джоунса – Трона про парні множини збіжності неперервних дробів.

Об'єктом дослідження є гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \tag{1}$$

де $i(k)$ – мультиіндекс: $i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k$; b_0, $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ – комплексні числа.

Підхідними дробами n-го порядку (n-ми апроксимантами) ГЛД (1) називають вирази

$$f_n = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad f_0 = b_0 .$$

Парною (непарною) частиною ГЛД (1) вважатимемо послідовність $\{f_{2k}\}$ ($\{ f_{2k+1}\}$), $k = 0,1,2,\ldots$. Парна (непарна) частина ГЛД (1) збігається, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} f_{2n} = F_2$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_{2n+1} = F_1\right)$. Парна (непарна) частина ГЛД (1) збігається абсолютно, якщо збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} | f_{2k} - f_{2k-2} | \qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty} | f_{2k+1} - f_{2k-1} | \right).$$

Відомо, що парна та непарна частини ГЛД вигляду (1) з додатними елементами збігаються завжди. Умови збіжності парної і непарної частин ГЛД з комплексними елементами встановлено у багатовимірному аналозі теореми Ван Флека [3, теорема 3.13], багатовимірних аналогах параболічних теорем [3, теореми 3.22, 3.23; 1]. Досліджено питання про абсолютну збіжність парної і непарної частин ГЛД спеціального вигляду [3, теорема 4.28]. При цьому всі елементи досліджуваних ГЛД задовольняли однотипні умови. Властивості підпослідовностей апроксимант ГЛД з елементами, що задовольняють різнотипні умови на парних і непарних поверхах, вивчені мало. Деякі властивості таких ГЛД з дійсними елементами розглянуто в роботі [2]. У цій роботі розглянуто ГЛД з комплексними елементами.

Теорема 1. *Сукупність умов*

$$\left| b_{i(2p-1)} + \sum_{i_{2p}=1}^{N} \frac{a_{i(2p)}}{b_{i(2p)}} \right| + \sum_{i_{2p}=1}^{N} \left| \frac{a_{i(2p)}}{b_{i(2p)}} \right| \ge g_{i(2p-1)} + \varepsilon_{i(2p-1)} + \sum_{i_{2p}=1}^{N} \frac{| a_{i(2p)} |}{g_{i(2p)}},$$

$$p = 1, 2, \ldots, \quad r = \overline{1, 2p-1}, \quad i_r = \overline{1, N}, \tag{2}$$

$$\sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{| a_{i(2p+1)} |}{g_{i(2p+1)}} \le | b_{i(2p)} | - g_{i(2p)} - \varepsilon_{i(2p)},$$

$$p = 1, 2, \ldots, \quad r = \overline{1, 2p}, \quad i_r = \overline{1, N}, \tag{3}$$

де $g_{i(k)}$, $\varepsilon_{i(k)}$ *– деякі дійсні числа такі, що*

$$g_{i(k)} > 0, \qquad \varepsilon_{i(k)} \ge 0, \qquad k = 1,2,\ldots, \qquad r = \overline{1,k}, \qquad i_r = \overline{1,N}, \tag{4}$$

є достатньою для абсолютної збіжності парної частини ГЛД (1) *і виконання нерівності*

$$| F_2 - b_0 | \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{| a_{i(1)} |}{g_{i(1)}}. \tag{5}$$

Якщо ж, крім умов (2)–(4), *справджуються також умови*

$$\left| b_{i(2p-1)} + \sum_{i_{2p}=1}^{N} \frac{a_{i(2p)}}{b_{i(2p)}} \right| + \sum_{i_{2p}=1}^{N} \left| \frac{a_{i(2p)}}{b_{i(2p)}} \right| > g_{i(2p-1)},$$

$$p = 1,2,\ldots, \qquad r = \overline{1,2p-1}, \qquad i_r = \overline{1,N},$$

$$| b_{i(2p)} | > g_{i(2p)}, \qquad p = 1,2,\ldots, \qquad r = \overline{1,2p}, \qquad i_r = \overline{1,N}, \tag{6}$$

то

$$| F_2 - f_{2m} | \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{| a_{i(1)} |}{g_{i(1)}} \prod_{k=1}^{2m+1} \left(\frac{1}{\alpha_k + 1} \right) \prod_{k=1}^{m} (1 - \beta_k), \qquad m = 1,2,\ldots, \tag{7}$$

