

## СТРУКТУРА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ СИНТЕЗУ МІКРОСМУЖКОВОЇ РЕШІТКИ ЗА ЗАДАНОЮ АМПЛІТУДНОЮ ДІАГРАМОЮ НАПРЯМЛЕНОСТІ

Досліджено загальну структуру розв'язків нелінійного інтегрального рівняння, яке виникає в задачах оптимального проектування мікросмужкових антенних решіток, у випадку, коли в умовах задачі задаються вимоги лише до амплітудної діаграми напрямленості. Показано, що для задач цього класу характерним є галуження розв'язків, яке залежить від величини фізичних параметрів решітки та властивостей заданої амплітудної діаграми напрямленості. Отримано рівняння для знаходження точок галуження та аналітичне зображення розв'язків у першому наближенні. Це дозволяє локалізувати існуючі розв'язки, що значно спрощує знаходження повних розв'язків чисельними методами.

**1. Основні співвідношення задач аналізу та синтезу мікросмужкових антенних решіток.** Розглянемо мікросмужкову антенну решітку (МСАР) з  $N = 2M + 1$  ідентичних і однаково орієнтованих прямокутних випромінювачів довжини  $\ell$  і ширини  $d$  (рис. 1а). Введемо декартову й зв'язану з нею сферичну системи координат, початок яких співпадає з площиною ідеально провідного екрану, а вісь  $OZ$  є перпендикулярною до цієї площини. Випромінювачі, по яких протікає струм, є ідеально провідними нескінченно тонкими ділянками, розміщеними на поверхні магнітодіелектрика у площині  $z = h$ . Магнітодіелектрик (область 1) і верхній півпростір (область 2) мають відповідні постійні діелектричну  $\varepsilon$  і магнітну  $\mu$  проникності.

Широкого застосування при розв'язуванні задач аналізу МСАР набув спектральний метод, розвинутий, зокрема, у роботах [5, 10, 11]. Для створення математичної моделі антенної решітки застосовують відповідні спрощення, зокрема, приймають, що густина поверхневого струму є відомою і задається певною функцією. Можливість використання такого наближення впливає з того, що мікросмужковий випромінювач є резонансною системою й ефективно випромінює на тій частоті, яка є резонансною для області підкладки між екраном і випромінювачем. При цьому взаємний вплив випромінювачів змінює лише комплексні амплітуди струмів, але не змінює густини поверхневих струмів.

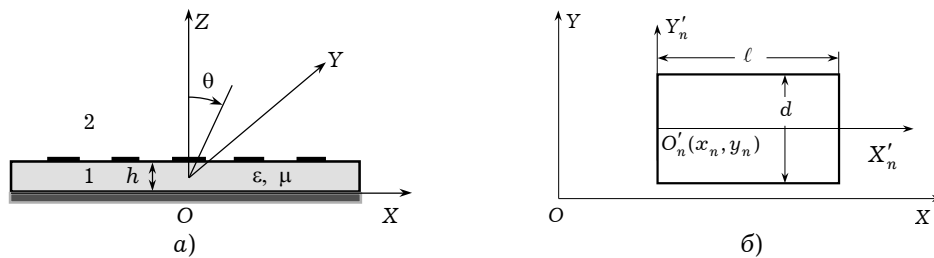


Рис. 1

Розглянемо окремий мікросмужковий випромінювач (рис. 1б) у локальній системі координат  $X'_n O'_n Y'_n$ . Покладемо, що точка  $O'_n$  лежить у площині  $XOY$  і має координати  $(x_n, y_n)$ . Будемо вважати, що в умовах, близьких до резонансних, поверхнева густина струму відома й визначається функцією

$$\mathbf{J}_n(x'_n, y'_n) = J_x(x'_n, y'_n) \mathbf{i}_x + J_y(x'_n, y'_n) \mathbf{i}_y.$$

Густина поверхневого струму в площині решітки є сумою поверхневих густин, які відповідають окремим випромінювачам. На цій підставі згідно з [5] одержуємо вирази для спектральної густини струму антенної решітки

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{\Sigma}^{\perp}(s_1, s_2) &= \left( \tilde{J}_x(s_1, s_2) \frac{s_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} - \tilde{J}_y(s_1, s_2) \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \right) \cdot \sum_{n=-M}^M I_n e^{i(x_n x_n + y_n y_n)}, \\ \tilde{J}_{\Sigma}^{\parallel}(s_1, s_2) &= \left( \tilde{J}_x(s_1, s_2) \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} + \tilde{J}_y(s_1, s_2) \frac{s_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \right) \cdot \sum_{n=-M}^M I_n e^{i(x_n x_n + y_n y_n)},\end{aligned}\quad (1)$$

де  $x_x = ks_1$ ,  $x_y = ks_2$ ;  $s_1 = \sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $s_2 = \sin \vartheta \sin \varphi$  – узагальнені кутові координати;  $\tilde{J}_x$ ,  $\tilde{J}_y$  – перетворення Фур'є поверхневої густини струму;  $I_n$  – комплексна амплітуда струму на  $n$ -му випромінювачі. Сумарний вектор спектральної густини струму дорівнює  $\tilde{\mathbf{J}} = \tilde{J}^{\perp} \mathbf{i}^{\perp} + \tilde{J}^{\parallel} \mathbf{i}^{\parallel}$ , де  $\mathbf{i}^{\perp}$ ,  $\mathbf{i}^{\parallel}$  – одиничні орти проекції хвильового вектора  $\boldsymbol{\alpha}$  на площину  $XOY$ , причому

$$\mathbf{i}^{\parallel} = \mathbf{i}_x \frac{x_x}{x_r} + \mathbf{i}_y \frac{x_y}{x_r}, \quad \mathbf{i}^{\perp} = [\mathbf{i}^{\parallel} \times \mathbf{i}_z], \quad x_r^2 = x_x^2 + x_y^2.$$

Векторна діаграма напрямленості (ДН) решітки в узагальненій системі координат має вигляд

$$\mathbf{f}(s_1, s_2) = A \mathbf{I} \equiv \boldsymbol{\Psi}(s_1, s_2) \sum_{n=-M}^M I_n e^{ik(x_n s_1 + y_n s_2)} = \boldsymbol{\Psi}(s_1, s_2) f_{\Sigma}(s_1, s_2) \quad (2)$$

або

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(s_1, s_2) &= A^{\perp} \mathbf{I} \mathbf{i}^{\perp} + A^{\parallel} \mathbf{I} \mathbf{i}^{\parallel} \equiv \\ &\equiv [\boldsymbol{\Psi}^{\perp}(s_1, s_2) \mathbf{i}^{\perp} + \boldsymbol{\Psi}^{\parallel}(s_1, s_2) \mathbf{i}^{\parallel}] \cdot \sum_{n=-M}^M I_n e^{ik(x_n s_1 + y_n s_2)},\end{aligned}$$

