УДК 539.3

Я. Я. Рущицький

ОСОБЛИВОСТІ РОЗВИТКУ ТЕОРІЇ ПРУЖНИХ НЕЛІНІЙНИХ ХВИЛЬ

Пропонується певний погляд на розвиток теорії пружних нелінійних хвиль. Для викладу позиції автора вибрано шлях, коли аналізуються певні ключові особливості теорії: систематичне вивчення нелінійних пружних хвиль започатковане не в нелінійній механіці, а в нелінійній акустиці; ряд основних понять теорії нелінійних пружних хвиль запозичено з інших розділів фізики; головна увага була і є зосереджена на гіперпружних матеріалах і головним джерелом основних рівнянь є пружний потенціал Мернаґана; в свою чергу, практично всі модифікації цього потенціалу запропоновано з метою урахування впливу внутрішньої структури матеріалу; якщо базові рівняння сформульовано в механіці, то методи дослідження запозичено з різних розділів нелінійної фізики – оптики, радіофізики та фізики плазми; подібно до інших розділів фізики, спочатку вивчалися квадратично нелінійні хвилі і лише згодом – кубічно нелінійні.

Нелінійна механіка матеріалів (твердих деформівних середовищ) є на сьогодні сформованою наукою лише в фрагментах, багатьох та далеко не всіх, і ще досить динамічно розвивається. Подібна ситуація спостерігається і в тому розділі нелінійної механіки, який вивчає нелінійні хвилі в матеріалах. Пружні матеріали, без сумніву, вивчені повніше і глибше від решти інших. Тому теорія пружних хвиль є у певному розумінні послідовно розвиненою зі своєю історією та своїми ознаками. Ознаки з чисто філологічних причин надалі називатимемо особливостями. Саме ряд найбільш характерних, з точки зору автора, особливостей і буде окреслено та прокоментовано на наступних сторінках роботи.

Особливість 1. Ця особливість є першою лише хронологічно. Хронологічно, оскільки вона полягає у тому, що систематичне вивчення нелінійних пружних хвиль було започатковане не в механіці, а в нелінійній акустиці й ученими-акустиками, для яких механіка була вочевидь не основною спеціальністю, а так би мовити, суміжною. Мабуть, доцільно згадати п'ять умовно перших публікацій російською мовою [1, 3–5, 7] і п'ять умовно перших публікацій англійською мовою [18, 25, 26, 35, 48]. Слово *умовно* видається доречним, оскільки історія не є точною наукою.

Всі вказані вище піонерські роботи ведуть початок від класичного розв'язку Ірншов'а основних рівнянь гідромеханіки. Оскільки розгляд нелінійних хвиль у механіці логічно й зручно починати з роботи Рімана про прості хвилі у повітрі [34], то означимо прості хвилі та покажемо деякі необхідні надалі основні моменти з результату Рімана і лише тоді приступимо до важливого для теорії нелінійних хвиль результату Ірншов'а. Фактично Ріман вказав перехід від теорії лінійних плоских хвиль до теорії хвиль скінченної амплітуди. Отримана теорія має зараз назву теорії простих хвиль [15, 27, 32, 49]. Ця теорія складає вагому частину теорії нелінійних хвиль. Поняття простих хвиль прийшло до теорії пружних хвиль з інших розділів фізики. Наявність таких запозичень можна вважати другою особливістю теорії пружних хвиль.

Для зрозумілого коментування особливості ***1*** потрібно зараз звернутися до особливості ***2***, яка полягає в запозиченнях із більш розвинених розділів фізики.

Особливість 2. Охарактеризуємо коротко прості хвилі. Спочатку запишемо класичне хвильове рівняння для одновимірного випадку

$$a^2 \Delta u - \left(\partial^2 u \big/ \partial t^2\right) = f(x,t). \tag{1}$$

Воно має розв'язок у вигляді хвиль Д'Аламбера, які часом теж називають простими,

$$u(x,t) = f_1(ct - x) + f_2(ct + x). \qquad (2)$$

Це плоскі хвилі − фронт хвиль є площиною.

Використаємо далі систему рівнянь гідромеханіки для випадку плоских хвиль

$$\rho_t + \rho v_x + v\rho_x = 0, \qquad \rho v_t + \rho v v_x + p_x = 0. \qquad (3)$$

Для побудови розв'язку цієї нелінійної системи у вигляді простих хвиль запропоновано різні шляхи. Найпростіший полягає у використанні нової функції (функції Рімана)

$$\sigma(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} c(\rho)\rho^{-1} d\rho\ , \qquad (4)$$

де через $c(\rho) = \sqrt{dp/d\rho}$ позначено швидкість поширення звуку і через ρ_0 − густину незбуреного середовища.

Якщо позначити додатково $P = v + \sigma$, $Q = v - \sigma$, то розв'язок системи (3) можна подати у вигляді

$$v = \frac{1}{2}\left\{P\left[t - (x/(c+v))\right] + Q\left[t - (x/(c-v))\right]\right\}. \qquad (5)$$

Якщо збурення скінченної амплітуди рухаються в одному напрямку (тобто якщо рух описується однією з функцій P, Q), то рух такого збурення у книзі з нелінійної акустики [12] називають простою хвилею.

Вкажемо ще на перший погляд інше, але насправді еквівалентне першому, означення простої хвилі: розв'язок системи (3) буде простою хвилею, якщо три основні невідомі функції p, ρ, u можуть бути виражені через одну з них. Основана на цьому означенні процедура розв'язування дає такий розв'язок [2]:

$$u = \Phi\{t \pm [\, x/(c(u) \pm u)\,]\}, \qquad (6)$$

де функція Φ задана граничною умовою $u(0,t) = \Phi(t)$.

Приступимо тепер до Ріманнового опису простих хвиль. Хвилю вважається такою, що має довільну амплітуду і є розв'язком системи рівнянь (3). Задається певне положення хвилі (просторова координата x_1 і час t_1), тим самим фіксуються значення усіх основних функцій $p_1 = p(x_1,t_1)$, $\rho_1 = \rho(x_1,t_1)$, $u_1 = u(x_1,t_1)$. Далі в спеціальній системі відліку, що рухається зі швидкістю u_1 і визначає положення координатою $x - u_1 t$, вивчаються малі збурення від ненульового значення u_1.

Застосовуючи певну процедуру для отримання нелінійного розв'язку (хвилі скінченної амплітуди) [2], просту хвилю можна подати як розв'язок системи (3) такого вигляду:

$$u = P(p - p_0) = \int_0^{p-p_0} (\rho c)^{-1} d(p - p_0), \qquad (7)$$

який звичайно розуміють як узагальнення поняття біжучої хвилі з лінійної теорії на випадок хвилі скінченної амплітуди.

Основною ознакою простої хвилі є нелінійна залежність фазової швидкості від розв'язку. Залежність такого типу є поширеною в теорії хвиль [17, 37]. Наприклад, дисперсивність середовища поширення хвиль характеризується нелінійною залежністю фазової швидкості від частоти; квазіпрості хвилі в середовищах із внутрішньою структурою є такими, що їх фазова швидкість залежить від фази.

Повернемося до особливості ***1*** і розглянемо коротко результат Ірншов'а, базуючись на старій автентичній публікації Ірншов'а та монографії [11]. Початкова система складається з трьох рівнянь:

рівняння неперервності $$\partial\rho / \partial t + \nabla(\rho\mathbf{v}) = m\,, \qquad (8)$$

рівняння Ойлера $$\rho(\partial\mathbf{v}/\partial t) + \rho(\mathbf{v}\,\nabla)\mathbf{v} = -\,\nabla p + \mathbf{F}\,, \qquad (9)$$

рівняння Пуассона $$p = p_0(\rho/\rho_0)^{\gamma}\,. \qquad (10)$$

Ірншов запропонував ввести малий параметр у вигляді числа Маха $M = v/c$ і застосувати метод послідовних наближень. Відомо, що числа Маха є звичайно достатньо малими − в реальних газах $M \approx 1.0 \cdot 10^{-2}$ і в реальних рідинах $M \approx 1.0 \cdot 10^{-3}$ або менше. Тому метод послідовних наближень працює добре.