де

$$\alpha_k = \min\left(\frac{\varepsilon_{i(k)}}{g_{i(k)}} : r = \overline{1,k}, \quad i_r = \overline{1,N} \right),$$

$$\beta_k = \min\left(\frac{\varepsilon_{i(2k)}}{1 - g_{i(2k)}} : r = \overline{1,2k}, \quad i_r = \overline{1,N} \right). \tag{8}$$

Д о в е д е н н я. Позначимо

$$\tilde{b}_{i(2k-1)} = \left| b_{i(2k-1)} + \sum_{i_{2k}=1}^{N} \frac{a_{i(2k)}}{b_{i(2k)}} \right| + \sum_{i_{2k}=1}^{N} \left| \frac{a_{i(2k)}}{b_{i(2k)}} \right|, \quad \tilde{b}_{i(2k)} = | b_{i(2k)} |, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{9}$$

$$Q^p_{i(p)} = b_{i(p)}, \qquad \tilde{Q}^p_{i(p)} = \tilde{b}_{i(p)}, \qquad p = 1,2,\ldots,$$

$$Q^p_{i(k)} = b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}}{Q^p_{i(k+1)}}, \qquad \tilde{Q}^p_{i(k)} = \tilde{b}_{i(k)} - \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{| a_{i(k+1)} |}{\tilde{Q}^p_{i(k+1)}}$$

$$p = 2,3,\ldots, \qquad k = \overline{1,p-1}. \tag{10}$$

Покажемо спочатку, що при виконанні умов (2)–(4) для залишків ГЛД (1), що визначаються за формулами (10), справджуються такі нерівності:

$$\left| Q^{2p}_{i(k)} \right| \ge \tilde{Q}^{2p}_{i(k)} \ge g_{i(k)} + \varepsilon_{i(k)}, \qquad p = 1,2,\ldots, \quad k = \overline{1,n}, \quad i_r = \overline{1,N}. \tag{11}$$

Дійсно, при $k = 2p$ і $k = 2p - 1$ маємо

$$\left| Q^{2p}_{i(2p)} \right| = | b_{i(2p)} | = \tilde{b}_{i(2p)} = \tilde{Q}^{2p}_{i(2p)} \ge g_{i(2p)} + \varepsilon_{i(2p)},$$

$$Q^{2p}_{i(2p-1)} = \left| b_{i(2p-1)} + \sum_{i_{2p}=1}^{N} \frac{a_{i(2p)}}{b_{i(2p)}} \right| = \tilde{b}_{i(2p-1)} - \sum_{i_{2p}=1}^{N} \frac{| a_{i(2p)} |}{\tilde{Q}^{2p}_{i(2p)}} =$$

$$= \tilde{Q}^{2p}_{i(2p-1)} \ge \tilde{b}_{i(2p-1)} - \sum_{i_{2p}=1}^{N} \frac{a_{i(2p)}}{g_{i(2p)}} \ge g_{i(2p-1)} + \varepsilon_{i(2p-1)}.$$

Якщо оцінка (11) справджується для деяких значень $k = 2\ell + 1$, $k = 2\ell + 2$, $\ell < p$, то, враховуючи умови (2)–(4), одержимо

$$\left| Q_{i(2\ell)}^{2p} \right| \geq \left| b_{i(2\ell)} \right| - \sum_{i_{2\ell+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2\ell+1)} \right|}{\left| Q_{i(2\ell+1)}^{2p} \right|} \geq \left| b_{i(2\ell)} \right| - \sum_{i_{2\ell+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2\ell+1)} \right|}{\tilde{Q}_{i(2\ell+1)}^{2p}} =$$

$$= \tilde{Q}_{i(2\ell)}^{2p} \geq \tilde{b}_{i(2\ell)} - \sum_{i_{2\ell+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2\ell+1)} \right|}{g_{i(2\ell+1)}} \geq g_{i(2\ell)} + \varepsilon_{i(2\ell)},$$

$$\left| Q_{i(2\ell-1)}^{2p} \right| = \left| b_{i(2\ell-1)} + \sum_{i_{2\ell}=1}^{N} \frac{a_{i(2\ell)}}{Q_{i(2\ell)}^{2p}} \right| =$$