де  $\boldsymbol{\Psi}(s_1, s_2) = \boldsymbol{\Psi}^{\perp}(s_1, s_2) \mathbf{i}^{\perp} + \boldsymbol{\Psi}^{\parallel}(s_1, s_2) \mathbf{i}^{\parallel}$  – векторна ДН випромінювача,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}^{\perp}(s_1, s_2) &= \\ &= \sqrt{\frac{15}{\pi} [1 - (s_1^2 + s_2^2)]} \cdot \frac{k \cdot \tilde{J}^{\perp}(s_1, s_2)}{\left\{ 1 - (s_1^2 + s_2^2) + [\varepsilon - (s_1^2 + s_2^2)] \operatorname{ctg}^2 \left[ kh \sqrt{\varepsilon - (s_1^2 + s_2^2)} \right] \right\}^{1/2}}, \\ \boldsymbol{\Psi}^{\parallel}(s_1, s_2) &= \\ &= \sqrt{\frac{15}{\pi} [1 - (s_1^2 + s_2^2)]} \cdot \frac{k \sqrt{\varepsilon - (s_1^2 + s_2^2)} \cdot \tilde{J}^{\parallel}(s_1, s_2)}{\left\{ \varepsilon - (s_1^2 + s_2^2) + \varepsilon^2 [1 - (s_1^2 + s_2^2)] \operatorname{ctg}^2 \left[ kh \sqrt{\varepsilon - (s_1^2 + s_2^2)} \right] \right\}^{1/2}},\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}\tilde{J}^{\perp}(s_1, s_2) &= \tilde{J}_x(s_1, s_2) \frac{s_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} - \tilde{J}_y(s_1, s_2) \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}, \\ \tilde{J}^{\parallel}(s_1, s_2) &= \tilde{J}_x(s_1, s_2) \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} + \tilde{J}_y(s_1, s_2) \frac{s_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}},\end{aligned}\quad (4)$$

$f_{\Sigma}(s_1, s_2) = \sum_{n=-M}^M I_n e^{ik(x_n s_1 + y_n s_2)}$  – множник решітки.

Якщо комплексні амплітуди струмів на випромінювачах  $I_n$ ,  $n = -M \div M$ , є відомими, то співвідношення (1)–(4) дозволяють обчислювати всі зовнішні

характеристики решітки, зокрема, такі, як форма діаграми напрямленості, рівень бокових пелюсток, коефіцієнт напрямленої дії, напрямок головного максимуму, потужність, що випромінюється у вільний простір, та ін.

Покладаючи  $\varepsilon > 0$  у виразах (3) і враховуючи, що  $\tilde{J}_x(s_1, s_2)$ ,  $\tilde{J}_y(s_1, s_2)$  є неперервними функціями своїх аргументів, переконуємось, що при  $s_1^2 + s_2^2 \leq 1$  функції  $\psi^\perp(s_1, s_2)$ ,  $\psi^\parallel(s_1, s_2)$  є неперервними. Звідси випливає їх інтегровність з квадратом. Формулу (2) будемо розглядати як результат дії лінійного оператора  $A$  з комплексного скінченновимірного простору  $\mathbf{C}^N$  у комплексний скінченновимірний простір векторнозначних неперервних функцій із базисом  $\{e^{ik(x_n s_1 + y_n s_2)} \psi(s_1, s_2)\}_{n=-M}^M$ . Очевидно, що оператор  $A$  є цілком неперервним [3], а множина його значень  $R(A)$  належить векторнозначному простору комплексних неперервних на компактi  $\bar{G} \subset \mathbb{R}^2$  функцій  $\mathbf{C}(\bar{G}) = C(\bar{G}) \oplus C(\bar{G})$ . У просторі  $\mathbf{C}(\bar{G})$  введемо середньоквадратичну метрику, яка породжується скалярним добутком

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) &= (f_1^\perp, f_2^\perp) + (f_1^\parallel, f_2^\parallel) = \\ &= \iint_{\bar{G}} \left[ f_1^\perp(s_1, s_2) \cdot \overline{f_2^\perp(s_1, s_2)} + f_1^\parallel(s_1, s_2) \cdot \overline{f_2^\parallel(s_1, s_2)} \right] ds_1 ds_2 \end{aligned}$$

та відповідною йому нормою

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C}(\bar{G})} = (\mathbf{f}, \mathbf{f}) = \left( \|f^\perp\|_{C(\bar{G})}^{(2)} + \|f^\parallel\|_{C(\bar{G})}^{(2)} \right)^{1/2},$$

і позначатимемо його надалі через  $\mathbf{C}(\bar{G})^{(2)} = C(\bar{G})^{(2)} \oplus C(\bar{G})^{(2)}$ .

Скалярний добуток і норму у просторі  $H_I = \mathbf{C}^N$  вводимо так:

$$(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)_{H_I} = \sum_{n=-M}^M I_n^{(1)} \overline{I_n^{(2)}}, \quad \|\mathbf{I}\|_{H_I} = \left( \sum_{n=-M}^M |I_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Зазначимо, що амплітудно-фазовий розподіл струмів на випромінювачах  $\mathbf{I} = \{I_{-M}, I_{-M+1}, \dots, I_M\}$  однозначно зв'язаний з вектором сторонніх напруг на входах випромінювачів  $\mathbf{U} = \{U_{-M}, U_{-M+1}, \dots, U_M\} \in H_I$  матрицею взаємних опорів  $\mathbf{Z}$  таким співвідношенням [5]:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{I}) = \mathbf{U}. \quad (5)$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо залежність комплексних амплітуд струмів на випромінювачах від вхідних напруг:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{U}),$$

яка сумісно зі співвідношеннями (2)–(4) дозволяє обчислювати ДН решітки з урахуванням взаємного впливу випромінювачів і розв'язувати задачі конструктивного синтезу.

Розглянемо задачу синтезу мікросмушкової антенної решітки з  $N = 2M + 1$  випромінювачів, покладаючи, що її елементи розміщені вздовж осі  $OY$ . Нехай необхідна амплітудна ДН  $\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = [(F^\perp(\mathbf{Q}))^2 + (F^\parallel(\mathbf{Q}))^2]^{1/2}$  задана своїми компонентами  $F^\perp(\mathbf{Q})$ ,  $F^\parallel(\mathbf{Q})$  – неперервними невід'ємними функціями з компактним носієм  $\bar{G} \subset \mathbb{R}^2$ , де  $\mathbf{Q} = (s_1, s_2)$ .

Задача синтезу полягає у мінімізації цільової функції [9]

$$\begin{aligned}\sigma_{F_\alpha}(\mathbf{I}) &= \left\| F^\perp(Q) - |A^\perp \mathbf{I}| \right\|_{C(\bar{G})}^{(2)} + \left\| F^\parallel(Q) - |A^\parallel \mathbf{I}| \right\|_{C(\bar{G})}^{(2)} + \alpha \|\mathbf{I}\|_{H_I}^2 \equiv \\ &\equiv \iint_{\bar{G}} \left\{ \left[ F^\perp(Q) - |f^\perp(Q)| \right]^2 + \left[ F^\parallel(Q) - |f^\parallel(Q)| \right]^2 \right\} dQ + \alpha \sum_{n=-M}^M |I_n|^2 \quad (6)\end{aligned}$$

на просторі  $H_I = \mathbf{C}^N$ . Рівняння Ейлера для функції  $\sigma_{F_\alpha}$  є системою нелінійних рівнянь відносно вектора  $\mathbf{I}$ :

$$\begin{aligned}\alpha I_n &= - \sum_{m=-M}^M I_m \iint_{\bar{G}} |\Psi(Q)|^2 e^{ik(P_m - P_n, Q)} dQ + \\ &+ \iint_{\bar{G}} \left[ F^\perp(Q) |\Psi^\perp(Q)| + F^\parallel(Q) |\Psi^\parallel(Q)| \right] e^{-ik(P_n, Q)} e^{i \arg \sum_{m=-M}^M I_m e^{ik(P_m, Q)}} dQ, \quad (7)\end{aligned}$$

де  $(P_m - P_n, Q) = (x_m - x_n) s_1 + (y_m - y_n) s_2$ ,  $n = -M \div M$ .

