УДК 517.98

О. В. Лопушанський[1], М. І. Дмитришин[2]

АПРОКСИМАЦІЙНІ ПРОСТОРИ МІЖ БАНАХОВИМ ПРОСТОРОМ І ВЕКТОРАМИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

У термінах інтерполяційних просторів описано апроксимаційні простори між банаховим простором і просторами векторів експоненціального типу замкненого оператора.

Проблема найкращого наближення гладких векторів замкненого оператора векторами експоненціального типу сформульована у роботі [1]. Там же подано її розв'язок за припущення нормальності оператора в деякому гільбертовому оснащенні заданого банахового простору. У роботі [3] наведено її розв'язок для операторів з мероморфною резольвентою у термінах K-функціонала.

У пропонованій роботі встановлюємо, що кожний апроксимаційний простір між заданим банаховим простором і просторами векторів експоненціального типу є інтерполяційним простором для дійсного методу. Користуючись відомим зв'язком між апроксимацією та інтерполяцією [4], знаходимо вигляд нерівностей Джексона та Бернштейна (див. теорема 3) у випадку довільного замкненого оператора у банаховому просторі із щільною множиною векторів експоненціального типу. Як приклад розглянуто апроксимаційні простори між простором $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, і просторами векторів експоненціального типу оператора, породженого регулярною еліптичною граничною задачею.

1. Нехай $\mathscr{B}$ – банахів простір з нормою $\|\cdot\|$; A – замкнений необмежений лінійний оператор із щільною областю визначення $D(A)$. Дотримуючись [2], для довільних чисел $\nu > 0$, $1 \le p \le \infty$ визначимо банахові простори $E_p^\nu(A)$ векторів експоненціального типу оператора A. Норма в просторі $E_p^\nu(A)$ задається рівністю

$$\| x \|_{E_p^\nu(A)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{\| A^k x \|}{\nu^k} \right)^p \right)^{1/p} & : \quad p < \infty, \\ \sup\limits_{k \in \mathbb{R}_+} \dfrac{\| A^k x \|}{\nu^k} & : \quad p = \infty. \end{cases}$$

Означення 1. Нехай $0 < \nu,\ \alpha < \infty,\ \ 1 \le p,\ r \le \infty$. Тоді покладемо

$$E_{p,r}^{\nu,\alpha}(A) = \left\{ x \in \mathscr{B} : \| x \|_{E_{p,r}^{\nu,\alpha}(A)} = \left(\int\limits_0^\infty t^{\alpha r} \mathscr{E}_\nu(t,x)^r \, \frac{dt}{t} \right)^{1/r} < \infty \right\},$$

$$E_{p,\infty}^{\nu,\alpha}(A) = \left\{ x \in \mathscr{B} : \| x \|_{E_{p,\infty}^{\nu,\alpha}(A)} = \sup_{t>0} t^\alpha \mathscr{E}_\nu(t,x) < \infty \right\},$$

де $\mathscr{E}_\nu(t,x) = \inf\limits_{\| x_0 \|_{E_p^\nu(A)} \le t} \| x - x_0 \|$, $x_0 \in E_p^\nu(A)$, $0 < t < \infty$. Простір $E_{p,r}^{\nu,\alpha}(A)$ називаємо апроксимаційним простором між простором $\mathscr{B}$ і простором $E_p^\nu(A)$ векторів експоненціального типу, що не перевищує ν.