Покажемо міркування Ірншов'а на простому випадку системи (8)−(10) для плоских простих хвиль. Згідно з Ріманном, розв'язок системи можна записати у вигляді

$$v = S\{t - [\,x/(c_0 - \varepsilon v)\,]\}, \qquad \varepsilon = (\gamma + 1)/2\,.$$

Далі вважається, що проста хвиля генерується поршнем, рух якого в лягранжевих координатах задається як гармонічні коливання $a = A(t) = A_0(1 - \cos\omega t)$. Швидкість $v = A_t$ дорівнює $v = A_t(\tau)H(a - c_0 t)$. Запишемо рівняння характеристик у параметричній формі

$$t - \tau = a\Big/ c_0 \left[\, 1 + ((\gamma - 1)/2)\big[A_t(\tau)\,/\,c_0\big]\right]^{(\gamma-1)\,/\,(\gamma+1)}\,.$$

Тоді $$\omega(t - \tau) = \frac{ka}{1 + \varepsilon M \sin\omega\tau}\,, \qquad \varepsilon = (\gamma + 1)/2,\ M = v_{\max}/c_0 = (\omega A_0)/c_0\,,$$

$$U = v/c_0 = M \sin\omega\tau\; H(\omega t - ka)\,.$$

Тепер слід би виключити параметр τ, що визнається надзвичайно складною проблемою. Це можна зробити наближено за допомогою введення малого параметра і наступного застосування методу послідовних наближень. Для цього вибирається параметр M (число Маха) і розкладається вираз $\omega\tau$ у ряд за цим малим параметром

$$\omega\tau = (\omega\tau)^{(0)} + M(\omega\tau)^{(1)} + M^2(\omega\tau)^{(2)} + \ldots, \qquad (\omega\tau)^{(0)} = \omega t - ka\,.$$

Отже, можна записати наближений розв'язок

$$U = MU^{(1)} + M^2 U^{(2)} + M^3 U^{(3)} + \ldots,$$

$$U^{(1)} = \sin(\omega t - ka)\,, \qquad (11)$$

$$U^{(2)} = \varepsilon ka\,(1/2)\sin 2(\omega t - ka)\,, \qquad (12)$$

$$U^{(3)} = \varepsilon ka\left[-\,(\gamma/8)\cos(\omega t - ka) + (\gamma/8)\cos 3\,(\omega t - ka)\right] + \\ + (\varepsilon ka)^2\left[-\,(1/8)\cos(\omega t - ka) + (3/8)\cos 3\,(\omega t - ka)\right]. \qquad (13)$$

Як бачимо, у першому наближенні отримується звичайна лінійна гармонічна хвиля з частотою, що дорівнює частоті коливань поршня. Друге наближення додає чисту другу гармоніку, амплітуда якої зростає неперервно з часом поширення хвилі. Третє наближення привносить ще першу та третю гармоніки, які мають такі самі амплітудні властивості, що й друга гармоніка. Структура цього розв'язку визначила на сто з лишком років структуру більшості досліджень нелінійних хвиль у фізиці. Ця ж структура була повторена і в згаданих вище перших роботах з теорії пружних нелінійних хвиль [1, 3, 7, 25, 35 та інших].

Особливість 3 визначається ключовими словами *гіперпружний матеріал* і *пружний потенціал Мернаґана*. Тому спочатку прокоментуємо ці терміни. Почнемо *ab ovo*. Основна властивість матеріалу деформуватися пружно розуміється як оборотність деформацій при усуненні причини деформування. Ця властивість проявляється у повній відновлюваності початкової форми тіла і в повному поверненні енергії, яку тіло накопичило в процесі деформації. Пружність деформування матеріалів має строгі означення [8, 14, 24, 33, 50], згідно з якими всі здатні деформуватися пружно матеріали розділяють на гіпопружні, пружні та гіперпружні.

Для опису гіпопружних матеріалів потрібне введення однієї з швидкостей напружень; використаємо введену Яуманном [33]. Для симетричного тензора Ляґранжа вона є такою:

$$\sigma_{ik}^{\nabla} = (D\sigma_{ik}/Dt) - \sigma_{in}v_{[k,n]} - \sigma_{kn}v_{[i,n]}\,. \tag{14}$$

Тут прийнято позначення: $(D/Dt) = (\partial/\partial t) + v_k(\partial/\partial x_k)$ – субстанціональна похідна за часом; $\mathbf{v} = (\partial\mathbf{u}/\partial t) = \{v_k\} = \{\partial u_k/\partial t\}$ – швидкість частинки; квадратні дужки означають несиметричну частину тензора $v_{k,n}$.

Слід сказати, що наявність в означенні (14) несиметричного тензора обертання з компонентами $W_{kn} = v_{[k,n]}$ і послідовне використання симетричного тензора швидкості деформацій $V_{kn} = v_{(k,n)}$ є характерним для гіпопружних матеріалів. Ці тензори практично не використовуються для опису гіперпружних і пружних матеріалів. Поява тензора обертання в означенні (14) є необхідною, оскільки тут використовується зміна швидкостей напружень і деформацій щодо стаціонарної системи координат.

Гіпопружний матеріал означується як матеріал, визначальне (конститутивне) рівняння якого має вигляд

$$\sigma_{ik}^{\nabla} = C_{iklm}(\sigma_{rs})V_{lm}\,. \tag{15}$$

Можливо, треба нагадати, що префікс *гіпо-* означає зменшення чогось проти норми. А так як префікс *гіпер-* означає значне збільшення чогось проти норми, то гіпопружні матеріали повинні мати властивість пружності як би в меншій мірі, ніж пружні матеріали, і ще в меншій мірі, ніж гіперпружні матеріали. Гіпопружні матеріали допускають існування початкових напружень. Інфінітезимальні деформації гіпопружних матеріалів є оборотними щодо початкових напружень. Цей факт разом з неможливістю гіпопружних матеріалів деформуватися в'язко (тобто в них відсутня внутрішня дисипація) виправдовує, на думку Праґера [33], їх назву.

Пружний матеріал (матеріал із загальним законом пружного деформування) означується строго як такий, що може перебувати в природному (вільному від напружень) стані, і в околі цього стану напруження у даний момент можуть бути означені взаємно однозначно значеннями або ґрадієнта деформацій, або тензора деформацій

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{lm})\,, \tag{16}$$

або для прямокутної симетрії

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl} + A_{ijklmn}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} + A_{ijklmnpq}\varepsilon_{lm}\varepsilon_{mn}\varepsilon_{pq} + \ldots. \tag{17}$$

Тут слід звернути увагу на звичний у класичній лінійній теорії тензор четвертого ранґу A_{ijkl}. Він визначає лінійні властивості пружних матеріалів; симетрія тензорів напружень і деформацій зменшує кількість незалежних компонентів (пружних характеристик) з 81 до 36. Для подальшого зменшення цієї кількості потрібна додаткова симетрія матеріалу.

Гіперпружний матеріал означується як пружний матеріал, для якого питома внутрішня енергія e є аналітичною функцією компонент тензора деформацій, віднесеного до природного стану $e = e(\varepsilon_{lm})$. Напруження у гіперпружному матеріалі можна обчислити за формулою

$$\sigma_{ij} = (1/2)\left[(\partial/\partial\varepsilon_{ij}) + (\partial/\partial\varepsilon_{ji})\right] e(\varepsilon_{lk}). \tag{18}$$

Відома теорема Нолла [33, 50] стверджує, що для ізотропного середовища кожен гіперпружний матеріал є частковим випадком пружного матеріалу, а отже, і гіпопружного матеріалу. Теорема невірна для випадку анізотропії. Формула (17) свідчить про те, що гіперпружність зменшує рівень анізотропії, оскільки симетрія збільшується додатково з огляду на рівності $A_{ijkl} = A_{jikl}$, $A_{ijkl} = A_{ijlk}, A_{ijkl} = A_{klij}$. Кількість незалежних пружних сталих зменшується від 36 до 21. Ця остання кількість звичайно фіксується у більшості підручників з теорії пружності, однак, не звертається уваги на те, що цим самим вже здійснено перехід від загального випадку пружності матеріалу до випадку гіперпружності матеріалу.

Нелінійна механіка матеріалів має багату історію як експериментальних, так і теоретичних студій. Найбільші труднощі в побудові нелінійних моделей виникали при переході від лінійного закону Гука до більш складних нелінійних залежностей. Простіше було з ізотропними матеріалами. Тут було запропоновано ряд придатних для аналізу моделей − Сетха, Сіньйоріні, Джона, Мернаґана. Всі ці моделі ґрунтуються на відповідних пружних потенціалах. Пружний потенціал Мернаґана є кубічним щодо тензора деформацій. Найчастіше він записується через компоненти нелінійного тензора деформацій Ґріна ε_{ik}:

$$W(\varepsilon_{ik}) = \frac{1}{2}\lambda(\varepsilon_{mm})^2 + \mu(\varepsilon_{ik})^2 + \frac{1}{3}A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + B(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mm} + \frac{1}{3}C(\varepsilon_{mm})^3 \tag{19}$$

або через перші алгебричні інваріанти I_k цього тензора

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{1}{3}AI_3 + BI_1I_2 + \frac{1}{3}CI_1^3.$$

Тут $I_1 = \mathrm{tr}(\varepsilon_{ik})$, $I_2 = \mathrm{tr}\left[(\varepsilon_{ik})^2\right]$, $I_3 = \mathrm{tr}\left[(\varepsilon_{ik})^3\right]$; λ, μ є пружними модулями Ляме (сталими другого порядку); A, B, C є пружними модулями Мернаґана (сталими третього порядку).