Оскільки оператор  $A$ , означений формулою (2), є цілком неперервним, то для функціонала (6) справджуються умови теореми 2 з [8], згідно з якою у просторі  $\mathbf{C}^N$  існує принаймні одна точка  $\mathbf{I}_*$ , на якій функціонал (6) набуває абсолютного мінімуму. Через те що система рівнянь (7) одержана з необхідної умови мінімуму функціонала, то вона має принаймні один розв'язок.

Для дослідження кількості та якісних характеристик існуючих розв'язків перейдемо від системи (7) до еквівалентного їй інтегрального рівняння. Подівавши на обидві сторони рівняння (7) оператором  $A$  та враховуючи, що множина нулів цього оператора складається тільки з нульового елемента, одержуємо нелінійне інтегральне рівняння відносно множника синтезованої ДН  $f_\Sigma(Q)$ :

$$\begin{aligned}\alpha f_\Sigma(Q) &= - \iint_{\bar{G}} |\Psi(Q')|^2 \mathcal{K}(Q, Q'; k) f_\Sigma(Q') dQ' + \\ &+ \iint_{\bar{G}} \left[ F^\perp(Q') |\Psi^\perp(Q')| + F^\parallel(Q') |\Psi^\parallel(Q')| \right] \mathcal{K}(Q, Q'; k) e^{i \arg f_\Sigma(Q')} dQ', \quad (8)\end{aligned}$$

де  $\mathcal{K}(Q, Q'; k) = \sum_{m=-M}^M e^{ik(P_m, Q - Q')}$ ,  $(P_m, Q - Q') = x_m(s_1 - s'_1) + y_m(s_2 - s'_2)$ . Покладемо, що  $\bar{G} = \{(s_1, s_2) : |s_1| \leq a_1 \leq 1, |s_2| \leq a_2 \leq 1\}$ , а решітка є еквідистантною з відстанню між випромінювачами  $d_y$  по осі  $OY$  та абсцисами випромінювачів  $x_n = 0$ ,  $n = -M \div M$ . Введемо параметр  $c = k d_y$ . У цьому випадку отримуємо формулу для визначення ядра  $\mathcal{K}(Q, Q'; k)$ :

$$\mathcal{K}_r(s, s'; c) = \sum_{n=-M}^M e^{icn(s-s')} \equiv \frac{\sin N \frac{c}{2} (s - s')}{\sin \frac{c}{2} (s - s')}. \quad (9)$$

Введемо позначення

$$p_1(s_2) = \int_{-a_1}^{a_1} |\Psi(s_1, s_2)|^2 ds_1, \quad (10)$$

$$p_2(s_2) = \int_{-a_1}^{a_1} \left[ F^\perp(s_1, s_2) |\Psi^\perp(s_1, s_2)| + F^\parallel(s_1, s_2) |\Psi^\parallel(s_1, s_2)| \right] ds_1. \quad (11)$$

З урахуванням формул (9)–(11) рівняння (8) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \alpha f_{\Sigma}(s_2) = & - \int_{-a_2}^{a_2} p_1(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) f_{\Sigma}(s'_2) ds'_2 + \\ & + \int_{-a_2}^{a_2} p_2(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) e^{i \arg f_{\Sigma}(s'_2)} ds'_2. \end{aligned} \quad (12)$$

За знайденими розв'язками цього рівняння оптимальний амплітудно-фазовий розподіл струмів у решітці обчислюємо за формулою

$$\begin{aligned} I_n = & - \frac{1}{\alpha} \iint_{\bar{G}} [|\psi^{\perp}(Q)|^2 + |\psi^{\parallel}(Q)|^2] f_{\Sigma}(Q) e^{-ik(P_n, Q)} dQ + \\ & + \frac{1}{\alpha} \iint_{\bar{G}} [F^{\perp}(Q) |\psi^{\perp}(Q)| + F^{\parallel}(Q) |\psi^{\parallel}(Q)|] e^{i(\arg f_{\Sigma}(Q) - k(P_n, Q))} dQ, \\ n = & -M \div M. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким чином, задачу синтезу лінійної МСАР зведено до знаходження розв'язків нелінійного інтегрального рівняння (12). Наведемо деякі властивості цих розв'язків, які нескладно перевірити:

- 1°. Якщо  $f_{\Sigma_*}(s_2)$  – розв'язок рівняння (12), то комплексно-спряжена функція  $\overline{f_{\Sigma_*}(s_2)}$  також є його розв'язком.
- 2°. Якщо  $f_{\Sigma_*}(s_2)$  – розв'язок рівняння (12), то  $e^{i\beta} \overline{f_{\Sigma_*}(s_2)}$ , де  $\beta$  – довільна дійсна стала, – також його розв'язок, тобто існує однопараметрична сім'я розв'язків.
- 3°. Якщо функції  $F^{\perp}$ ,  $F^{\parallel}$ ,  $|\psi^{\perp}|$ ,  $|\psi^{\parallel}|$  задовольняють умови

$$F^{\perp}(-s_1, s_2) = F^{\perp}(s_1, s_2), \quad F^{\parallel}(-s_1, s_2) = F^{\parallel}(s_1, s_2), \quad (14)$$

$$|\psi^{\perp}(-s_1, s_2)| = |\psi^{\perp}(s_1, s_2)|, \quad |\psi^{\parallel}(-s_1, s_2)| = |\psi^{\parallel}(s_1, s_2)|, \quad (15)$$

то  $p_1(s_2)$  і  $p_2(s_2)$  – парні функції, а інтегральні оператори у правій частині (12) є інваріантними відносно типу парності функції  $\arg f_{\Sigma}(s_2)$ .

Розглянемо рівняння (12) у просторі дійсних неперервних функцій  $C[-a_2, a_2]$ :

$$\begin{aligned} \alpha f_{\Sigma}(s_2) = & - \int_{-a_2}^{a_2} p_1(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) f_{\Sigma}(s'_2) ds'_2 + \\ & + \int_{-a_2}^{a_2} p_2(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) \operatorname{sgn} f_{\Sigma}(s'_2) ds'_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Виконавши у (16) заміну

$$\sqrt{p_1(s_2)} f_{\Sigma}(s_2) = \tilde{f}_{\Sigma}(s_2), \quad (17)$$

одержуємо рівняння

$$\begin{aligned} \alpha \tilde{f}_\Sigma(s_2) + \int_{-a_2}^{a_2} \tilde{\mathcal{K}}(s_2, s'_2; c) \tilde{f}_\Sigma(s'_2) ds'_2 &= \\ &= \int_{-a_2}^{a_2} \sqrt{p_1(s_2)} p_2(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) \operatorname{sgn} \tilde{f}_\Sigma(s'_2) ds'_2, \end{aligned} \quad (18)$$

де  $\tilde{\mathcal{K}}(s_2, s'_2; c) = \sqrt{p_1(s_2)p_1(s'_2)} \cdot \frac{\sin N \frac{c}{2}(s_2 - s'_2)}{\sin \frac{c}{2}(s_2 - s'_2)}$  – дійсне симетричне ядро.

