УДК 539.3

З. Н. Даноян

ПЛОСКИЕ МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

На основе комплексных решений Смирнова – Соболева исследуется поведение плоских магнитоупругих волн в идеально проводящих анизотропных средах с четырьмя упругими постоянными. Приведена классификация волн на быстрые и медленные или на квазипродольные и квазипоперечные в зависимости от физико-механических свойств среды и от величины и ориентации внешнего магнитного поля. Изучается изменение фазовых скоростей в зависимости от указанных параметров. Для анизотропных сред этот вопрос рассмотрен в [4–6], *для магнитоупругих волн – в* [1–3].

1. Рассмотрим идеально проводящую анизотропную среду, уравнения движения которой в случае плоской деформации содержат четыре упругих постоянных. В случае плоской деформации в магнитном поле, характеризуемом вектором напряженности $\mathbf{H}_0$, имеем следующую систему уравнений [1, 3]:

$$a_m u_{xx} + c_m v_{xy} + d_m u_{yy} = u_{tt},$$

$$e_m v_{xx} + c_m u_{xy} + b_m v_{yy} = v_{tt}, \tag{1}$$

где u и v – компоненты вектора упругого перемещения $\mathbf{u} = \{u, v, 0\}$; x, y, z – декартовые координаты; t – время; координатные оси направлены по главным направлениям упругости среды; коэффициенты a_m, b_m, c_m, d_m, e_m определяются по формулам:

$$a_1 = a_0, \quad b_1 = b_0 + \chi, \quad d_1 = d_0, \quad e_1 = d_0 + \chi, \quad c_1 = c_0,$$

$$a_2 = a_0 + \chi, \quad b_2 = b_0, \quad d_2 = d_0 + \chi, \quad e_2 = d_0, \quad c_2 = c_0,$$

$$a_3 = a_0 + \chi, \quad b_3 = b_0 + \chi, \quad d_3 = d_0, \quad e_3 = d_0, \quad c_3 = c_0 + \chi,$$

$$a_0 = c_{11} / c_0, \quad b_0 = c_{22} / c_0, \quad d_0 = c_{66} / c_0, \quad c_0 = (c_{12} + c_{66}) / c_0,$$

$$\chi = H_0^2 / 4\pi\rho_0,$$

c_{ik} – упругие постоянные; ρ_0 – плотность среды; χ – величина, характеризующая интенсивность внешнего магнитного поля, называемая скоростью Альфвена. Значениям $m = 0, 1, 2, 3$ соответствуют случаи следующих направлений магнитного поля $\mathbf{H}_0$: $\mathbf{H}_0 = 0$ (отсутствие поля), $\mathbf{H}_0 = H_0 \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{H}_0 = H_0 \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{H}_0 = H_0 \cdot \mathbf{k}$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – координатные орты.

2. Решения системы (1), представляющие собой плоские волны, имеют вид [7]

$$u_k = f_k(\Omega_k), \qquad v_k = g_k(\Omega_k), \tag{2}$$

$$\Omega_k = t - \theta x \pm \lambda_k y, \qquad k = 1, 2, \tag{3}$$

где λ_k – корни характеристического уравнения системы (1)

$$b_m d_m \lambda^4 - P_m(\theta)\lambda^2 + r_m(\theta) = 0. \tag{4}$$

Здесь

$$P_m = b_m + d_m - l_m\theta^2, \qquad r_m = (a_m\theta^2 - 1)(e_m\theta^2 - 1).$$

Решения характеристического уравнения (4) представим в виде

$$\lambda_k(\theta) = \sqrt{\frac{P_m(\theta) + (-1)^k \sqrt{q_m(\theta)}}{2b_m d_m}}, \quad k = 1, 2, \quad \lambda_3 = -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_2. \quad (5)$$

Здесь

$$q_m = P_m^2 - 4b_m d_m r_m = D_m \theta^4 - 2M_m \theta^2 + B_m^2,$$

$$l_m = a_m b_m + d_m e_m - c_m^2,$$

$$M_m = (a_m b_m - d_m e_m) B_m - (b_m + d_m) c_m^2 =$$

$$= (b_m + d_m) N_m - (a_m d_m - b_m e_m) B_m,$$

$$A_m = a_m - e_m, \qquad B_m = b_m - d_m, \qquad N_m = A_m B_m - c_m^2.$$

Производные неизвестных u и v должны удовлетворять условиям

$$(a_m \theta^2 + d_m \lambda_k^2 - c_m \theta \lambda_k - 1) f_k'(\theta) +$$

$$+ (e_m \theta^2 + b_m \lambda_k^2 - c_m \theta \lambda_k - 1) g_k'(\theta) = 0. \quad (6)$$