Часом зустрічаються інші зображення:

$$W(\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3) = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\hat{I}_1^2 - 2\mu\hat{I}_2 + n\hat{I}_3 - 2m\hat{I}_1\hat{I}_2 + \frac{l + 2m}{3}\hat{I}_1^3,$$

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{4}{3}\nu_3 I_3 + \nu_2 I_1 I_2 + \frac{1}{6}\nu_1 I_1^3,$$

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{c}{3}I_3 + bI_1I_2 + \frac{a}{3}I_1^3.$$

Тут використано головні інваріанти $\hat{I}_k$ тензора деформацій Ґріна.

Сформулюємо тепер особливість ***3*** як таку, що головна увага при дослідженні нелінійних пружних хвиль була і є зосереджена на гіперпружних матеріалах і головним джерелом основних рівнянь є пружний потенціал Мернаґана; в свою чергу, практично всі модифікації цього потенціалу запропоновано з метою урахування впливу внутрішньої структури матеріалу. Це врахування можна вважати особливістю ***4***.

Особливість 4. Почнемо зі згаданих вище модифікацій потенціалу Мернаґана та опишемо п'ять найбільш поширених.

1°. *Модифікація Гузя для полікристалічних матеріалів* [8]. Цю модифікацію слід віднести до класичної пружності. Запропонований потенціал має вигляд

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2} K_{iklm} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm} + \frac{c}{3} I_3 + b I_1 I_2 + \frac{a}{3} I_1^3 . \tag{20}$$

Тензор четвертого ранґу K_{iklm} є звичайним тензором пружних сталих лінійної теорії. Потенціал складається з двох нелінійних частин − квадратичної та кубічної. Квадратична характеризує анізотропію властивостей матеріалу в ненавантаженому стані і відповідає потенціалу лінійного анізотропного пружного тіла. Кубічна відповідає квадратично нелінійному ізотропному пружному тілу. Потенціал застосовується для аналізу поширення хвиль у полікристалічних тілах зі слабкою анізотропією властивостей у природному стані (так званих квазіізотропних тілах).

2°. *Модифікація Міндліна − Ерінґена для мікроморфного континуума* [22, 23]. Ця модифікація виходить за рамки класичної пружності, вона є базовою для нелінійної мікроморфної теорії деформування матеріалів Міндліна − Ерінґена. Теорія використовує дві незалежні кінематичні величини − вектор макрозміщень $\mathbf{u}$ і несиметричний тензор мікрозміщень Ψ. Процес деформування описується трьома незалежними тензорами: тензором макродеформацій $\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i} + u_{m,i} u_{m,k})$, тензором відносних дисторсій $\gamma_{ik} = u_{i,k} + \Psi_{ik} + u_{m,k} \Psi_{mk}$, тензором мікродисторсій $æ_{ikl} = \Psi_{ik,l} + u_{m,k} \Psi_{mk,l}$. Теорія будується подібно до класичної гіперпружності − внутрішня енергія вважається аналітичною функцією введених трьох тензорів.

Мікроморфний континуум, запропонований для опису деформування композитних матеріалів (матеріалів із внутрішньою структурою), виявився прямим узагальненням трьох добре відомих мікроструктурних континуумів − континуума Коссера, псевдоконтинуума Коссера і ґрадієнтного континуума Леру [10, 17, 22, 23, 30]. Зокрема, теорія Коссера несиметричної пружності отримується з мікроморфної певними спрощеннями: кінематика описується вектором макрозміщень $\mathbf{u}$ та вектором макрообертання $\boldsymbol{\Psi}$; деформація описується лише двома тензорами

$$\gamma_{ik} = u_{i,k} - \epsilon_{ikm}(R_m - \Psi_m), \quad R_m = (1/2)\epsilon_{ikm} u_{i,k}, \quad æ_{ikm} = -\epsilon_{ikm} \Psi_{k,m}$$

(ϵ_{mik} є звичайним тензором Леві-Чівіти). Внутрішня енергія e є функцією двох тензорів: несиметричного тензора відносних дисторій γ_{ik} і тензора згину-кручення $\Gamma_{km} = \Psi_{k,m}$. Модифікація потенціалу Мернаґана має вигляд

$$\begin{aligned} W = {} & \frac{1}{2}(\mu + \alpha)\gamma_{ik}\gamma_{ik} + \frac{1}{2}(\mu - \alpha)\gamma_{ik}\gamma_{ki} + \frac{\lambda}{2}(\gamma_{kk})^2 + \frac{1}{2}(\lambda + \varepsilon)\Gamma_{ik}\Gamma_{ik} + \\ & + \frac{1}{2}(\lambda - \varepsilon)\Gamma_{ik}\Gamma_{ki} + \frac{\beta}{2}(\Gamma_{kk})^2 + \frac{\nu_1}{6}(\gamma_{kk})^3 + \frac{1}{2}(\nu_2 + \delta_1)\gamma_{ik}\gamma_{ik}\gamma_{kk} + \\ & + \frac{1}{2}(\nu_2 - \delta_1)\gamma_{ik}\gamma_{ki}\gamma_{kk} + \frac{1}{3}(2\nu_3 + \delta_2)\gamma_{ik}\gamma_{km}\gamma_{mi} + \frac{1}{3}(2\nu_3 - \delta_2)\gamma_{ik}\gamma_{km}\gamma_{im} + \\ & + \sigma_1(\Gamma_{kk})^2\gamma_{mm} + \sigma_2\Gamma_{ik}\Gamma_{ki}\gamma_{mm} + \sigma_3\Gamma_{ik}\Gamma_{ik}\gamma_{mm} . \end{aligned} \tag{21}$$

Тут λ, μ є пружними сталими Ляме; ν_1, ν_2, ν_3 є пружними сталими Мернаґана; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ є лінійними сталими мікрополярного середовища; $\delta_1, \delta_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ є нелінійними сталими мікрополярного середовища.

3°. *Модифікація для псевдоконтинуума Коссера* [10]. Перехід до псевдоконтинуума Коссера передбачає подальше зменшення незалежних кінематичних величин − тут потрібен лише класичний вектор макрозміщень. Вектори макрообертання і мікрообертання співпадають, $R_m = \Psi_m = (1/2)\epsilon_{mik} u_{i,k}$ − обертання в цьому континуумі є обмеженим. Однак псевдоконтинуум зберіг моментні напруження та несиметричність силових напружень, а також зберіг усі сталі мікрополярного середовища. Модифікація потенціалу Мернаґана записується лише через вектор макрозміщень

$$W = (1/2)(\mu+\alpha)\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ik} + (1/2)(\mu-\alpha)\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ki} + (\lambda/2)(\varepsilon_{kk})^2 + (1/2)(\lambda+\varepsilon)\Gamma_{ik}\Gamma_{ik} +$$
$$+ (1/2)(\lambda-\varepsilon)\Gamma_{ik}\Gamma_{ki} + (\beta/2)(\Gamma_{kk})^2 + (1/2)\big[(\nu_1/3)(\varepsilon_{kk})^3 +$$
$$+ (\nu_2+\delta_1)\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kk} + (\nu_2-\delta_1)\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{kk} + (2/3)(2\nu_3+\delta_2)\varepsilon_{ik}\varepsilon_{km}\varepsilon_{mi}\big] +$$
$$+ (1/3)(2\nu_3-\delta_2)\varepsilon_{ik}\varepsilon_{km}\varepsilon_{im} + \sigma_1(\Gamma_{kk})^2\varepsilon_{mm} + \sigma_2\Gamma_{ik}\Gamma_{ki}\varepsilon_{mm} +$$
$$+ \sigma_3\Gamma_{ik}\Gamma_{ik}\varepsilon_{mm}. \quad (22)$$

Тензори макродеформацій і макрообертання вважаються нелінійними, але традиційно останній пишуть у лінійному варіанті. Тому тензор згинукручення записується як $\Gamma_{ik} = (1/2)\epsilon_{kmn}u_{m,ni}$.