Зазначимо, що лінійний оператор у рівнянні (18)

$$A_1 \tilde{f}_\Sigma = \int_{-a_2}^{a_2} \tilde{\mathcal{K}}(s_2, s'_2; c) \tilde{f}_\Sigma(s'_2) ds'_2$$

є додатним, оскільки є додатною для довільного  $f \neq 0$  його квадратична форма:

$$\begin{aligned} (A_1 f, f) &= \int_{-a_2}^{a_2} \int_{-a_2}^{a_2} \tilde{\mathcal{K}}(s_2, s'_2; c) \overline{f(s_2)} f(s'_2) ds'_2 ds_2 = \\ &= \int_{-a_2}^{a_2} \int_{-a_2}^{a_2} \sqrt{p_1(s_2)p_1(s'_2)} \cdot \frac{\sin N \frac{c}{2}(s_2 - s'_2)}{\sin \frac{c}{2}(s_2 - s'_2)} \overline{f(s_2)} f(s'_2) ds'_2 ds_2 = \\ &= \sum_{n=-M}^M \left| \int_{-a_2}^{a_2} \sqrt{p_1(s_2)} e^{icns_2} \overline{f(s_2)} ds_2 \right|^2 > 0. \end{aligned}$$

Згідно з означенням додатного оператора [2, 4] оператор  $A_1$  є інваріантним відносно конуса невід'ємних функцій у просторі  $C[-a_2, a_2]$ . Звідси випливає можливість існування невід'ємного розв'язку рівняння (18). Дійсно, покладаючи у (18)  $\operatorname{sgn} \tilde{f}_\Sigma(s'_2) \equiv 1$ , одержуємо лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\alpha \tilde{f}_\Sigma(s_2) + \int_{-a_2}^{a_2} \tilde{\mathcal{K}}(s_2, s'_2; c) \tilde{f}_\Sigma(s'_2) ds'_2 = \sqrt{p_1(s_2)} \int_{-a_2}^{a_2} p_2(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) ds'_2,$$

у якому відома функція  $S(s_2) = \sqrt{p_1(s_2)} \int_{-a_2}^{a_2} p_2(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) ds'_2$  є додатною.

Оскільки  $A_1$  – додатний інтегральний оператор із симетричним ядром  $\tilde{\mathcal{K}}$ , то всі його власні значення є дійсними й додатними. Внаслідок цього однорідне інтегральне рівняння

$$-\alpha \tilde{f}_\Sigma(s_2) = \int_{-a_2}^{a_2} \tilde{\mathcal{K}}(s_2, s'_2; c) \tilde{f}_\Sigma(s'_2) ds'_2$$

має лише тривіальний розв'язок через те, що параметр  $-\alpha < 0$  і не може співпадати ні з одним із власних значень оператора  $A_1$ . Таким чином, згідно з [2, 4] рівняння

$$\alpha \tilde{f}_\Sigma(s_2) + \int_{-a_2}^{a_2} \tilde{\mathcal{K}}(s_2, s'_2; c) \tilde{f}_\Sigma(s'_2) ds'_2 = S(s_2)$$

при довільному  $\alpha > 0$  має єдиний розв'язок у класі невід'ємних функцій, який надалі позначимо через  $\tilde{f}_{\Sigma_1}(s_2)$ . Оскільки ядро  $\tilde{K}(s_2, s'_2; c)$  – вироджене, то розв'язок  $\tilde{f}_{\Sigma_1}(s_2)$  знаходимо, зокрема, у вигляді лінійної комбінації послідовності функцій  $\{\sqrt{p_1(s_2)} e^{icns_2}\}_{n=-M}^M$ . Крім того, якщо виконуються умови (14), (15), то  $\tilde{f}_{\Sigma_1}(s_2)$  – парна функція.

Поряд із розв'язком  $\tilde{f}_{\Sigma_1}(s_2)$  нелінійне рівняння (18) має ще один дійсний розв'язок  $\tilde{f}_{\Sigma_2}(s_2)$ , який у деяких точках відрізка  $[-a_2, a_2]$  переходить через нуль. Якщо виконуються умови (14), (15), то  $s_2 = 0$  – точка переходу функції  $\tilde{f}_{\Sigma_2}(s_2)$  через нуль і  $\tilde{f}_{\Sigma_2}(s_2)$  – непарна функція.

Отже, згідно з (17) дійсними розв'язками нелінійного рівняння (12) у просторі  $C[-a_2, a_2]$  є функції

$$f_{\Sigma_1}(s_2) = \tilde{f}_{\Sigma_1}(s_2)/\sqrt{p_1(s_2)}, \quad f_{\Sigma_2}(s_2) = \tilde{f}_{\Sigma_2}(s_2)/\sqrt{p_1(s_2)},$$

які надалі називатимемо відповідно *первинними розв'язками першого й другого типів*.

**2. Про структуру розв'язків задачі синтезу.** Аналогічні, як у [1, 6, 7], дослідження показують, що для рівняння (12) є характерним галуження розв'язків залежно від параметра  $c = kd_y$ , який разом з числом  $M$  характеризує електричні розміри решітки. Зазначимо, що властивості відгалужених розв'язків залежать як від величини параметра  $c$ , так і від властивостей функцій  $F^\perp$ ,  $F^\parallel$ ,  $|\psi^\perp|$ ,  $|\psi^\parallel|$ . Використовуючи методу, розвинуту в роботах [6, 7], опис властивостей відгалужених розв'язків наведемо, опускаючи проміжні перетворення.

Розглянемо спочатку галуження первинного розв'язку першого типу  $f_{\Sigma_1}(s_2)$ . Покладаючи у рівнянні (12)  $f_{\Sigma}(s_2) = u(s_2) + iv(s_2)$ , перейдемо до еквівалентної йому системи:

$$\begin{aligned} \alpha u(s_2) &= - \int_{-a_2}^{a_2} p_1(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) u(s'_2) ds'_2 + \\ &\quad + \int_{-a_2}^{a_2} p_2(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) \frac{u(s'_2)}{\sqrt{u^2(s'_2) + v^2(s'_2)}} ds'_2, \\ \alpha v(s_2) &= - \int_{-a_2}^{a_2} p_1(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) v(s'_2) ds'_2 + \\ &\quad + \int_{-a_2}^{a_2} p_2(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) \frac{v(s'_2)_2}{\sqrt{u^2(s'_2) + v^2(s'_2)}} ds'_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Нехай

$$c = c_l + \mu, \quad u(s_2) = f_{\Sigma_1}(s_2, c_l) + w(s_2), \quad v(s_2) = 0 + \omega(s_2),$$

де  $c_l$  – точки можливого галуження;  $w(s_2), \omega(s_2)$  – шукані малі розв'язки, тобто  $\|w(s_2)\|_{C(\bar{G})} \rightarrow 0$ ,  $\|\omega(s_2)\|_{C(\bar{G})} \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Розкладаючи підінтегральні функції системи рівнянь (19) у рівномірно збіжні ряди за степенями  $w(s)$ ,  $\omega(s)$  і  $\mu$ , одержуємо систему двох нелінійних інтегральних рівнянь

для знаходження малих розв'язків  $w(s)$ ,  $\omega(s)$ :

$$\begin{aligned} \alpha w(s_2) = & - \int_{-a_2}^{a_2} p_1(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c_l) w(s'_2) ds'_2 + a(s_2, c_l) \mu + \\ & + \sum_{m+n+p \geq 2}^{\infty} \mu^p \int_{-a_2}^{a_2} A_{mnp}(s_2, s'_2; c_l) w^m(s'_2) \omega^n(s'_2) ds'_2, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \alpha \omega(s_2) = & \int_{-a_2}^{a_2} [p_2(s'_2) - p_1(s'_2) f_{\Sigma_1}(s'_2, c_l)] \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c_l) \frac{\omega(s'_2)}{f_{\Sigma_1}(s'_2, c_l)} ds'_2 + \\ & + \sum_{m+n+p \geq 2}^{\infty} \mu^p \int_{-a_2}^{a_2} B_{mnp}(s_2, s'_2; c_l) w^m(s'_2) \omega^n(s'_2) ds'_2, \end{aligned} \quad (21)$$