С учетом (6) решения (2) принимают вид

$$u_k = (e_m \theta^2 + b_m \lambda_k^2 - c_m \theta \lambda_k - 1) W_k(\Omega_k),$$

$$v_k = -(a_m \theta^2 + d_m \lambda_k^2 - c_m \theta \lambda_k - 1) W_k(\Omega_k), \quad (7)$$

где W_k – ветви произвольной непрерывной дважды дифференцируемой функции W или аналитической функции, если в (3) λ_k принимает комплексные значения.

В дальнейшем будем рассматривать только однородные волны, когда λ_k вещественны.

Выбор знака «+» или «–» перед λ_k в решении (2) или (3) означает, что выбираем плоские волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. В соответствии с этим ясно, что выбором координатной системы относительно главных направлений упругости среды и внешнего магнитного поля, четыре волны, соответствующие гиперболической системе (1), разбиты на две пары, распространяющиеся в противоположных направлениях. Ввиду этого в дальнейшем будем рассматривать волны, соответствующие знаку плюс перед λ_k в (2).

3. Уравнения фронтов плоских волн имеют вид

$$\Omega_k = t - \theta x + \lambda_k y = C = \text{const}.$$

Фазовые скорости и направления распространения этих волн определяются по формулам [6]

$$\mathbf{V}_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{1}{|\operatorname{grad} \varphi_k|} \mathbf{n}_k, \qquad \mathbf{n}_k = \frac{\operatorname{grad} \varphi_k}{|\operatorname{grad} \varphi_k|}, \qquad \varphi_k = C - t + \theta x - \lambda_k y,$$

$$\mathbf{n}_k = \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + \lambda_k^2}} \mathbf{i} - \frac{\lambda_k}{\sqrt{\theta^2 + \lambda_k^2}} \mathbf{j}, \qquad \mathbf{V}_k = \frac{\theta}{\theta^2 + \lambda_k^2} \mathbf{i} - \frac{\lambda_k}{\theta^2 + \lambda_k^2} \mathbf{j},$$

$$V_k = \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + \lambda_k^2}}, \qquad \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{\theta}{\lambda_k(\theta)}, \quad (8)$$

где $\mathbf{n}_k$ – единичные векторы нормалей к фронтам волн; V_k – фазовые скорости волн; α_k – угол между отрицательной полуосью Oy и направлением $\mathbf{n}_k$ распространения волн.

Из (8) следует, что каждому значению параметра θ из промежутка $(-\infty, \infty)$, для которого величины $\lambda_k(\theta)$ вещественны, соответствуют плоские однородные волны, фазовые скорости V_k и направления $\mathbf{n}_k$ распространения которых определяются формулами (8).

Ввиду симметрии задачи будем рассматривать интервал $0 \le \theta < \infty$ и изучать поведение волн в зависимости от параметра θ при любых допустимых значениях параметров a_0, b_0, d_0, c_0 и χ, удовлетворяющих условиям [1, 3, 5]

$$A_0 = a_0 d_0 > 0, \quad B_0 = b_0 d_0 > 0, \quad d_0 > 0, \quad 0 < c_0 < c_E^{(0)}, \quad \chi > 0,$$

где $c_E^{(0)} = \sqrt{a_0 b_0} + d_0$.

Исследование этого вопроса связано с изучением свойств корней $\lambda_k(\theta)$ характеристического уравнения. Этот вопрос детально изучен в работе [3].

На основании результатов работы [3], не вдаваясь в подробности, приведем окончательные результаты.