4°. *Модифікація для ґрадієнтного континуума Леру* [10]. Континуум Леру використовує для опису деформування тензор макродеформацій $\varepsilon_{ik} = (1/2)(u_{i,k} + u_{k,i} + u_{m,i}u_{m,k})$ і тензор мікродисторсій $\varkappa_{ikm} = -u_{i,km}$. Модифікація потенціалу Мернаґана для континуума Леру є такою:

$$W = \mu\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ik} + (1/2)\lambda(\varepsilon_{ii})^2 + 2\mu M^2(\varkappa_{ikm}\varkappa_{ikm} + \tilde{\nu}\varkappa_{ikm}\varkappa_{kim}) +$$
$$+ (1/3)A\,\varepsilon_{ik}\varepsilon_{mk}\varepsilon_{im} + B\,\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{mm} + (1/3)\,C(\varepsilon_{mm})^3 +$$
$$+ D(\varepsilon_{mm})^4 + G\,\varepsilon_{ik}\varepsilon_{mk}\varepsilon_{mi}\varepsilon_{nn} + H\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ki}(\varepsilon_{nn})^2 + J(\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ki})^2. \quad (23)$$

Слід вказати на певну подібність модифікацій Гузя і Леру. У (23) лінійна та нелінійна частини розділені в тому розумінні, що лінійна частина враховує моментність деформування, тоді як нелінійна нехтує нею як такою, що не впливає на нелінійні процеси. Іншою особливістю зображення (23) є те, що воно включає потенціал Мернаґана як складову і, по суті, є вже потенціалом більш високого порядку.

5°. *Модифікація для двоконтинуальної суміші* [17, 37–39]. Основна концепція у побудові двоконтинуальної суміші полягає в припущенні, що суміш складається з двох взаємопроникних і взаємодіючих континуумів. Кінематична картина процесу деформування описується двома парціальними векторами деформацій $\mathbf{u}^{(\alpha)}, \alpha = 1, 2$. Відповідно в цій теорії присутні два парціальні тензори макродеформацій $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}$. Суміш у цілому і її внутрішня енергія описуються двома типами кінематичних параметрів – парціальними тензорами деформацій $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}$ і вектором відносних зміщень $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}$. Вкажемо тут дві модифікації потенціалу Мернаґана. Перша враховує взаємний вплив парціальних деформацій як для квадратичної частини, так і для кубічної:

$$W(\varepsilon_{ik}^{(1)}, \varepsilon_{ik}^{(2)}, v_k) = \mu_\alpha\big(\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}\big)^2 + 2\mu_3\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}\varepsilon_{ik}^{(\delta)} + (1/2)\lambda_\alpha\big(\varepsilon_{mm}^{(\alpha)}\big)^2 + \lambda_3\varepsilon_{mm}^{(\alpha)}\varepsilon_{mm}^{(\delta)} +$$
$$+ (1/3)A_\alpha\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}\varepsilon_{im}^{(\alpha)}\varepsilon_{km}^{(\alpha)} + B_\alpha\varepsilon_{mm}^{(\alpha)}\big(\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}\big)^2 + (1/3)C_\alpha\big(\varepsilon_{mm}^{(\alpha)}\big)^3 +$$
$$+ (1/3)A_3\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}\varepsilon_{im}^{(\delta)}\varepsilon_{km}^{(\delta)} + 2B_3\varepsilon_{mm}^{(\delta)}\varepsilon_{ik}^{(\delta)}\varepsilon_{ik}^{(\alpha)} +$$
$$+ C_3\varepsilon_{mm}^{(\alpha)}(\varepsilon_{mm}^{(\delta)})^2 + \beta(v_k)^2 + (1/3)\beta'(v_k)^3 \quad (24)$$

(у цій теорії звичайно латинські індекси приймають значення 1÷3 і грецькі індекси – 1, 2). Потенціал включає сім пружних сталих другого порядку λ_k, μ_k, β та десять пружних сталих третього порядку A_k, B_k, C_k, β'.

Інший варіант потенціалу є таким:

$$W(\varepsilon_{ik}^{(1)}, \varepsilon_{ik}^{(2)}, v_k) = \mu_\alpha \left(\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}\right)^2 + 2\mu_3 \varepsilon_{ik}^{(\alpha)} \varepsilon_{ik}^{(\delta)} + (1/2)\lambda_\alpha \left(\varepsilon_{mm}^{(\alpha)}\right)^2 + \lambda_3 \varepsilon_{mm}^{(\alpha)} \varepsilon_{mm}^{(\delta)} +$$

$$+ (1/3) A_\alpha \varepsilon_{ik}^{(\alpha)} \varepsilon_{im}^{(\alpha)} \varepsilon_{km}^{(\alpha)} + B_\alpha \varepsilon_{mm}^{(\alpha)} \left(\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}\right)^2 +$$

$$+ (1/3) C_\alpha \left(\varepsilon_{mm}^{(\alpha)}\right)^3 + \beta (v_k)^2 + (1/3)\beta' (v_k)^3 . \qquad (25)$$

Перейдемо тепер до особливості **5**, яку розумітимемо як послідовне вивчення спочатку квадратично нелінійних хвиль, а потім кубічно нелінійних.

Особливість 5. Звернемося до згадуваних раніше піонерських публікацій, присвячених плоским нелінійним пружним хвилям. Вони базуються на певному спрощенні потенціалу Мернаґана:

$$W = \frac{1}{2} \lambda (u_{m,m})^2 + \frac{1}{4} \mu (u_{i,k} + u_{k,i})^2 + \left(\mu + \frac{1}{4} A\right) u_{i,k} u_{m,i} u_{m,k} +$$

$$+ \frac{1}{2} (\lambda + B) u_{m,m} (u_{i,k})^2 + \frac{1}{12} A u_{i,k} u_{k,m} u_{m,i} +$$

$$+ \frac{1}{2} B u_{i,k} u_{k,i} u_{m,m} + \frac{1}{3} C (u_{m,m})^3 . \qquad (26)$$

Потенціал є все ще нелінійним і зберіг систему порядків нелінійностей (від 2 до 6). Однак ця нелінійність тепер трансформувалася − з нелінійності щодо тензора деформацій вона перетворилася у нелінійність щодо ґрадієнта деформацій.

Загальна схема переходу від потенціалу до хвильових рівнянь фактично складається з двох кроків: спочатку слід записати конститутивні рівняння і далі використати рівняння руху. В результаті для класичного випадку буде отриманий якийсь нелінійний варіант класичних рівнянь Ляме, а для модифікацій − певне узагальнення таких варіантів. Зокрема, один з класичних записів є таким:

$$\rho \ddot{u}_m - \mu u_{m,kk} - (\lambda + \mu) u_{n,mn} = F_m . \qquad (27)$$

Справа зібрані всі нелінійні члени

$$F_i = \left[\mu + (1/4) A\right] \left(u_{l,kk} u_{l,i} + u_{l,kk} u_{i,l} + 2 u_{i,lk} u_{l,k}\right) +$$

$$+ \left[\lambda + \mu + (1/4) A + B\right] \left(u_{l,ik} u_{l,k} + u_{k,lk} u_{i,l}\right) + (\lambda + B) u_{i,kk} u_{l,l} +$$

$$+ (B + 2C) u_{k,ik} u_{l,l} + \left[(1/4) A + B\right] \left(u_{k,lk} u_{l,i} + u_{l,ik} u_{k,l}\right) . \qquad (28)$$

Першими завжди вивчаються плоскі хвилі. Звичайний шлях від рівнянь Ляме до хвильових рівнянь для плоских хвиль передбачає введення тензора Крістоффеля і отримання рівнянь Крістоффеля. Нагадаємо, що для лінійної теорії ці рівняння є такими:

$$\rho \ddot{u}_1 - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = 0, \quad \rho \ddot{u}_2 - \mu u_{2,11} = 0, \quad \rho \ddot{u}_3 - \mu u_{3,11} = 0 . \qquad (29)$$

Як відомо, перше рівняння описує P-хвилі, друге та третє − відповідно SH-хвилі та SV-хвилі [2, 8, 13, 17, 27, 49].