де  $a(s_2, c) = \int_{-a_2}^{a_2} A_{001}(s_2, s'_2; c) ds'_2$ . У рівняннях (20), (21) відмінними від тотожного нуля при  $m + n + p \leq 3$  є коефіцієнти:  $A_{001}$ ,  $A_{101}$ ,  $A_{020}$ ,  $A_{002}$ ,  $A_{120}$ ;

$B_{011}$ ,  $B_{110}$ ,  $B_{012}$ ,  $B_{210}$ ,  $B_{030}$ ,  $B_{111}$ . Необхідні з них для запису відгалужених розв'язків у першому наближенні мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} A_{001}(s_2, s'_2; c_l) = & [p_2(s'_2) - p_1(s'_2) f_{\Sigma_1}(s'_2, c_l)] \times \\ & \times \left\{ \frac{\frac{N(s_2 - s'_2)}{2} \cos \frac{Nc_l(s_2 - s'_2)}{2}}{\sin \frac{c_l(s_2 - s'_2)}{2}} - \frac{(s_2 - s'_2)}{2} \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c_l) \operatorname{ctg} \frac{c_l(s_2 - s'_2)}{2} \right\}, \end{aligned}$$

$$A_{020}(s_2, s'_2; c_l) = - \frac{1}{2} \frac{F(s')}{f_{\Sigma_1}^2(s'_2, c_l)} \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c_l);$$

$$B_{110}(s_2, s'_2; c_l) = - \frac{p_2(s'_2)}{f_{\Sigma_1}^2(s'_2, c_l)} \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c_l),$$

$$B_{011}(s_2, s'_2; c_l) = - A_{001}(s_2, s'_2; c_l) \frac{p_2(s'_2)}{f_{\Sigma_1}(s'_2, c_l)},$$

$$B_{030}(s_2, s'_2; c_l) = - \frac{F(s')}{2f_{\Sigma_1}^3(s'_2, c_l)} \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c_l).$$

Лінійна система рівнянь, одержана на основі системи (20), (21), має вигляд

$$\alpha w(s_2) = - \int_{-a_2}^{a_2} p_1(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c_l) w(s'_2) ds'_2, \quad (22)$$

$$\alpha \omega(s_2) = \int_{-a_2}^{a_2} [p_2(s'_2) - p_1(s'_2) f_{\Sigma_1}(s'_2, c_l)] \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c_l) \frac{\omega(s'_2)}{f_{\Sigma_1}(s'_2, c_l)} ds'_2. \quad (23)$$

Відмітимо, що рівняння цієї системи є незв'язаними стосовно невідомих функцій, а тому їх розв'язки можна знаходити для кожного з рівнянь окремо. Аналогічні, як у попередньому пункті, міркування показують, що при будь-якому  $\alpha > 0$  рівняння (22) має лише тривіальні розв'язки. Завдяки цьому знаходження точок галуження при фіксованому значенні параметра  $\alpha$  зводиться до знаходження таких значень параметра  $c_l$ , при яких існують відмінні від  $f_{\Sigma_1}(s_2, c_l)$  і від тотожного нуля розв'язки рівняння (23).



Знайдемо власні функції рівняння (23) у точках галуження першого типу  $c = c_1^{(l)}$ . Оскільки  $f_{\Sigma_1}(s_2, c)$  є розв'язком рівняння (12), то справджується тотожність

$$\alpha f_{\Sigma_1}(s_2, c) \equiv \int_{-a_2}^{a_2} [p_2(s'_2) - p_1(s'_2)f_{\Sigma_1}(s'_2, c)] \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) ds'_2. \quad (24)$$

Заміною  $h(s_2, c) = \omega(s_2)/f_{\Sigma_1}(s_2, c)$  перетворимо рівняння (23) до вигляду

$$\alpha h(s_2, c) f_{\Sigma_1}(s_2, c) = \int_{-a_2}^{a_2} [p_2(s'_2) - p_1(s'_2)f_{\Sigma_1}(s'_2, c)] \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) h(s'_2, c) ds'_2. \quad (25)$$

Використовуючи тотожність (24), на основі рівняння (25) одержуємо

$$\int_{-a_2}^{a_2} [p_2(s'_2) - p_1(s'_2)f_{\Sigma_1}(s'_2, c)] \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) (h(s_2, c) - h(s'_2, c)) ds'_2 = 0. \quad (26)$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що при довільному  $c$  рівняння (26) задовольняє функція

$$h_1(s_2, c) \equiv \text{const}. \quad (27)$$

Другою функцією, що задовольняє рівняння (26), є функція

$$h_2(s_2, c_1^{(l)}) = \text{tg} \frac{c_1^{(l)} s_2}{2} \cdot \left( 1 + \eta_1^{(l)} \text{tg} \frac{c_1^{(l)} s_2}{2} \right)^{-1}, \quad (28)$$

де  $\eta_1^{(l)}$  – параметр власної функції. Точки галуження  $c_1^{(l)}$  і параметри  $\eta_1^{(l)}$   $l = 1, 2, \dots$ , отримуємо з системи трансцендентних рівнянь

$$\begin{aligned} \int_{-a_2}^{a_2} [p_2(s_2) - p_1(s_2)f_{\Sigma_1}(s_2, c)] \cdot \frac{\cos \frac{Ncs_2}{2}}{\cos \frac{cs_2}{2} + \eta_1 \sin \frac{cs_2}{2}} ds_2 &= 0, \\ \int_{-a_2}^{a_2} [p_2(s_2) - p_1(s_2)f_{\Sigma_1}(s_2, c)] \cdot \frac{\sin \frac{Ncs_2}{2}}{\cos \frac{cs_2}{2} + \eta_1 \sin \frac{cs_2}{2}} ds_2 &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Отже, на підставі рівностей (27), (28) ортонормованими власними функціями рівняння (23) у точках  $c_1^{(l)}$  є функції

$$\varphi_1(s_2, c_1^{(l)}) = \frac{f_{\Sigma_1}(s_2, c_1^{(l)})}{d_1^{(l)}}, \quad \varphi_2(s_2, c_1^{(l)}) = \frac{f_{\Sigma_1}(s_2, c_1^{(l)})}{d_2^{(l)}} \cdot \left( \frac{\text{tg} \frac{c_1^{(l)} s_2}{2}}{1 + \eta_1^{(l)} \text{tg} \frac{c_1^{(l)} s_2}{2}} + \gamma_1^{(l)} \right), \quad (30)$$

де  $d_1^{(l)}$ ,  $d_2^{(l)}$ ,  $\gamma_1^{(l)}$  – константи ортогоналізації.