$$= \left| b_{i(2\ell-1)} + \sum_{i_{2\ell}=1}^{N} \frac{a_{i(2\ell)}}{b_{i(2\ell)} Q_{i(2\ell)}^{2p}} \left(Q_{i(2\ell)}^{2p} - \sum_{i_{2\ell+1}=1}^{N} \frac{a_{i(2\ell+1)}}{Q_{i(2\ell+1)}^{2p}} \right) \right| \geq$$

$$\geq \left| b_{i(2\ell-1)} + \sum_{i_{2\ell}=1}^{N} \frac{a_{i(2\ell)}}{b_{i(2\ell)}} \right| - \sum_{i_{2\ell}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2\ell)} \right|}{\left| Q_{i(2\ell)}^{2p} \right| \left| b_{i(2\ell)} \right|} \sum_{i_{2\ell+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2\ell+1)} \right|}{\left| Q_{i(2\ell+1)}^{2p} \right|} \geq$$

$$\geq \left| b_{i(2\ell-1)} + \sum_{i_{2\ell}=1}^{N} \frac{a_{i(2\ell)}}{b_{i(2\ell)}} \right| - \sum_{i_{2\ell}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2\ell)} \right|}{\left| b_{i(2\ell)} \right| \tilde{Q}_{i(2\ell)}^{2p}} \sum_{i_{2\ell+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2\ell+1)} \right|}{\tilde{Q}_{i(2\ell+1)}^{2p}} =$$

$$= \left| b_{i(2\ell-1)} + \sum_{i_{2\ell}=1}^{N} \frac{a_{i(2\ell)}}{b_{i(2\ell)}} \right| + \sum_{i_{2\ell}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2\ell)} \right|}{\tilde{b}_{i(2\ell)} \tilde{Q}_{i(2\ell)}^{2p}} \left(\tilde{Q}_{i(2\ell)}^{2p} - \tilde{b}_{i(2\ell)} \right) =$$

$$= \left| b_{i(2\ell-1)} + \sum_{i_{2\ell}=1}^{N} \frac{a_{i(2\ell)}}{b_{i(2\ell)}} \right| + \sum_{i_{2\ell}=1}^{N} \left| \frac{a_{i(2\ell)}}{b_{i(2\ell)}} \right| - \sum_{i_{2\ell}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2\ell)} \right|}{\tilde{Q}_{i(2\ell)}^{2p}} =$$

$$= \tilde{Q}_{i(2\ell-1)}^{2p} \geq \tilde{b}_{i(2\ell-1)} - \sum_{i_{2\ell}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2\ell)} \right|}{g_{i(2\ell)}} \geq g_{i(2\ell-1)} + \varepsilon_{i(2\ell-1)},$$

тобто оцінка (11) справджується для всіх значень k, $k = \overline{1,p}$.

З формули різниці двох апроксимант ГЛД (1) [1, формула (3.3), с. 28] та оцінок (11) випливає, що для довільних натуральних n, m, $n > m$,

$$\left| f_{2n} - f_{2m} \right| \leq \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{\prod_{k=1}^{2m+1} \left| a_{i(k)} \right|}{\prod_{k=1}^{2m+1} \left| Q_{i(k)}^{2n} \right| \prod_{k=1}^{2m} \left| Q_{i(k)}^{2m} \right|} \leq$$

$$\leq (-1)^{2m+1} \frac{\prod_{k=1}^{2m+1} \left(-\left| a_{i(k)} \right| \right)}{\prod_{k=1}^{2m+1} \tilde{Q}_{i(k)}^{2n} \prod_{k=1}^{2m} \tilde{Q}_{i(k)}^{2m}} = \tilde{f}_{2m} - \tilde{f}_{2n},$$

де $\tilde{f}_k$ – k-та апроксиманта ГЛД $b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-\left| a_{i(k)} \right|}{\tilde{b}_{i(k)}}$.

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| f_{2k} - f_{2k-2} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tilde{f}_{2k-2} - \tilde{f}_{2k} \right) = \tilde{f}_0 - \tilde{f}_{2n} = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\left| a_{i(1)} \right|}{\tilde{Q}_{i(1)}^{2n}} \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\left| a_{i(1)} \right|}{g_{i(1)}},$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left| f_{2k} - f_{2k-2} \right|$ збігається, а послідовність $\left\{ f_{2k} \right\}$ збігається абсолютно і $|f_{2k} - b_0| \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|a_{i(1)}|}{\tilde{Q}_{i(1)}^{2n}} \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|a_{i(1)}|}{g_{i(1)}}$, звідки при $k \to \infty$ випливає оцінка (5).