Для випадку потенціалу (26), який є кубічно нелінійним щодо ґрадієнта деформацій, і рівнянь (27), які є квадратично нелінійними щодо зміщень, рівняння (27) трансформуються у квадратично нелінійні, зберігаючи при цьому лінійні рівняння (29) як складову частину:

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1} + N_2 \left(u_{2,11} u_{2,1} + u_{3,11} u_{3,1}\right), \qquad (30)$$

$$\rho u_{2,tt} - \mu u_{2,11} = N_2 \left(u_{2,11} u_{1,1} + u_{1,11} u_{2,1}\right), \qquad (31)$$

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = N_2 \left(u_{3,11} u_{1,1} + u_{1,11} u_{3,1}\right), \qquad (32)$$

$$N_1 = 3\left[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)\right], \quad N_2 = \lambda + 2\mu + (1/2) A + B .$$

Саме рівняння (30)–(32) і подібні до них (з тим самим порядком нелінійності) вивчалися довгий час у нелінійній акустиці [1, 3–5, 7, 10, 11, 17, 18, 25, 26, 35, 48], а згодом – у механіці [10, 17].

Повернемося до виразів (19) і (26) і зауважимо, що (26) є дуже вкороченою формою (19). Через нелінійність тензора деформацій Ґріна запис потенціалу (19) включає члени другого та третього порядку (тільки вони і збережені в (26)), але також четвертого, п’ятого і шостого. Як наслідок цього потенціал у записі через ґрадієнт включає члени, які спричиняють наявність у хвильових рівняннях не тільки квадратичної нелінійності, але кубічної і двох наступних (четвертого та п’ятого степенів). Повний запис потенціалу є таким:

$$\begin{aligned}W = {} & \frac{1}{2}\lambda(u_{m,m})^2 + \frac{1}{4}\mu(u_{i,k} + u_{k,i})^2 + \left(\mu + \frac{1}{4}A\right)u_{i,k}u_{m,k}u_{m,i} + \\ & + \frac{1}{2}(\lambda + B)u_{m,m}(u_{i,k})^2 + \frac{1}{12}Au_{i,k}u_{k,m}u_{m,i} + \frac{1}{2}Bu_{i,k}u_{k,i}u_{m,m} + \\ & + \frac{1}{3}C(u_{m,m})^3 + \frac{1}{4}\lambda(u_{n,m})^4 + \frac{1}{4}\mu(u_{n,i}u_{n,k})^2 + \frac{1}{8}A[(u_{i,k} + \\ & + u_{k,i})(u_{i,m} + u_{m,i})u_{s,k}u_{s,m} + (u_{i,k} + u_{k,i})(u_{k,m} + u_{m,k})u_{s,i}u_{s,m} + \\ & + (u_{i,m} + u_{m,i})(u_{k,m} + u_{m,k})u_{s,i}u_{s,k}] + \frac{1}{2}B[(u_{i,k} + \\ & + u_{k,i})u_{n,i}u_{n,k}u_{m,m} + \frac{1}{2}(u_{i,k}u_{k,i} + u_{i,k}u_{i,k})u_{n,m}u_{n,m}] + \\ & + \frac{3}{2}C(u_{m,m})^2(u_{n,m})^2 + \frac{1}{24}A[(u_{i,k} + u_{k,i})(u_{s,i}u_{s,m})(u_{l,k}u_{l,m}) + \\ & + (u_{i,m} + u_{m,i})(u_{n,i}u_{n,k})(u_{l,k}u_{l,m}) + \\ & + (u_{k,m} + u_{m,k})(u_{n,i}u_{n,k})(u_{s,i}u_{s,k})] + \\ & + \frac{1}{4}B[(u_{n,i}u_{n,k})^2u_{m,m} + (u_{i,k} + u_{k,i})u_{n,i}u_{n,k}(u_{s,m})^2] + \\ & + \frac{1}{12}Cu_{m,m}(u_{n,m})^4 + \frac{1}{24}A(u_{n,i}u_{n,k})(u_{s,i}u_{s,m})(u_{l,k}u_{l,m}) + \\ & + \frac{1}{8}B(u_{n,i}u_{n,k})^2(u_{s,m})^2 + \frac{1}{24}C(u_{n,m})^6.\end{aligned}$$

Якщо врахувати ще одну (наступну після (26)) нелінійність, то потенціал породжуватиме як квадратичну, так і кубічну нелінійності й матиме вигляд

$$\begin{aligned}W = {} & \frac{1}{2}\lambda(u_{m,m})^2 + \frac{1}{4}\mu(u_{i,k} + u_{k,i})^2 + \left(\mu + \frac{1}{4}A\right)u_{i,k}u_{m,k}u_{m,i} + \\ & + \frac{1}{2}(\lambda + B)u_{m,m}(u_{i,k})^2 + \frac{1}{12}Au_{i,k}u_{k,m}u_{m,i} + \frac{1}{2}Bu_{i,k}u_{k,i}u_{m,m} + \\ & + \frac{1}{3}C(u_{m,m})^3 + \frac{1}{4}\lambda(u_{n,m})^4 + \frac{1}{4}\mu(u_{n,i}u_{n,k})^2 + \frac{1}{8}A[(u_{i,k} + \\ & + u_{k,i})(u_{i,m} + u_{m,i})u_{s,k}u_{s,m} + (u_{i,k} + u_{k,i})(u_{k,m} + u_{m,k})u_{s,i}u_{s,m} + \\ & + (u_{i,m} + u_{m,i})(u_{k,m} + u_{m,k})u_{s,i}u_{s,k}] + \frac{1}{2}B[(u_{i,k} + u_{k,i})u_{n,i}u_{n,k}u_{m,m} + \\ & + \frac{1}{2}(u_{i,k}u_{k,i} + u_{i,k}u_{i,k})u_{n,m}u_{n,m}] + \frac{3}{2}C(u_{m,m})^2(u_{n,m})^2. \qquad (33)\end{aligned}$$

Хвильові рівняння, які враховують квадратичну та кубічну нелінійності одночасно, матимуть вигляд

$$\rho\, u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = N_1\, u_{1,11}u_{1,1} + N_2\big(u_{2,11}u_{2,1} + u_{3,11}u_{3,1}\big) +$$
$$+ N_3\, u_{1,11}(u_{1,1})^2 + N_4\big(u_{2,11}u_{2,1}u_{1,1} + u_{3,11}u_{3,1}u_{1,1}\big)\,, \tag{34}$$

$$\rho u_{2,tt} - \mu u_{2,11} = N_2\big(u_{2,11}u_{1,1} + u_{1,11}u_{2,1}\big) +$$
$$+ N_4\, u_{2,11}(u_{2,1})^2 + N_5\, u_{2,11}(u_{1,1})^2 + N_6\, u_{2,11}(u_{3,1})^2\,, \tag{35}$$

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = N_2\big(u_{3,11}u_{1,1} + u_{1,11}u_{3,1}\big) +$$
$$+ N_4\, u_{3,11}(u_{3,1})^2 + N_5\, u_{3,11}(u_{1,1})^2 + N_6\, u_{3,11}(u_{2,1})^2\,, \tag{36}$$

$$N_3 = (3/2)(\lambda + 2\mu) + 6(A + 3B + C), \quad N_4 = (1/2)\,[2(\lambda + 2\mu) + 5A + 14B + 4C]\,,$$
$$N_5 = (3/2)(\lambda + 2\mu + A + 2B), \quad N_6 = 3A + 10B + 4C\,.$$

Запишемо нелінійні хвильові рівняння, які відповідають різним модифікаціям потенціалу Мернаґана.

Теорія несиметричної пружності (*теорія Коссера*):

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} - (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} - 2\alpha\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3\,, \tag{37}$$

$$I\ddot{\boldsymbol{\Psi}} - (\beta + 2\gamma)\,\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{\Psi} + (\gamma + \varepsilon)\Delta\boldsymbol{\Psi} - 2\alpha\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} + 4\alpha\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3\,, \tag{38}$$

де σ_{ik} є компонентами силового тензора напружень; функції $\mathbf{F}_2$ і $\mathbf{F}_3$ містять квадратично та кубічно нелінійні члени відповідно. Зокрема, поширення плоских поздовжніх хвиль описується системою рівнянь

$$\rho\ddot{u} - (\lambda + 2\mu)\,u_{,xx} - \big[\,g(u_{,x})^2 + 2\delta_1(\Psi)^2 + \sigma_0(\Psi_{,x})^2\big]_{,x} = 0\,, \tag{39}$$

$$I\Psi - (\beta + 2\gamma)\,\Psi_{,xx} + 4\alpha\Psi + 4\delta_1\Psi u_{,x} - 2\sigma_0(\Psi_{,x}u_{,x})_{,x} = 0\,, \tag{40}$$

$$\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\,, \qquad g = (1/2)\nu_1 + 3\nu_2 + 4\nu_3\,.$$