Якщо  $F^\perp(s_1, s_2)$ ,  $F^\parallel(s_1, s_2)$  є парними за  $s_2$  функціями, то  $\eta_1^{(l)} = 0$ , а система (29) зводиться до одного рівняння

$$\int_{-a_2}^{a_2} [p_2(s_2) - p_1(s_2)f_{\Sigma_1}(s_2, c)] \cdot \frac{\cos \frac{Ncs_2}{2}}{\cos \frac{cs_2}{2}} ds_2 = 0.$$

Ортонормованими власними функціями спряженого з (23) рівняння

$$\alpha \psi(s_2, c) = \frac{p_2(s_2) - p_1(s_2) f_{\Sigma_1}(s_2, c)}{f_{\Sigma_1}(s_2, c)} \int_{-a_2}^{a_2} \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) \psi(s'_2, c) ds'_2$$

у точках  $c_1^{(l)}$  є функції

$$\begin{aligned} \psi_1(s_2, c_1^{(l)}) &= \frac{p_2(s_2) - p_1(s_2) f_{\Sigma_1}(s_2, c_1^{(l)})}{\bar{d}_1}, \\ \psi_2(s_2, c_1^{(l)}) &= \frac{p_2(s_2) - p_1(s_2) f_{\Sigma_1}(s_2, c_1^{(l)})}{\bar{d}_2^{(l)}} \cdot \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{c_1^{(l)} s_2}{2}}{1 + \eta_1^{(l)} \operatorname{tg} \frac{c_1^{(l)} s_2}{2}} + \bar{\gamma}_1^{(l)} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Виконуючи над системою нелінійних рівнянь (20), (21) аналогічні, як у [6, 7], перетворення з використанням функцій (30), (31), одержуємо (у першому наближенні) вирази для відгалужених у точках  $c_1^{(l)}$  розв'язків рівняння (12) у вигляді

$$\begin{aligned} f_{\Sigma_{1,2}}^{(l)}(s_2, c) &= f_{\Sigma_1}(s_2, c_1^{(l)}) + [\alpha_{001}(s_2, c_1^{(l)}) + \alpha_{020}(s_2, c_1^{(l)}) h_1^2] \mu \pm \\ &\pm i \frac{f_{\Sigma_1}(s_2, c_1^{(l)})}{d_1} \cdot \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{c_1^{(l)} s_2}{2}}{1 + \eta_1^{(l)} \operatorname{tg} \frac{c_1^{(l)} s_2}{2}} + \gamma_1 \right) h_1 \mu^{1/2} + O(\mu^{3/2}), \end{aligned} \quad (32)$$

де

$$\alpha_{001}(s_2, c_1^{(l)}) = a(s_2, c_1^{(l)}) + \int_{-a_2}^{a_2} R^{(1)}(s_2, \tau; c_1^{(l)}) a(\tau, c_1^{(l)}) d\tau,$$

$$\alpha_{020}(s_2, c_1^{(l)}) = \int_{-a_2}^{a_2} g_{020}^{(1)}(s_2, s'_2; c_1^{(l)}) \varphi_2^2(s'_2, c_1^{(l)}) ds'_2,$$

$$g_{020}^{(1)}(s_2, s'_2; c_1^{(l)}) = A_{020}(s_2, s'_2; c_1^{(l)}) + \int_{-a_2}^{a_2} R^{(1)}(s_2, \tau; c_1^{(l)}) A_{020}(s_2, \tau; c_1^{(l)}) d\tau,$$

$R^{(1)}(s_2, s'_2; c_1^{(l)})$  – резольвента Фредгольма ядра  $\frac{1}{(-\alpha)} \mathcal{K}(s_2, s'_2; c_1^{(l)}) p_1(s'_2)$ . Ко-ефіцієнт  $h_1$  визначаємо з відповідного рівняння розгалуження [6].

Для парних за  $s_2$  функцій  $F^\perp(s_1, s_2)$ ,  $F^\parallel(s_1, s_2)$  первинний розв'язок  $f_{\Sigma_1}(s_2, c)$  має також точки галуження другого типу  $c = c_2^{(l)}$ . Причому кратність одиничного власного значення рівняння (23) у цих точках дорівнює трьом, а ортонормовані власні функції визначаються формулами

$$\varphi_1(s_2, c_2^{(l)}) = \frac{f_{\Sigma_1}(s_2, c_2^{(l)})}{b_1}, \quad \varphi_2(s_2, c_2^{(l)}) = \frac{f_{\Sigma_1}(s_2, c_2^{(l)})}{b_2} \cdot \left( \frac{1}{1 + \eta_2^{(l)} \operatorname{tg}^2 \frac{c_2^{(l)} s_2}{2}} + \gamma_2 \right),$$

$$\varphi_3(s_2, c_2^{(l)}) = \frac{f_{\Sigma_1}(s_2, c_2^{(l)})}{b_3} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{c_2^{(l)} s_2}{2}}{1 + \eta_2^{(l)} \operatorname{tg}^2 \frac{c_2^{(l)} s_2}{2}},$$

де  $b_1, b_2, b_3, \gamma_2$  – константи ортогоналізації, залежні від індексу  $l$ .

Ортонормованими власними функціями спряженого з (23) рівняння у точках  $c_2^{(l)}$  є:

$$\begin{aligned}\psi_1(s_2, c_2^{(l)}) &= \frac{p_2(s_2) - p_1(s_2)f_{\Sigma_1}(s_2, c_2^{(l)})}{\bar{d}_1^{(l)}}, \\ \psi_2(s_2, c_2^{(l)}) &= \frac{p_2(s_2) - p_1(s_2)f_{\Sigma_1}(s_2, c_2^{(l)})}{\bar{d}_2^{(l)}} \cdot \left( \frac{1}{1 + \eta_2^{(l)} \operatorname{tg}^2 \frac{c_2^{(l)} s_2}{2}} + \bar{\gamma}_2^{(l)} \right), \\ \psi_3(s_2, c_2^{(l)}) &= \frac{p_2(s_2) - p_1(s_2)f_{\Sigma_1}(s_2, c_2^{(l)})}{\bar{d}_2^{(l)}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{c_2^{(l)} s_2}{2}}{1 + \eta_2^{(l)} \operatorname{tg}^2 \frac{c_2^{(l)} s_2}{2}},\end{aligned}$$

де  $\bar{d}_1^{(l)}$ ,  $\bar{d}_2^{(l)}$ ,  $\bar{d}_3^{(l)}$ ,  $\bar{\gamma}_2^{(l)}$  – константи ортогоналізації. Точки галуження  $c_2^{(l)}$  і параметри власних функцій  $\eta_2^{(l)}$  визначаються із системи трансцендентних рівнянь

$$\begin{aligned}\int_{-a_2}^{a_2} [p_2(s_2) - p_1(s_2)f_{\Sigma_1}(s_2, c)] \cdot \frac{\cos \frac{Ncs_2}{2} \cdot \cos \frac{cs_2}{2}}{\cos^2 \frac{cs_2}{2} + \eta_2 \sin^2 \frac{cs_2}{2}} ds_2 &= 0, \\ \int_{-a_2}^{a_2} [p_2(s_2) - p_1(s_2)f_{\Sigma_1}(s_2, c)] \cdot \frac{\sin \frac{Ncs_2}{2} \sin \frac{cs_2}{2}}{\cos^2 \frac{cs_2}{2} + \eta_2 \sin^2 \frac{cs_2}{2}} ds_2 &= 0.\end{aligned}$$

Зазначимо, що власні функції  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  та  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  є парними, функції  $\phi_3$  та  $\psi_3$  – непарними. На підставі цього, враховуючи властивість  $\mathfrak{Z}^\circ$  про збереження типу парності функцій операторами правої частини системи рівнянь (19), дослідження галуження розв'язків цієї системи проводимо окремо в класах парних і непарних функцій.

Зокрема, у класі парних функцій має місце двовимірний випадок галуження, дослідження якого проводяться аналогічно, як у [6, 7], з використанням власних функцій  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  та  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ . Відгалужені в точках  $c_2^{(l)}$  у класі парних функцій розв'язки в першому наближенні мають вигляд

$$\begin{aligned}f_{\Sigma_{1,2}}^{(2)}(s_2, c) &= f_{\Sigma_1}(s_2, c_2^{(l)}) + [\alpha_{001}(s_2, c_2^{(l)}) + \alpha_{020}(s_2, c_2^{(l)})h_2^2] \mu \pm \\ &\pm i \frac{f_{\Sigma_1}(s_2, c_2^{(l)})}{\bar{d}_2^{(l)}} \cdot \left( \frac{1}{1 + \eta_2^{(l)} \operatorname{tg}^2 \frac{c_2^{(l)} s_2}{2}} + \gamma_2 \right) h_2 \mu^{1/2} + O(\mu^{3/2}).\end{aligned}\quad (33)$$

Функції  $\alpha_{001}(s_2, c_2^{(l)})$ ,  $\alpha_{020}(s_2, c_2^{(l)})$  і коефіцієнт  $h_2$  визначаємо аналогічно, як у [6].