1°. В случаях

$$\textbf{\textit{а}})\ K_m > 0, \quad S_m > 0, \qquad \textbf{\textit{б}})\ K_m < 0, \quad S_m < 0,$$

где

$$S_m = A_m d_m + c_m^2, \qquad K_m = A_m b_m - c_m^2,$$

один из корней уравнения $r_m(\theta) = 0$ является нулем функции $\lambda_1(\theta)$, а другой корень – функции $\lambda_2(\theta)$. В случае ***а***) $\lambda_1(\theta_{r_1}^{(m)}) = 0$, $\lambda_2(\theta_{r_2}^{(m)}) = 0$, в случае ***б***) корни меняются местами, при этом

$$\theta_{r_1}^{(m)} = 1/\sqrt{a_m}, \qquad \theta_{r_2}^{(m)} = 1/\sqrt{e_m}.$$

В этих случаях функции $\lambda_k(\theta)$ вещественны в интервалах $\left[0, \theta_{r_k}^{(m)}\right]$. Когда θ меняется в вышеуказанных интервалах, углы $\alpha_k(\theta)$, определяющие направления распространения волн, монотонно возрастают от 0 до $\pi/2$. Фазовые скорости волн удовлетворяют условию

$$V_1(\alpha) > V_2(\alpha), \qquad \alpha \in [0, \pi/2]. \tag{9}$$

Следовательно, в этих случаях волны (7) при $k = 1$ являются быстрыми, а при $k = 2$ – медленными, причем

в случае ***а***) имеем $\theta_{r_1}^{(m)} < \theta_{r_2}^{(m)}$ и

$$V_f = V_1(\theta), \qquad \theta \in \left[0, \theta_{r_1}^{(m)}\right],$$

$$V_s = V_2(\theta), \qquad \theta \in \left[0, \theta_{r_2}^{(m)}\right],$$

в случае ***б***) имеем $\theta_{r_2}^{(m)} < \theta_{r_1}^{(m)}$ и

$$V_f = V_1(\theta), \qquad \theta \in \left[0, \theta_{r_2}^{(m)}\right],$$

$$V_s = V_2(\theta), \qquad \theta \in \left[0, \theta_{r_1}^{(m)}\right]. \tag{10}$$

2°. В случае

$$K_m < 0, \qquad S_m > 0$$

оба корня уравнения $r_m(\theta) = 0$ являются нулями функции $\lambda_1(\theta)$, а $\lambda_2(\theta)$ нигде не обращается в нуль. Функция $\lambda_1(\theta)$ принимает вещественные значения в двух интервалах

$$\left[0, \theta_{r_1}^{(m)}\right], \qquad \left[\theta_{r_2}^{(m)}, \theta_{q_1}^{(m)}\right] \qquad \text{при} \qquad A_m > 0,$$

$$\left[0, \theta_{r_2}^{(m)}\right], \qquad \left[\theta_{r_1}^{(m)}, \theta_{q_1}^{(m)}\right] \qquad \text{при} \qquad A_1 < 0, \tag{11}$$

а функция $\lambda_2(\theta)$ – в одном интервале

$$\left[0, \theta_{q_1}^{(m)}\right], \tag{12}$$

причем $\lambda_1(\theta_{q_1}^{(m)}) = \lambda_2(\theta_{q_1}^{(m)}) = \lambda^*$, где $\theta_{q_1}^{(m)}$ – корень уравнения $q_m(\theta) = 0$.

Когда θ изменяется в первом интервале (11) (как при $A_m > 0$, так и при $A_1 < 0$), угол $\alpha_1(\theta)$ монотонно возрастет от 0 до $\pi/2$, а когда θ меняется во втором из интервалов (11), угол $\alpha_1(\theta)$ монотонно убывает от $\pi/2$ до $\alpha_1(\theta_{q_1}^{(m)}) = \alpha_1^*$. Когда параметр θ меняется в интервале (12), угол $\alpha_2(\theta)$ монотонно возрастает от 0 до $\alpha_2(\theta_{q_1}^{(m)}) = \alpha_2^* = \alpha_1^*$.

В этом случае

$$V_f(\alpha) > V_s(\alpha), \qquad \alpha \in [0, \pi/2], \tag{13}$$

где

$$V_f(\alpha) = V_1(\alpha(\theta)), \qquad \theta \in \left[0, \theta_{r_1}^{(m)}\right],$$

$$V_s(\alpha) = \begin{cases} V_2(\alpha_2(\theta)), & \theta \in \left[0, \theta_{q_1}^{(m)}\right], \\ V_1(\alpha_1(\theta)), & \theta \in \left[\theta_{r_2}^{(m)}, \theta_{q_1}^{(m)}\right]. \end{cases} \tag{14}$$

Следовательно, в этом случае волны (7) при $k = 1$ в интервале $0 \le \theta \le \theta_{r_1}^{(m)}$ являются быстрыми, а при $k = 2$ в интервале $0 \le \theta \le \theta_{q_1}^{(m)}$ и при $k = 1$ в интервале $\theta_{r_2}^{(m)} \le \theta \le \theta_{q_1}^{(m)}$ являются медленными, причем их направления распространения определяются следующим образом:

а) для быстрых волн

$$\alpha = \alpha_1(\theta), \qquad \theta \in \left[0, \theta_{r_1}^{(m)}\right],$$

б) для медленных волн

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_2(\theta), & \theta \in \left[0, \theta_{q_1}^{(m)}\right], \\ \alpha_1(\theta), & \theta \in \left[\theta_{r_2}^{(m)}, \theta_{q_1}^{(m)}\right]. \end{cases}$$

3°. Когда одна из величин K_m или S_m обращается в нуль, то имеем дело с переходным случаем между ***1°*** и ***2°***.

4°. Случай $A_1 = 0$ является особым. Тогда функции $\lambda_k(\theta)$ вещественны в интервале $\left[0, \theta_{q_1}^{(1)}\right]$, причем $\theta_{r_1}^{(1)} = \theta_{r_2}^{(1)}$ и в этой двойной точке $\lambda_1(\theta)$ обращается в нуль; функция же $\lambda_2(\theta)$ нигде не обращается в нуль. Это случай конической рефракции. В направлении магнитного поля $\mathbf{H}_0$ ($\mathbf{H}_0 \parallel Ox$) скорости волн совпадают, и имеется одна волна с любыми смещениями вида (2).

Таким образом, разделение плоских магнитоупругих волн на быстрые и медленные зависит от типа корней характеристического уравнения $\lambda_k(\theta)$, причем если корни $\lambda_k(\theta)$ относятся к первому типу, то разделение волн совершается согласно формулам (9) и (10), если же корни $\lambda_k(\theta)$ – второго типа, то разделение волн совершается на основе формул (13) и (14), причем типы корней $\lambda_k(\theta)$ определяются знаками величин K_m, S_m, A_m.

1. *Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н.* Уравнения движения в перемещениях идеально-проводящих упругих анизотропных сред при наличии магнитного поля // Механика. Межвуз. сб. науч. трудов. – Ереван, 1984. – Вып. 3. – С. 32–42.
2. *Даноян З. Н.* К методу функционально-инвариантных решений для задачи магнитоупругости идеально-проводящих анизотропных сред // Механика. Уч. записки Ерев. гос. ун-та. – Ереван, 1984. – № 1. – С. 52–61.
3. *Даноян З. Н.* К плоской задаче распространения магнитоупругих волн в идеально-проводящих изотропных средах // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1974. – **27**, № 5. – С. 37–46.
4. *Осипов И. О.* К методу комплексных решений динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 4. – С. 102–112.
5. *Осипов И. О.* К методу функционально-инвариантных решений для задач динамической теории упругости анизотропных сред // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1963. – № 3. – С. 391–396.
6. *Свекло В. А.* К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела // Прикл. математика и механика. – 1961. – **25**, № 5. – С. 885–896.
7. *Соболев С. Л.* Некоторые вопросы распространения колебаний // Дифференц. и интегр. уравнения мат. физики / Ф. Франк, Р. Мизес. – М.–Л.: ОНТИ, 1937. – С. 468–617.

ПЛОСКІ МАГНІТОПРУЖНІ ХВИЛІ В АНІЗОТРОПНОМУ ІДЕАЛЬНО ПРОВІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

На основі комплексних розв'язків Смірнова – Соболєва досліджується поведінка плоских магнітопружних хвиль в ідеально провідному анізотропному середовищі з чотирма пружними характеристиками. Наведено класифікацію хвиль на швидкі та повільні чи на квазіпоздовжні і квазіпоперечні залежно від фізико-механічних властивостей середовища та від величини й орієнтації зовнішнього магнітного поля. Вивчаються зміни фазових швидкостей залежно від цих параметрів. Для анізотропних середовищ ці питання розглянуто в [4–6], *для магнітопружних хвиль – в* [1–3].

PLANE MAGNETOELASTIC WAVES IN ANISOTROPIC PERFECTLY CONDUCTING MEDIA

The problem of propagation of magnetoelastic waves in anisotropic perfectly conducting media is considered in terms of Smirnov – Sobolev method of complex solutions. The functional-invariant solutions are examined as plane waves of two types: fast and slow, depending upon the problem parameters.

Ин-т механики НАН Армении, Ереван, Армения

Получено 06.06.03