Якщо, крім умов (2)–(4), виконуються умови (6), то

$$\left| Q_{i(k)}^{2p} \right| \ge \tilde{Q}_{i(k)}^{2p} > g_{i(k)}, \quad p = 1, 2, \ldots, \quad k = \overline{1, 2p}, \quad r = \overline{1, k}, \; i_r = \overline{1, N}, \quad (12)$$

оскільки

$$\tilde{Q}_{i(2p)}^{2p} = |b_{i(2p)}| > g_{i(2p)},$$

$$\tilde{Q}_{i(k)}^{2p} = \tilde{b}_{i(k)} - \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{|a_{i(k+1)}|}{\tilde{Q}_{i(k+1)}^{p}} > \tilde{b}_{i(k)} - \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{|a_{i(k+1)}|}{g_{i(k+1)}}, \quad \text{якщо} \sum_{i_{k+1}=1}^{N} |a_{i(k+1)}| \ne 0,$$

і

$$\tilde{Q}_{i(k)}^{2p} = \tilde{b}_{i(k)}, \qquad \text{якщо} \quad \sum_{i_{k+1}=1}^{N} |a_{i(k+1)}| = 0.$$

Позначимо

$$c_{i(k)} = \frac{|a_{i(k)}|}{g_{i(k)}}, \qquad k = 1, 2, \ldots. \quad (13)$$

Використовуючи позначення (8), (9), (13), оцінки (11), (12) та умови (2)–(4), оцінимо $|f_{2n} - f_{2m}|$, $n > m$, у такий спосіб:

$$|f_{2n} - f_{2m}| \le \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{\prod_{k=1}^{2m+1} c_{i(k)} \prod_{k=1}^{2m+1} g_{i(k)}}{\prod_{k=1}^{2m+1} \tilde{Q}_{i(k)}^{2n} \prod_{k=1}^{2m} \tilde{Q}_{i(k)}^{2m}} \le$$

$$\le \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{\prod_{k=1}^{2m+1} c_{i(k)} \prod_{k=1}^{2m+1} g_{i(k)}}{\prod_{k=1}^{2m} \tilde{Q}_{i(k)}^{2m} \prod_{k=1}^{2m+1} (g_{i(k)} + \varepsilon_{i(k)})} \le \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{\prod_{k=1}^{2m+1} c_{i(k)}}{\prod_{k=1}^{2m} \tilde{Q}_{i(k)}^{2m} \prod_{k=1}^{2m+1} (1 + \alpha_k)},$$

де α_k визначаються за формулами (8),

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{\prod_{k=1}^{2m+1} c_{i(k)}}{\prod_{k=1}^{2m} \tilde{Q}_{i(k)}^{2m}} =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{c_{i(1)} c_{i(2m+1)} \left(\tilde{Q}_{i(1)}^{2m} - g_{i(1)}\right)}{\tilde{Q}_{i(1)}^{2m} \left(\tilde{Q}_{i(2m)}^{2m} - g_{i(2m)}\right)} \prod_{k=2}^{2m} \frac{c_{i(k)} \left(\tilde{Q}_{i(k)}^{2m} - g_{i(k)}\right)}{\tilde{Q}_{i(k)}^{2m} \left(\tilde{Q}_{i(k-1)}^{2m} - g_{i(k-1)}\right)} \le$$

$$\le \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m}=1}^{N} \frac{c_{i(1)} \left(|b_{i(2m)}| - g_{i(2m)} - \varepsilon_{i(2m)}\right)}{|b_{i(2m)}| - g_{i(2m)}} \prod_{k=2}^{2m} \frac{c_{i(k)} \left(\tilde{Q}_{i(k)}^{2m} - g_{i(k)}\right)}{\tilde{Q}_{i(k)}^{2m} \left(\tilde{Q}_{i(k-1)}^{2m} - g_{i(k-1)}\right)} \le$$

$$\le (1 - \beta_m) \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m}=1}^{N} \frac{|a_{i(1)}|}{g_{i(1)}} \prod_{k=2}^{2m} \frac{c_{i(k)} \left(\tilde{Q}_{i(k)}^{2m} - g_{i(k)}\right)}{\tilde{Q}_{i(k)}^{2m} \left(\tilde{Q}_{i(k-1)}^{2m} - g_{i(k-1)}\right)},$$