У класі непарних фазових ДН має місце одновимірний випадок галуження, а відгалужені у точках  $c_2^{(l)}$  розв'язки у першому наближенні мають вигляд

$$\begin{aligned}
f_{\Sigma_{1,2}}^{(3)}(s_2, c) &= f_{\Sigma_1}(s_2, c_2^{(l)}) + [\alpha_{01}(s_2, c_2^{(l)}) + \alpha_{20}(s_2, c_2^{(l)}) h_3^2] \mu \pm \\
&\pm i \frac{f_{\Sigma_1}(s_2, c_2^{(l)})}{d_3^{(l)}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{c_2^{(l)} s_2}{2}}{1 + \eta_2^{(l)} \operatorname{tg}^2 \frac{c_2^{(l)} s_2}{2}} h_3 \mu^{1/2} + O(\mu^{3/2}). \quad (34)
\end{aligned}$$

Функції  $\alpha_{01}(s_2, c_2^{(l)})$ ,  $\alpha_{20}(s_2, c_2^{(l)})$  і коефіцієнт  $h_3$  отримуємо в результаті перетворень, аналогічних, як у [6].

Відмітимо, що відповідні розв'язки (32), (34) з непарною фазовою ДН амплітудно-фазові розподіли струмів у решітці є дійсними, але несиметричними відносно центрального випромінювача. Водночас створювана на їх основі амплітудна ДН є симетричною\*.

Зауважимо, що відгалужені розв'язки також можуть розгалужуватись. Запишемо систему лінійних рівнянь для знаходження точок можливого галуження відгалужених розв'язків. Для цього в системі рівнянь (19) покладемо

$$c = \tilde{c}_l + \mu, \quad u(s) = u_{\Sigma_1}(s, \tilde{c}_l) + x(s), \quad v(s) = v_{\Sigma_1}(s, \tilde{c}_l) + y(s),$$

де  $f_{\Sigma_1}(s, \tilde{c}_l) = u_{\Sigma_1}(s, \tilde{c}_l) + i v_{\Sigma_1}(s, \tilde{c}_l)$ . Розкладаючи підінтегральні функції  $Q_1$ ,  $Q_2$  у рівномірно збіжні степеневі ряди за  $\mu$ ,  $x$ ,  $y$  і виділяючи в розкладах лінійні члени, отримуємо систему лінійних однорідних інтегральних рівнянь для знаходження точок можливого галуження:

$$\begin{aligned}
\alpha x(s_2) &= \int_{-a_2}^{a_2} \left[ \frac{p_2(s'_2) v_{\Sigma_1}^2(s'_2)}{|f_{\Sigma_1}(s'_2, c)|^3} - p_1(s'_2) \right] \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) x(s'_2) ds'_2 - \\
&- \int_{-a_2}^{a_2} p_2(s'_2) \frac{u_{\Sigma_1}(s'_2, c) v_{\Sigma_1}(s'_2, c)}{|f_{\Sigma_1}(s'_2, c)|^3} \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) y(s'_2) ds'_2, \\
\alpha y(s_2) &= - \int_{-a_2}^{a_2} p_2(s'_2) \frac{u_{\Sigma_1}(s'_2, c) v_{\Sigma_1}(s'_2, c)}{|f_{\Sigma_1}(s'_2, c)|^3} \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) x(s'_2) ds'_2 + \\
&+ \int_{-a_2}^{a_2} \left[ \frac{p_2(s'_2) u_{\Sigma_1}^2(s'_2)}{|f_{\Sigma_1}(s'_2, c)|^3} - p_1(s'_2) \right] \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) y(s'_2) ds'_2. \quad (35)
\end{aligned}$$

Точками можливого галуження можуть бути такі значення параметра  $c = \tilde{c}_l$ , за яких одиниця є власним значенням системи (35).

Зауважимо, що система (35) має загальний характер. Зокрема, якщо в ній покласти  $v_{\Sigma_1}(s, c) \equiv 0$ , то одержимо систему рівнянь (22), (23).

Зазначимо, що подані вище аналітичні дослідження і результати чисельних експериментів дають можливість описати загальну структуру розв'язків задачі залежно від параметра  $c$ . Для більшої наочності цю структуру можна зобразити схематично у вигляді «дерева» розв'язків, яке для випадку парних ДН наведено на рис. 2. Центральним є первинний розв'язок  $f_{\Sigma_1}(s, c)$ . Першим відгалужується розв'язок  $f_{\Sigma_{1,2}}^{(1)}(s, c)$  з непарною фазовою

\* Дослідження галужень первинного розв'язку другого типу  $f_{\Sigma_2}(s_2, c)$  для заданих функцій  $F^\perp(s_1, s_2)$ ,  $F^\parallel(s_1, s_2)$ , що задовольняють умови  $F^\perp(s_1, 0) \equiv 0$ ,  $F^\parallel(s_1, 0) \equiv 0$ , проводимо аналогічно, як у [9], припускаючи, що функція  $1/f_{\Sigma_2}(s_2, c)$  має особливості першого порядку.

ДН. У точці  $\tilde{c}_1^{(1)}$  від  $f_{\Sigma_{1,2}}^{(1)}(s, c)$  відгалужується розв'язок  $\tilde{f}_{\Sigma_{1,2}}^{(1)}(s, c)$ , а сам розв'язок  $f_{\Sigma_{1,2}}^{(1)}(s, c)$  (в околі точки  $c_2^{(1)}$ ) при  $c$ , прямуючому до  $c_2$ , перетворюється у дійсний розв'язок  $f_{\Sigma_1}(s, c)$ . У цій же точці від первинного розв'язку  $f_{\Sigma_1}(s, c)$  відгалужується розв'язок з парною фазовою ДН  $f_{\Sigma_{1,2}}^{(2)}(s, c)$ . У точці  $c_1^{(2)}$ , яка розміщена безпосередньо за  $c_2^{(1)}$ , відгалужується розв'язок типу  $f_{\Sigma_{1,2}}^{(1)}(s, c)$  з непарною фазовою ДН.

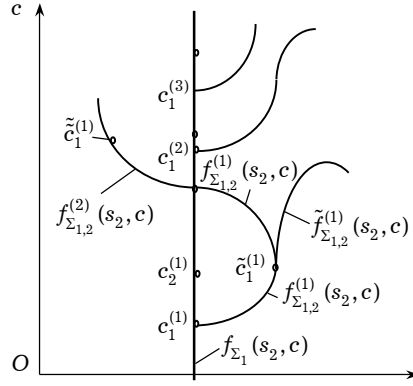


Рис. 2

Розв'язки типу  $f_{\Sigma_{1,2}}^{(1)}(s, c)$  і  $f_{\Sigma_{1,2}}^{(2)}(s, c)$

утворюють основні гілки «дерева» розв'язків. На цих гілках показано точки можливого галуження відгалужених розв'язків.