Теорія псевдоконтинуума Коссера. У цьому випадку система (37), (38) з двох векторних рівнянь трансформується у систему з одного векторного рівняння

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} + (1/4)I\,\Delta\ddot{\mathbf{u}} - (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} - (\gamma + \varepsilon)\Delta\Delta\mathbf{u} = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3\,. \tag{41}$$

Ґрадієнтна теорія Леру:

$$\rho\ddot{u}_i - (\lambda + \mu)u_{k,ki} - \mu u_{i,nn} + \mu M^2(u_{i,nn} - u_{p,pi})_{,mm} = F_{2i} + F_{3i}\,, \tag{42}$$

$$F_{2i} = [\mu + (1/4)A]\big(u_{l,kk}u_{l,i} + u_{l,kk}u_{i,l} + 2u_{i,lk}u_{l,k}\big) + [\lambda + \mu + (1/4)A +$$
$$+ B]\big(u_{l,ik}u_{l,k} + u_{k,lk}u_{i,l}\big) + (\lambda + B)u_{i,kk}u_{l,l} + (\lambda + B)u_{i,kk}u_{l,l} +$$
$$+ (B + 2C)u_{k,ik}u_{l,l} + [(1/4)A + B](u_{k,lk}u_{l,i} + u_{l,ik}u_{k,l})\,. \tag{43}$$

Запис виразу для кубічної нелінійності займає 13 рядків.

Теорія двофазної суміші:

$$\rho_{\alpha\alpha}\ddot{u}_i^{(\alpha)} - \mu_\alpha u_{i,kk}^{(\alpha)} - \mu_3 u_{i,kk}^{(\delta)} - (\lambda_\alpha + \mu_\alpha)u_{k,ki}^{(\alpha)} -$$
$$- (\lambda_3 + \mu_3)u_{k,ki}^{(\delta)} - \beta\big(u_i^{(\alpha)} - u_i^{(\delta)}\big) = F_i^{(\alpha)}\,. \tag{44}$$

У виразі для $F_i^{(\alpha)}$ зібрано всі нелінійні члени.

Плоскі поляризовані квадратично нелінійні хвилі описуються системою хвильових рівнянь

$$\rho_{\alpha\alpha}\ddot{u}_1^{(\alpha)} - (\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha)u_{1,11}^{(\alpha)} - (\lambda_3 + 2\mu_3)u_{1,11}^{(\delta)} - \beta(u_1^{(\alpha)} - u_1^{(\delta)}) =$$

$$= N_1^{(\alpha)}u_{1,11}^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)} + N_2^{(\alpha)}\left(u_{2,11}^{(\alpha)}u_{2,1}^{(\alpha)} + u_{3,11}^{(\alpha)}u_{3,1}^{(\alpha)}\right), \qquad (45)$$

$$\rho_{\alpha\alpha}\ddot{u}_m^{(\alpha)} - \mu_\alpha u_{m,11}^{(\alpha)} - \mu_3 u_{m,11}^{(\delta)} - \beta\left(u_m^{(\alpha)} - u_m^{(\delta)}\right) =$$

$$= N_2^{(\alpha)}\left(u_{m,11}^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)} + u_{1,11}^{(\alpha)}u_{m,1}^{(\alpha)}\right), \qquad m = 2, 3. \qquad (46)$$

Усі вказані модифікації хвильових рівнянь вивчали, головним чином, для випадку квадратичної нелінійності. Кубічну нелінійність почали вивчати порівняно недавно [10, 19, 20, 40–47]. Неувага до кубічної нелінійності в механіці пояснюється тим, що багато механічних явищ можуть бути вивчені на основі квадратично нелінійних рівнянь. Це не всюди так, зокрема в оптиці є моделі, в яких квадратична нелінійність «заборонена» і вивчення хвиль починають відразу з кубічно нелінійних систем.

Знання різних модифікацій хвильових рівнянь є важливим фактом, однак не менш важливими є способи знаходження розв'язків цих рівнянь. Тут виникає необхідність сформулювати наступну особливість теорії пружних нелінійних хвиль. Особливість ***6*** полягає у тому, що оскільки теорія пружних хвиль була створена пізніше від нелінійних хвильових теорій в інших розділах фізики, то в ній спеціальних методів розв'язування не розробляли, а використовували вже відомі методи.

Особливість 6. Прокоментуємо коротко ці методи. До них ми відносимо методи послідовних наближень [10, 11, 16, 17], повільно змінних амплітуд [10–12, 16, 17] та зображення розв'язку ***вейвлетами*** [6, 9, 21, 28, 29, 31, 44]. Зауважимо, що деякі розвинені в загальній теорії нелінійних хвиль методи не знайшли застосування в теорії пружних хвиль. Як приклад можна вказати запропонований ще Кельвіном метод стаціонарної фази [49].

Метод послідовних наближень. У цьому методі, перш за все, треба ввести малий параметр ε. Далі невідому функцію (для хвиль зміщення це $\mathbf{u}(x,t)$) подають у вигляді ряду

$$\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{u}^{(0)}(x,t) + \varepsilon\mathbf{u}^{(1)}(x,t) + \varepsilon^2\mathbf{u}^{(2}(x,t) + \ldots.$$

З правою частиною хвильового рівняння із зібраними разом нелінійностями теж поступають аналогічно:

$$\mathbf{F} = \varepsilon\mathbf{F}^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{F}^{(2)} + \ldots.$$

Далі ці подання підставляють у нелінійне хвильове рівняння. Розглянемо процедуру на прикладі квадратично нелінійного рівняння для поздовжніх хвиль

$$\ddot{u}_1 - (c_P)^2 u_{1,11} = \alpha_1(c_P)^2 u_{1,11}u_{1,1} + \alpha_2(c_P)^2\left(u_{2,11}u_{2,1} + u_{3,11}u_{3,1}\right), \qquad (47)$$

$$(c_P)^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho, \qquad \alpha_k = N_k/(\lambda + 2\mu).$$

Рівняння для перших трьох наближень є такими:

$$\ddot{u}_1^{(0)} - (c_P)^2 u_{1,11}^{(0)} = 0,$$

$$\ddot{u}_1^{(1)} - (c_P)^2 u_{1,11}^{(1)} = \alpha_1(c_P)^2 u_{1,11}^{(0)}u_{1,1}^{(0)} + \alpha_2(c_P)^2\left(u_{2,11}^{(0)}u_{2,1}^{(0)} + u_{3,11}^{(0)}u_{3,1}^{(0)}\right),$$

$$\ddot{u}_1^{(2)} - (c_P)^2 u_{1,11}^{(2)} = \alpha_1(c_P)^2 u_{1,11}^{(1)}u_{1,1}^{(1)} + \alpha_2(c_P)^2\left(u_{2,11}^{(1)}u_{2,1}^{(1)} + u_{3,11}^{(1)}u_{3,1}^{(1)}\right).$$

Якщо розглядати так звану першу стандартну проблему (коли на вході у середовище задається лише гармонічна поздовжня хвиля), то відповідні розв'язки мають вигляд

$$u_1^{(0)}(x,t) = u_{1(0)} \cos(kx - \omega t), \qquad (\omega/k) = c_P, \tag{48}$$

$$u_1^{(1)}(x,t) = \left[N_1/8(\lambda + 2\mu)\right]\left(u_{1(0)}\right)^2 k^2 x \cos 2(kx - \omega t). \tag{49}$$

Метод широко застосовували з самого початку розвитку теорії нелінійних пружних хвиль; можна сказати, що він є найбільш уживаним у цій теорії, і переважна більшість результатів отримана в рамках цього методу.

Метод повільно змінних амплітуд. Інша назва цього методу − метод Ван дер Поля. Запропонований він був для аналізу нелінійних коливальних систем, а до теорії пружних хвиль запозичений з оптики та радіофізики. Для застосування цього методу повинен бути відомим лінійний розв'язок у вигляді гармонічної хвилі, і тоді нелінійний розв'язок шукають у вигляді (надалі для визначеності розглядаємо поздовжню хвилю)

$$u_1(x,t) = A_1(x)e^{i(k_1 x - \omega t)}$$

або

$$u_1(x,t) = \mathrm{Re}\left\{A_1(x)e^{i(k_1 x - \omega t)}\right\} = a_1(x)\cos\left[k_1 x - \omega t + \varphi_1(x)\right]. \tag{50}$$

Амплітуда в (50) повинна, за задумом, бути повільно змінною, тобто практично не повинна змінюватися, проходячи відстань, що дорівнює одній довжині хвилі.