$$\sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}\big(\tilde{Q}_{i(k)}^{2m} - g_{i(k)}\big)}{\tilde{Q}_{i(k)}^{2m}\,\big(\tilde{Q}_{i(k-1)}^{2m} - g_{i(k-1)}\big)} =$$

$$= \frac{1}{\tilde{b}_{i(k-1)} - g_{i(k-1)} - \sum\limits_{i_k=1}^{N} \dfrac{c_{i(k)} g_{i(k)}}{\tilde{Q}_{i(k)}^{2m}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}\big(\tilde{Q}_{i(k)}^{2m} - g_{i(k)}\big)}{\tilde{Q}_{i(k)}^{2m}} =$$

$$= \frac{1}{\tilde{b}_{i(k-1)} - g_{i(k-1)} - \sum\limits_{i_k=1}^{N} c_{i(k)} + \sum\limits_{i_k=1}^{N} \dfrac{c_{i(k)}\big(\tilde{Q}_{i(k)}^{2m} - g_{i(k)}\big)}{\tilde{Q}_{i(k)}^{2m}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}\big(\tilde{Q}_{i(k)}^{2m} - g_{i(k)}\big)}{\tilde{Q}_{i(k)}^{2m}} <$$

$$< \frac{\sum\limits_{i_k=1}^{N} c_{i(k)}}{\tilde{b}_{i(k-1)} - g_{i(k-1)} - \sum\limits_{i_k=1}^{N} c_{i(k)} + \sum\limits_{i_k=1}^{N} c_{i(k)}} = \frac{\sum\limits_{i_k=1}^{N} c_{i(k)}}{\tilde{b}_{i(k-1)} - g_{i(k-1)}} \le 1 .$$

Крім того,

$$\frac{\sum\limits_{i_{2l+1}=1}^{N} c_{i(2l+1)}}{\tilde{b}_{i(2l)} - g_{i(2l)}} \le \frac{\tilde{b}_{i(2l)} - g_{i(2l)} - \varepsilon_{i(2l)}}{\tilde{b}_{i(2l)} - g_{i(2l)}} \le 1 - \beta_l ,$$

де β_k, $k = 1, 2, \ldots$, визначаються зі співвідношень (8).

Отже,

$$|\, f_{2n} - f_{2m} \,| \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|\, a_{i(1)} \,|}{g_{i(1)}} \prod_{k=1}^{2m+1} \left(\frac{1}{\alpha_k + 1} \right) \prod_{k=1}^{m} \Big(1 - \beta_k \Big),$$

звідки при $n \to \infty$ випливає оцінка (7). ◊

Теорема 2. *Якщо існують такі числа* $g_{i(k)}$, $\varepsilon_{i(k)}$, $g_{i(k)} > 0$, $\varepsilon_{i(k)} \ge 0$, $k = 1, 2, \ldots$, *що елементи ГЛД* (1) *задовольняють умови* (2), (3), (6), *розбігається хоча б один з рядів* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k$, *де* α_k, β_k, $k = 1, 2, \ldots$, *визначаються за формулами* (8), *і, крім того, існує таке невід'ємне ціле число* p, *що*

$$\Big|\, Q_{i(2n+1)}^{2n+2p+1} \,\Big| \ge g_{i(2n+1)} + \varepsilon_{i(2n+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad r = \overline{1, 2n+1}, \;\; i_r = \overline{1, N} , \qquad (14)$$

то ГЛД (1) *збігається і*

$$|\, f - f_{2m} \,| \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|\, a_{i(1)} \,|}{g_{i(1)}} \prod_{k=1}^{2m+1} \left(\frac{1}{\alpha_k + 1} \right) \prod_{k=1}^{m} (1 - \beta_k), \qquad m = 1, 2, \ldots, \qquad (15)$$

де $f = \lim\limits_{k \to \infty} f_k$ *– значення ГЛД* (1).