**3. Числовий приклад синтезу МСАР.** Розглянемо приклад синтезу МСАР, яка складається з 11 прямокутних випромінювачів довжини  $\ell = 0.0089$  м і ширини  $d = 0.0107$  м, які розміщені еквідистантно вздовж осі ОУ з відстанню  $d_y = 0.012$  м. Висота підкладки  $h = 0.00162$  м, а її відносна діелектрична проникність  $\varepsilon = 2.2$ . Випромінювачі збуджуються на основній моді, причому поверхневий струм має лише  $x$ -ву складову, яка в локальній системі координат визначається функцією

$$\mathbf{J}(x', y') = \mathbf{i}_x \frac{I}{d} \sin \frac{\pi x'}{\ell}, \quad 0 < x' < \ell, \quad -\frac{d}{2} \leq y' \leq \frac{d}{2}.$$

Задана амплітудна ДН має вигляд

$$F^\perp(s_1, s_2) = F^\parallel(s_1, s_2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} |\sin(2\pi s_2)|, & s_2 \in [-0.5, 0.5], \\ 0, & |s_2| > 0.5. \end{cases}$$

Повні розв'язки рівняння (12) знаходимо, використовуючи ітераційний процес, побудований за неявною схемою для системи (19):

$$\begin{aligned} \alpha u_\Sigma^{(n+1)}(s_2) + \int_{-a_2}^{a_2} p_1(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) u_\Sigma^{(n+1)}(s'_2) ds'_2 = \\ = \int_{-a_2}^{a_2} p_2(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) \frac{u_\Sigma^{(n)}(s'_2)}{\sqrt{(u_\Sigma^{(n)}(s'_2))^2 + (v_\Sigma^{(n)}(s'_2))^2}} ds'_2, \\ \alpha v_\Sigma^{(n+1)}(s_2) + \int_{-a_2}^{a_2} p_1(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) v_\Sigma^{(n+1)}(s'_2) ds'_2 = \\ = \int_{-a_2}^{a_2} p_2(s'_2) \mathcal{K}_r(s_2, s'_2; c) \frac{v_\Sigma^{(n)}(s'_2)}{\sqrt{(u_\Sigma^{(n)}(s'_2))^2 + (v_\Sigma^{(n)}(s'_2))^2}} ds'_2. \end{aligned}$$

де  $n$  – номер ітерації. При виборі початкового наближення використовуємо знайдені розв'язки у першому наближенні або властивості розв'язків  $1^\circ$ – $3^\circ$ , наведені вище.

На рис. 3 зображено просторову амплітудну ДН  $|f(s_1, s_2)|$ , що відповідає двом різним типам розв'язків системи (19), які з графічною точністю співпадають за амплітудою,

Два різні за структурою амплітудні розподіли струмів у решітці, обчислені на підставі формули (13), подано на рис. 4. При цьому розподіл 1 є комплексним і симетричним відносно центра решітки. Йому відповідає розв'язок системи рівнянь (19) з парною за  $s_2$  фазовою ДН. Розподіл 2 є дійсним, але несиметричним відносно центра решітки. Йому відповідає розв'язок системи (19) з непарною за  $s_2$  фазовою ДН. Вхідні напруги на випромінювачах, обчислені на підставі співвідношення (8) і методики [5], наведено на рис. 5.

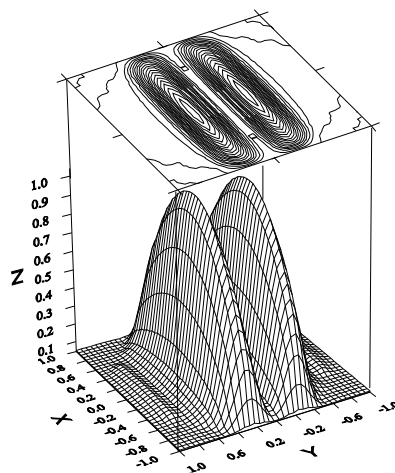


Рис. 3

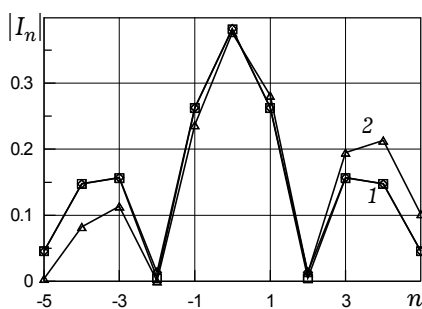


Рис. 4

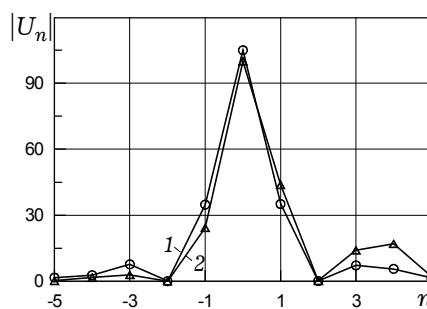


Рис. 5

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвлений решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 527 с.
2. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
5. Просвирнин С. Л., Нечаев Ю. Б., Селезнев Д. Г. и др. Расчет прямоугольных микрополосковых антенн в приближении заданного распределения поверхностного тока. – Харьков, 1992. – 57 с. – (Препр. / АН Украины. Радиоастроном. ин-т; № 92-60).
6. Савенко П. А. Ветвление решений задач синтеза антенн по заданной амплитудной диаграмме направленности при использовании регуляризирующих функционалов // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1996. – **39**, № 2. – С. 35–50.
7. Савенко П. А. Численное решение одного класса нелинейных задач теории синтеза излучающих систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2000. – **40**, № 6. – С. 929–939.
8. Савенко П. А., Паснак Л. М. Численно-аналитический метод синтеза линейных решеток вибраторов по заданной амплитудной диаграмме направленности // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1997. – **40**, № 12. – С. 11–25.
9. Савенко П. А., Ткач М. Д. Численное решение нелинейной задачи синтеза микрополосковой антенной решетки с учетом взаимного влияния излучателей // Радиотехника и электроника. – 2001. – **46**, № 1. – С. 58–65.
10. Чаплин А. Ф. Анализ и синтез антенных решеток. – Львов: Вища шк., 1987. – 179 с.
11. Pozar D. M. Input impedance and mutual coupling of rectangular microstrip antennas // IEEE Trans. Antennas and Propag. – 1982. – **AP-30**, No. 6. – P. 1191–1196.

## СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА МИКРОПОЛОСКОВОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ ПО ЗАДАННОЙ АМПЛИТУДНОЙ ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ

Исследована общая структура решений нелинейного интегрального уравнения, возникающего в задачах оптимального проектирования микрополосковых антенных решеток, в случае, когда в условиях задачи заданы требования лишь к амплитудной диаграмме направленности. Показано, что для задач этого класса характерным является ветвление решений, зависящее от величины физических параметров решетки и свойств заданной амплитудной диаграммы направленности. Получены уравнения для нахождения точек ветвления и аналитические представления решений в первом приближении. Это позволяет локализовать существующие решения, что значительно упрощает нахождение полных решений численными методами.

## STRUCTURE OF SOLUTION TO MICROSTRIP ANTENNA SYNTHESIS ACCORDING TO GIVEN AMPLITUDE DIRECTIVITY PATTERN

General structure of solutions to nonlinear integral equation, arising in problems of optimal designing the microstrip antenna arrays, is studied in the case, when under conditions of the problem the demands are set only to the amplitude directivity pattern. It is shown that for this class of problems the branching of solutions, depending on the value of antenna physical parameters and properties of the given amplitude directivity pattern, is characteristic. The equations to determine the branching points and analytic image of solutions in the first approximation are obtained. It allows one to localize the existing solutions. This simplifies essentially the determination of complete solutions by numerical methods.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
16.10.02