Далі розглядають задачу про взаємодію певної скінченної кількості хвиль (звичайно, двох-чотирьох) і припускають, що розв'язок є суперпозицією розв'язків (50):

$$u_1(x,t) = \sum_{m=1}^{M} A_{1m}(x)e^{i\sigma_m}, \qquad \sigma_m = k_{1m}x - \omega_m t.$$

Цей розв'язок підставляють у нелінійне хвильове рівняння, яке, як правило, є рівнянням другого або вищого порядку з частинними похідними. За певним правилом отримують так зване «вкорочене» рівняння, яке вже є звичайним диференціальним рівнянням першого порядку:

$$\sum_{m=1}^{M} k_{1m}\left(A_{1m}\right)_{,1} e^{i\varphi_m} = -\frac{N_1}{2(\lambda + 2\mu)} \sum_{n=1}^{M}\sum_{p=1}^{M} k_{1n}k_{1p}^2 A_{1n}A_{1p}e^{i(\varphi_n + \varphi_p)}. \tag{51}$$

Наступним кроком приймають припущення про узгодженість частот хвиль-учасниць $\omega_1 \pm \omega_2 = \omega_3$ і в результаті «вкорочене» рівняння розпадається на систему еволюційних рівнянь:

$$\left(A_{11}\right)_{,1} = \sigma_1 \bar{A}_{12} A_{13}\, e^{i(k_{13} - k_{12} - k_{11})x},$$

$$\left(A_{12}\right)_{,1} = \sigma_2 \bar{A}_{11} A_{13}\, e^{i(k_{13} - k_{12} - k_{11})x},$$

$$\left(A_{13}\right)_{,1} = \sigma_3 A_{11} A_{12}\, e^{i(k_{13} - k_{12} - k_{11})x}, \tag{52}$$

$$\sigma_\alpha = -\frac{N_1 k_{1\delta} k_{13}(k_{1\delta} + k_{13})}{2(\lambda + 2\mu)k_{1\alpha}}, \qquad \sigma_\alpha = -\frac{N_1 k_{11} k_{12}}{2(\lambda + 2\mu)}, \qquad \alpha + \delta = 3.$$

Систему (52) аналізують за умови узгодженості хвильових чисел $k_{11} \pm k_{12} = k_{13}$.

Вивчення еволюційних рівнянь складає окрему проблему. Слід сказати, що результати, отримані методами послідовних наближень і методом повільно змінних амплітуд, доповнюють один одного [36−38, 45, 46].

Метод, що ґрунтується на вейвлет-аналізі. Вейвлет-аналіз є мало відомим у механіці матеріалів. Він започаткований у 80-х роках 20-го століття і менш ніж за 20 років сформувався як теорія вейвлетів [6, 9, 21, 28, 29, 31, 44]. Ця теорія отримала екстраординарний розвиток у світовій науковій літературі з чистої та прикладної математики. З формальної математичної точки зору вейвлет-аналіз є певним розвитком Фур'є-аналізу в усіх його формах (неперервній, дискретній, інтегральній). Спеціально для динамічних задач фізики запропоновано групу *фізичних вейвлетів*. До них відносять електромагнітні та акустичні (Кайзер), гармонічні (Ньюланд) і пружні (Рущицький, Каттані).

Однією із сімей пружних вейвлетів є сім'я, материнський вейвлет якого має назву *мексіканський капелюх*:

$$\psi(x) = \left(2/\sqrt{3}\,\right)\pi^{-1/4}(1-x^2)e^{-x^2/2}. \tag{53}$$

Згадана сім'я, як і всі інші в теорії вейвлетів, утворюється з (53) операціями масштабування і трансляції $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k/2)$. Наближене подання функції за допомогою вейвлетів на скінченній кількості масштабів від j_0 до j_{00}) має вигляд

$$f(x) \approx (1/A)\sum_{j=j_0}^{j_{00}}\sum_{k\in Z} d_{j,k}\psi_{j,k}(x), \qquad d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{j,k}(x)\,dx. \tag{54}$$

Для прикладу покажемо деякі результати застосування вейвлетів *мексіканський капелюх* у задачі про еволюцію початкового профілю поодинокої поздовжньої хвилі в матеріалі з внутрішньою структурою у рамках моделі двофазної пружної суміші. Показані три рисунки є частиною виконаного комп'ютерного моделювання впливу розміру підошви поодинокої хвилі для реального композитного матеріалу з відомою внутрішньою структурою на еволюцію початкового профілю у вигляді мексіканського капелюха.

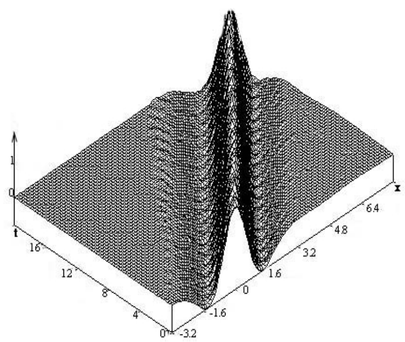

Рис. 1

На рис. 1 розмір підошви перевищує характерний розмір структури у 100 разів, на рис. 2 – у 50 разів і на рис. 3 – у 10 разів.

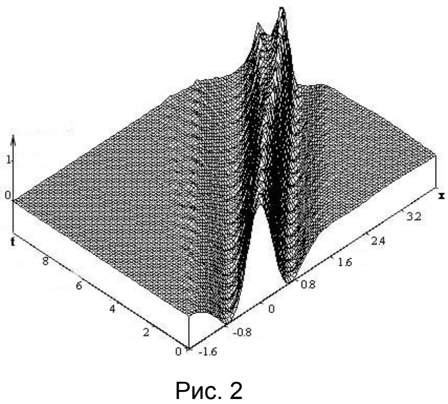

Рис. 2

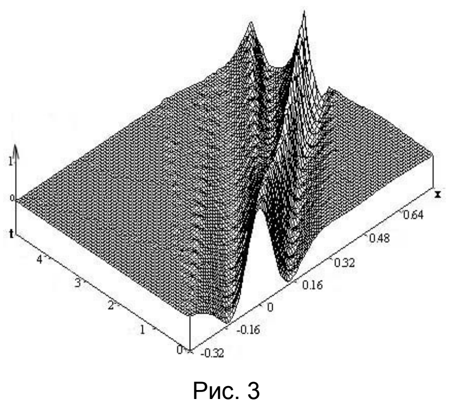

Рис. 3

Вигляд рисунків свідчить про ефективність застосованого підходу (у попередніх підходах в околі точки перегину профілю було *провалля*).