Д о в е д е н н я. Спочатку зауважимо, що при виконанні умов (14) і (3)

$$\Big|\, Q_{i(2n)}^{2n+2p+1} \,\Big| \ge |\, b_{i(2n)} \,| - \sum_{i_{2n+1}=1}^{N} \frac{|\, a_{i(2n+1)} \,|}{\Big|\, Q_{i(2n+1)}^{2n+2p+1} \,\Big|} \ge$$

$$\ge |\, b_{i(2n)} \,| - \sum_{i_{2n+1}=1}^{N} \frac{|\, a_{i(2n+1)} \,|}{g_{i(2n+1)}} \ge g_{i(2n)} + \varepsilon_{i(2n)} ,$$

тобто оцінка

$$\left| Q_{i(k)}^{2n+2p+1} \right| \geq g_{i(k)} + \varepsilon_{i(k)}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

справджується при $k = 2n$ і $k = 2n+1$. Тому

$$\left| Q_{i(2n-1)}^{2n+2p+1} \right| = \left| b_{i(2n-1)} + \sum_{i_{2n}=1}^{N} \frac{a_{i(2n)}}{b_{i(2n)} Q_{i(2n)}^{2n+2p+1}} \left(Q_{i(2n)}^{2n+2p+1} - \sum_{i_{2n+1}=1}^{N} \frac{a_{i(2n+1)}}{Q_{i(2n+1)}^{2n+2p+1}} \right) \right| \geq$$

$$\geq \left| b_{i(2n-1)} + \sum_{i_{2n}=1}^{N} \frac{a_{i(2n)}}{b_{i(2n)}} \right| - \sum_{i_{2n}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2n)} \right|}{\left| Q_{i(2n)}^{2n+2p+1} \right| \left| b_{i(2n)} \right|} \sum_{i_{2n+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2n+1)} \right|}{\left| Q_{i(2n+1)}^{2p} \right|} \geq$$

$$\geq \left| b_{i(2n-1)} + \sum_{i_{2n}=1}^{N} \frac{a_{i(2n)}}{b_{i(2n)}} \right| - \sum_{i_{2n}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2n)} \right|}{(g_{i(2n)} + \varepsilon_{i(2n)}) \left| b_{i(2n)} \right|} \sum_{i_{2n+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2n+1)} \right|}{g_{i(2n+1)}} \geq$$

$$\geq \left| b_{i(2n-1)} + \sum_{i_{2n}=1}^{N} \frac{a_{i(2n)}}{b_{i(2n)}} \right| - \sum_{i_{2n}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2n)} \right|}{(g_{i(2n)} + \varepsilon_{i(2n)}) \left| b_{i(2n)} \right|} \left(\left| b_{i(2n)} \right| - g_{i(2n)} - \varepsilon_{i(2n)} \right) =$$

$$\geq \left| b_{i(2n-1)} + \sum_{i_{2n}=1}^{N} \frac{a_{i(2n)}}{b_{i(2n)}} \right| - \sum_{i_{2n}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2n)} \right|}{g_{i(2n)} + \varepsilon_{i(2n)}} + \sum_{i_{2n}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2n)} \right|}{\left| b_{i(2n)} \right|} \geq g_{i(2n-1)} + \varepsilon_{i(2n-1)}.$$

Це означає, що оцінка (16) справджується і при $k = 2n-1$. За індукцією доходимо висновку про її правильність для всіх $k = \overline{1, 2n+1}$.

Використовуючи формулу різниці двох апроксимант ГЛД (1), позначення (10), (13), оцінки (11), (16), для будь-яких натуральних m, n одержимо

$$\left| f_{2m+2p+n} - f_{2m} \right| \leq \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{\prod_{k=1}^{2m+1} c_{i(k)} \prod_{k=1}^{2m+1} g_{i(k)}}{\prod_{k=1}^{2m} \left| Q_{i(k)}^{2m} \right| \prod_{k=1}^{2m+1} \left| Q_{i(k)}^{2m+2p+n} \right|} \leq$$

$$\leq \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{\prod_{k=1}^{2m+1} c_{i(k)}}{\prod_{k=1}^{2m} \tilde{Q}_{i(k)}^{2m}} \prod_{k=1}^{2m+1} \frac{g_{i(k)}}{g_{i(k)} + \varepsilon_{i(k)}}.$$

При доведенні теореми 1 показано, що

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{\prod_{k=1}^{2m+1} c_{i(k)}}{\prod_{k=1}^{2m} \tilde{Q}_{i(k)}^{2m}} \prod_{k=1}^{2m+1} \frac{g_{i(k)}}{g_{i(k)} + \varepsilon_{i(k)}} \leq$$

$$\leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\left| a_{i(1)} \right|}{g_{i(1)}} \prod_{k=1}^{2m+1} \left(\frac{1}{1+\alpha_k} \right) \prod_{k=1}^{m} (1 - \beta_k),$$

тому

$$\left| f_{2m+2p+n} - f_{2m} \right| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\left| a_{i(1)} \right|}{g_{i(1)}} \prod_{k=1}^{2m+1} \left(\frac{1}{1+\alpha_k} \right) \prod_{k=1}^{m} (1 - \beta_k),$$

звідки за умови розбіжності хоча б одного з рядів $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ при $m \to \infty$ випливає збіжність ГЛД (1), а при $n \to \infty$ – оцінка (15). ◊

Приклад 1. Розглянемо функціональний ГЛД вигляду (1), де

$$a_{i(k)} = (1 - g_{i(k-1)}) g_{i(k)} z_{i_k}, \qquad k = 2, 3, \dots,$$

$$b_{i(2k-1)} = 1 - \sum_{i_{2k}}^{N} (1 - g_{i(2k-1)}) g_{i(2k)} z_{i_{2k}}, \qquad b_{i(2k)} = 1,$$

$$0 < g_{i(k)} < 1, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Вибравши $\varepsilon_{i(k)} = 0$, $k = 1, 2, \dots$, неважко переконатись, що умови (2)–(4) справджуються при $\sum_{i_k=1}^{N} | z_{i_k} | \le 1$, тому парна частина ГЛД (1) збігається.

Якщо $\sum_{i_k=1}^{N} | z_{i_k} | \le 1$ і $\varepsilon_{i(k)} = \varepsilon(1 - g_{i(k)})$, $k = 1, 2, \dots$, $\varepsilon = 1 - \sum_{i_p=1}^{N} z_{i_p}$, то справджуються умови (2)–(4), (6), $\beta_k = \varepsilon$, $k = 1, 2, \dots$, і ГЛД (1) збігається.

Теорема 3. *Якщо елементи ГЛД вигляду*

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{1} \tag{17}$$

задовольняють такі умови:

$$\left| 1 + \sum_{i_{2p}=1}^{N} a_{i(2p)} \right| \ge g_1 + \varepsilon_1 + \left(\frac{1}{g_2} - 1 \right) \sum_{i_{2p}=1}^{N} | a_{i(2p)} |,$$

$$p = 1, 2, \dots, \quad r = \overline{1, 2p-1}, \quad i_r = \overline{1, N}, \tag{18}$$

$$\sum_{i_{2p+1}=1}^{N} | a_{i(2p+1)} | \le g_1 (1 - g_2 - \varepsilon_2),$$

$$p = 1, 2, \dots, \quad r = \overline{1, 2p}, \quad i_r = \overline{1, N}, \tag{19}$$

де g_1, g_2, ε_1, ε_2 *– деякі дійсні числа такі, що*

$$0 < g_1 < 1,\ 0 < g_2 < 1,\ 0 \le \varepsilon_1 \le 1 - g_1,\ 0 \le \varepsilon_2 < 1 - g_2,\ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \ne 0, \tag{20}$$

то ГЛД (17) *збігається і швидкість його збіжності характеризується нерівністю*

$$| f - f_{2m} | \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{| a_{i(1)} |}{g_1} \left(\frac{g_2}{g_2 + \varepsilon_2} \right)^m \left(\frac{g_1}{g_1 + \varepsilon_1} \right)^{m+1} \left(\frac{1 - g_2 - \varepsilon_2}{1 - g_2} \right)^m, \tag{21}$$

де f *– значення ГЛД* (17).

Д о в е д е н н я. Ця теорема є наслідком теореми 2. Дійсно, якщо в умовах (2), (3) покласти $g_{i(2k-1)} = g_1$, $g_{i(2k)} = g_2$, $\varepsilon_{i(2k-1)} = \varepsilon_1$, $\varepsilon_{i(2k)} = \varepsilon_2$, $k = 1, 2, \dots$, одержимо умови (18), (19), а за умов (20) справджуються умови (4), (6). Оскільки $\alpha_{2k-1} = \frac{\varepsilon_1}{g_1}$, $\alpha_{2k} = \frac{\varepsilon_2}{g_2}$, $k = 1, 2, \dots$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ розбігається при $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \ne 0$. Крім того, $Q_{i(2n+1)}^{2n+1} = 1 \ge g_1 + \varepsilon_1$, а це означає, що умова (14) справджується при $p = 0$. Таким чином, усі умови теореми 2 виконано, тому ГЛД (17) збігається, і справджується оцінка (21). ◊

Цю теорему можна інтерпретувати як багатовимірний аналог одної з теорем про парні множини збіжності неперервних дробів [4, теорема 4.46].