1. *Викторов И. А.* Об эффектах второго порядка в распространении волн в твердых телах // Акуст. журн. – 1963. – **9**, № 2. – С. 296–298.
2. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. – М.: Наука, 1990. – 432 с.
3. *Гедройц А. А.* Нелинейные эффекты при распространении ультразвуковых волн в твердых телах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Москва, 1964.
4. *Гедройц А. А., Красильников В. А.* Упругие волны конечной амплитуды в твердых телах и отклонения от закона Гука // Журн. теорет. эксперим. физики. – 1962. – **43**. – С. 1592–1594.
5. *Гедройц А. А., Заремба Л. К., Красильников В. А.* Упругие волны конечной амплитуды в твердых телах и ангармоничность решетки // Вестн. МГУ. Сер. физ. – 1962. – № 3. – С. 92–98.
6. *Геранін В. О., Писаренко Л. Д., Рущицький Я. Я.* Теорія вейвлетів з елементами фрактального аналізу. – К.: ВПФ УкрІНТЕІ, 2002. – 364 с.
7. *Гольдберг З. А.* О взаимодействии плоских продольных и поперечных волн // Акуст. журн. – 1960. – **6**, № 2. – С. 307–310.
8. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1986. – Т. 1: Общие вопросы. – 376 с.; Т. 2: Закономерности распространения. – 536 с.
9. *Дьяконов В. П.* Вейвлеты. От теории к практике. – Москва: СОЛОН-Р, 2002. – 448 с.
10. *Ерофеев В. И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – 328 с.
11. *Заремба Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. – М.: Наука, 1966. – 519 с.
12. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука, 1988. – 368 с.
13. *Крылов В. В., Красильников В. А.* Введение в физическую акустику. – М.: Наука, 1986. – 432 с.
14. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
15. *Нелинейные* волны. Распространение и взаимодействие / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. – М.: Наука, 1981. – 243 с.
16. *Рабинович М. П., Трубецков Д. П.* Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1984.– 432 с.
17. *Рущицький Я. Я., Цурпал С. І.* Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, 1998. – 377 с.
18. *Bretherton F. P.* Resonant interaction between waves. The case of discrete oscillations // J. Fluid Mech. – 1964. – **20**, No. 3. – P. 457–479.
19. *Cattani C., Rushchitsky J. J.* Plane waves in cubically nonlinear elastic media // Int. Appl. Mech.– 2002.– **38**, No. 11. – P. 1361–1365.
    Те саме: *Каттани К., Рущицкий Я. Я.* Плоские волны в кубически нелинейных упругих средах // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 11. – С. 88–93.
20. *Cattani C., Rushchitsky J. J., Sinchilo S. V.* Computer modelling the propagation of plane non-linearly elastic waves energy // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 5.
    Те саме: *Каттани К., Рущицкий Я. Я., Синчило С. В.* О распространении энергии плоских нелинейно упругих волн // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 5. – С. 93–97.
21. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. – Philadelphia: SIAM, 1982. – 357 p.
22. *Eringen A. C., Suhubi E. S.* Nonlinear theory of simple microelastic solids // Int. J. Engng. Sci. – 1964. – **2**, No. 2. – P. 189–203.
23. *Eringen A. C.* Theory of micromorphic materials with memory // Int. J. Engng. Sci. – 1972. – **10**, No. 7. – P. 623–641.
24. *Germain P.* Cours de mecanique des milieux continues. – Paris: Masson et Cie, 1973. – Vol. 1: Theorie generale. – 399 p.
25. *Jones G. L., Kobett D. R.* Interaction of elastic waves in an isotropic solid // J. Acoust. Soc. Amer. – 1963. – **35**, No. 3. – P. 5–10.
26. *Kroger H.* Electron-stimulated piezoelectric nonlinear acoustic effect in CdS // Appl. Phys. Lett. – 1964. – **4**, No. 11. – P. 190–192.
27. *Lighthill J.* Waves in fluids. – Cambridge–London: Cambridge Univ. Press, 1978. – 598 p.
28. *Mallat S.* A Wavelet tour of signal processing. – San Diego–New York–London: Acad. Press, 1999. – 637 p.
29. *Meyer Y.* Wavelets. Algorithms and Applications. – Philadelphia: SIAM, 1993. – 133 p.
30. *Mindlin R. D.* Micro-structure in linear elasticity // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1964. – **16**, No. 1. – P. 51–78.

31. *Newland D. E.* An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis. – London: Prentice Hall, 1993. – 471 p.
32. *Nonlinear* waves / Eds. S. Leibovich and A. R. Seebass. – Ithaka–London: Cornell Univ. Press, 1974. – 319 p.
33. *Prager W.* Introduction to mechanics of continua. – Boston: Ginn, 1961. – 312 p.
34. *Riemann B.* Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlichen Schwingungsweite // Abhandlungen der Königischen Gesellschaft zu Göttingen. – 1860. – Bd. VIII. – S. 43–65. – In: B. Riemann. Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlass und Nachtrage (Collected papers). – Berlin–Leipzig: Teubner Verlaggesellschaft, 1990. – 911 S.
35. *Rollins F. K.* Interaction of ultrasonic waves in solid media // Appl. Phys. Lett. – 1963. – **2**, No. 2. – P. 147–148.
36. *Rushchitsky J. J.* Nonlinear waves in solid mixtures (Survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No. 1. – P. 1–34.
    Те саме: *Рущицкий Я. Я.* Нелинейные волны в твердых смесях (Обзор) // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 1. – С. 3–38.
37. *Rushchitsky J. J.* Extension the microstructural theory of two-phase mixtures to composite materials // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, No. 5. – P. 586–614.
    Те саме: *Рущицкий Я. Я.* Развитие микроструктурной теории двухфазных смесей применительно к композитным материалам // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 5. – С. 33–65.
38. *Rushchitsky J. J.* Interaction of waves in solid mixtures // App. Mech. Rev. – 1999. – **52**, No. 2. – P. 35–74.
39. *Rushchitsky J. J.* Self-switching of displacement waves in elastic nonlinearly deformed materials // C. r. Acad. Sci. Ser. Iib. Mecanique. – 2002. – **330**, No. 2. – P. 175–180.
40. *Rushchitsky J. J., Cattani C.* Generation of the third harmonics by plane waves in Murnaghan materials // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 12. – P. 1482–1487.
    Те саме: *Рущицкий Я. Я., Каттани К.* Генерация третьей гармоники плоскими волнами в материалах, описываемых потнциалами Мэрнагана // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 12. – С. 82–88.
41. *Rushchitsky J. J., Cattani C.* The sub-harmonic resonance and the second harmonics in nonlinearly elastic bodies // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 1. – P. 93–98.
    Те саме: *Каттани К., Рущицкий Я. Я.* О субгармоническом резонансе и второй гармонике плоской волны в нелинейно упругих телах // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 1. – С. 109–115.
42. *Rushchitsky J. J., Cattani C., Terletska E. V.* On influence of the material microstructure characteristic size and the solitary wave bottom size on the character of wave evolution // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 2.
    Те саме: *Рущицкий Я. Я., Каттани К., Терлецкая Е. В.* О влиянии характерного размера микроструктуры материала и размера подошвы одиночной волны на характер эволюции волны // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 2. – С. 85–91.
43. *Rushchitsky J. J., Cattani C.* The third harmonics generation and wave quadruples // Abstr. of the GAMM Ann. Conf., Padua, Italy, 2003. – P. 146.
44. *Rushchitsky J. J., Cattani C.* Solitary elastic waves and elastic wavelets // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 6. – P. 132–144.
45. *Rushchitsky J. J., Cattani C.* Cubic nonlinear elastic waves: interaction, wave quadruples // 5th EUROMECH Solid Mech. Conf., Thessaloniki (Greece), 2003: Abstracts book. – P. 132.
46. *Rushchitsky J. J., Cattani C.* Shorten and evolution equations of interaction of plane cubic nonlinear elastic waves // Int. Appl. Mech. – 2003.– **39**, No. 9.
    Те саме: *Рущицкий Я. Я., Каттани К.* Укороченные эволюционные уравнения взаимодействия кубически нелинейных упругих волн // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 9. – (У друці).
47. *Rushchitsky J. J., Cattani C., Sinchilo S. V.* Cubic nonlinearity in elastic materials: theoretical prediction and computer modelling of new wave effects // Math. and Comp. Model. of Dynamical Systems. – 2003. – **10**, No. 11.
48. *Smith R. T.* Stress-induced anisotropy in solids – the acousto-elastic effect // Ultrasonics. – 1963. – **1**. – P. 135–142.
49. *Truesdell C., Toupin R. A.* The classical field theory. – Berlin: Springer, 1960. – P. 226–793. – (Handbuch der Physik / Ed. S. Flügge. – Vol. III/1).
50. *Whitham J.* Linear and nonlinear waves. – New York: Wiley Interscience, 1974. – 531 p.

ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ УПРУГИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Предлагается определенный взгляд на развитие теории упругих нелинейных волн. Для изложения позиции автора избран путь, когда анализируются некоторые ключевые особенности теории: систематическое изучение упругих нелинейных волн было начато не в нелинейной механике, а в нелинейной акустике; ряд основных понятий теории нелинейных волн пришел в теорию упругих волн из других разделов физики; основное внимание было и есть сосредоточено на гиперупругих материалах и главным источником основных уравнений является упругий потенциал Мернагана; в свою очередь, практически все модификации этого потенциал а предложены с целью учета влияния внутренней структуры материала; если базовые уравнения сформулированы в механике, то методы исследования заимствованы из разных разделов физики − оптики, радиофизики и физики плазмы; подобно иным разделам физики, сначала изучались квадратично нелинейные волны и только потом кубически нелинейные.

FEATURES OF DEVELOPMENT OF THE THEORY OF ELASTIC NONLINEAR WAVES

Certain view on development of the theory of elastic nonlinear waves is proposed. For explanation of author's position, the way is chosen when some key features of the theory are analyzed: the systematic studying the elastic nonlinear elastic waves was initiated not in the nonlinear mechanics but in the nonlinear acoustics; a number of basic notions of the theory of nonlinear waves got to the theory of elastic waves from other sections of physics; the main attention was and is concentrated on hyperelastic materials and the main source of the basic equations is Murnaghan's elastic potential; in turn, practically all modifications of this potential are proposed for taking into account the influence of material internal structure; if basic equations are formulated in mechanics, then research me thods are adopted from different sections of physics − optics, radio physics and physics of plasma; just as in other sections of physics, firstly the quadratically nonlinear waves have been studied and only then the cubically nonlinear ones.

Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
18.08.03