Парною множиною збіжності ГЛД (17) є пара підмножин $\langle E_1, E_2 \rangle$ комплексної площини таких, що виконання умови

$$a_{i(2n-1)} \in E_1, \qquad a_{i(2n)} \in E_2, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad r = \overline{1, 2n}, \qquad i_r = \overline{1, N},$$

забезпечує збіжність ГЛД (17).

Вибираючи певним чином числа g_1, g_2, ε_1, ε_2 і, можливо, накладаючи на елементи ГЛД (17) певні додаткові умови, на основі теореми 3 можна встановити вигляд деяких парних множин збіжності для ГЛД (15).

Приклад 2. Множини

$$E_1 = \left\{ z : |z| \le \frac{g_1(1 - g_2 - \varepsilon_2)}{N} \right\},$$

$$E_2 = \left\{ z : \left(\frac{1}{g_2} - 1\right)|z| - \operatorname{Re} z \le \frac{1 - g_1 - \varepsilon_1}{N} \right\},$$

де числа g_1, g_2, ε_1, ε_2 задовольняють умови (20), утворюють парну множину збіжності ГЛД (17), причому збіжність буде рівномірною відносно $\langle E_1, E_2 \rangle$.

Приклад 3. Множини

$$E_1 = \left\{ z : |z| \le \frac{g_1(1 - g_2 - \varepsilon_2)}{N} \right\},$$

$$E_2 = \left\{ z : \left(\frac{1}{g_2} - 1\right)|z| - \operatorname{Re} z\, e^{i\varphi} \le \frac{\cos\varphi - g_1 - \varepsilon_1}{N} \right\},$$

де числа g_1, g_2, ε_1, ε_2, φ вибираємо з умов

$$0 < g_1 < 1, \qquad \frac{1}{2} < g_2 < 1, \qquad 0 \le \varepsilon_1 \le 1 - g_1,$$

$$0 \le \varepsilon_2 < 1 - g_2, \qquad \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \ne 0, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi, \tag{22}$$

утворюють парну множину збіжності ГЛД (17), причому збіжність буде рівномірною відносно $\langle E_1, E_2 \rangle$.

Приклад 4. Нехай для елементів ГЛД (17) справджується така умова:

$$\arg a_{i(2k)} = \varphi_{i(2k-1)}, \qquad -\pi < \varphi_{i(k)} \le \pi, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Тоді множини

$$E_1 = \left\{ z : |z| \le \frac{g_1(1 - g_2 - \varepsilon_2)}{N} \right\},$$

$$E_2 = \left\{ z : |1 + Nz| \ge g_1 + \varepsilon_1 + \left(\frac{1}{g_2} - 1\right) N |z| \right\},$$

де числа g_1, g_2, ε_1, ε_2 задовольняють умови (22), утворюють парну множину збіжності ГЛД (17), причому збіжність буде рівномірною відносно $\langle E_1, E_2 \rangle$.

1. *Антонова Т. М.* Багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 1999. − **42**, № 4. − С. 7−12.
2. *Антонова Т. М.* Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 2002. − **45**, № 1. − С. 11−15.
3. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. − Киев: Наук. думка, 1986. − 176 с.
4. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. − М.: Мир, 1985. − 414 с.

**СХОДИМОСТЬ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ
С КОМПЛЕКСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ И ИХ ЧЕТНЫХ ЧАСТЕЙ**

Доказаны признаки сходимости ветвящихся цепных дробей и их четных частей. Исследована сходимость одного класса функциональных ветвящихся цепных дробей. Установлен многомерный аналог теоремы Джоунса − Трона о парных множествах сходимости непрерывных дробей.

**CONVERGENCE OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS
WITH COMPLEX ELEMENTS AND THEIR EVEN PARTS**

Sufficient conditions of convergence for the branched continued fractions and their even parts have been proved. Convergence of some functional branched continued fractions has been investigated. The multidimensional analogue of Jones − Thron's theorem about twin convergence regions for continued fractions have been established.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
02.12.02