Для $0<\theta<1$ розглянемо інтерполяційний простір $(E_p^{\nu}(A),\mathcal{B})_{\theta,q}$ з нормою

$$\| x \|_{(E_p^{\nu}(A),\mathcal{B})_{\theta,q}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{\infty} (t^{-\theta}\mathcal{K}_{\nu}(t,x))^q \, \frac{dt}{t} \right)^{1/q} & : \quad q<\infty, \\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta}\mathcal{K}_{\nu}(t,x) & : \quad q=\infty, \end{cases}$$

де $\mathcal{K}_{\nu}(t,x) = \inf\limits_{x=x_0+x_1} (\| x_0 \|_{E_p^{\nu}(A)} + t\| x_1 \|)$, $x_0 \in E_p^{\nu}(A)$, $x_1 \in \mathcal{B}$. Надалі позначимо через $E_{p,r}^{\nu,\alpha}(A)^{\rho}$, $\rho>0$, простір $E_{p,r}^{\nu,\alpha}(A)$ з квазінормою $\| x \|^{\rho}_{E_{p,r}^{\nu,\alpha}(A)}$.

Теорема 1. *Нехай* $\theta = 1/(\alpha+1)$, $r=\theta q$ *і* $1\le p,q\le\infty$.

(***а***) *Виконується така рівність*:

$$E_{p,r}^{\nu,\alpha}(A)^{\theta} = (E_p^{\nu}(A),\mathcal{B})_{\theta,q}. \tag{1}$$

(***б***) *Існують такі числа* $c_1=c_1(\theta,r)$, $c_2=c_2(\theta,r)$, *що виконуються нерівності*

$$\mathcal{E}_{\nu}(t,x) \le c_1 t^{-\alpha} \| x \|_{E_{p,r}^{\nu,\alpha}(A)}, \qquad x\in E_{p,r}^{\nu,\alpha}(A),$$

$$\| x \|_{E_{p,r}^{\nu,\alpha}(A)} \le c_2 \| x \|^{\alpha}_{E_p^{\nu}(A)} \| x \|, \qquad x\in E_p^{\nu}(A). \tag{2}$$

Д о в е д е н н я. Норма простору $(E_p^{\nu}(A),\mathcal{B})_{\theta,q}$ еквівалентна

$$\| x \|^{*}_{(E_p^{\nu}(A),\mathcal{B})_{\theta,q}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{\infty} (t^{-\theta}\mathcal{K}_{\nu}(t,x))^q \, \frac{dt}{t} \right)^{1/q} & : \quad q<\infty, \\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta}\mathcal{K}_{\nu}(t,x) & : \quad q=\infty, \end{cases}$$

де $\mathcal{K}_{\nu}(t,x) = \inf\limits_{x=x_0+x_1} \max\{\| x_0 \|_{E_p^{\nu}(A)}, \| x_1 \|\}$.

Нехай $q=\infty$ і покладемо $t=\mathcal{K}_{\nu}(s,x)$. Тоді

$$(t^{\alpha}\mathcal{E}_{\nu}(t,x))^{\theta} \le s^{-\theta}\,\mathcal{K}_{\nu}(s,x),$$

звідки отримуємо $(E_p^{\nu}(A),\mathcal{B})_{\theta,\infty} \subset E_{p,\infty}^{\nu,\alpha}(A)^{\theta}$. Обернене вкладення випливає з нерівності

$$s^{-\theta}\mathcal{K}_{\nu}(s,x) \le (t^{\alpha}\mathcal{E}_{\nu}(t-0,x))^{\theta} \le \| x \|^{\theta}_{E_{p,\infty}^{\nu,\alpha}(A)},$$

де $\mathcal{E}_{\nu}(t-0,x) = \liminf\limits_{\tau\to t-0} \mathcal{E}_{\nu}(\tau,x)$.

У випадку $q<\infty$ маємо

$$\int\limits_0^{\infty} (s^{-\theta}\mathcal{K}_{\nu}(s,x))^q \frac{ds}{s} \sim -\int\limits_0^{\infty} \mathcal{K}_{\nu}(s,x)^q \, ds^{-\theta q} = \int\limits_0^{\infty} s^{-\theta q} \, d\mathcal{K}_{\nu}(s,x)^q =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} (t/\mathcal{E}_{\nu}(t,x))^{-\theta q} \, dt^q \sim \int\limits_0^{\infty} (t^{\alpha}\mathcal{E}_{\nu}(t,x))^{\theta q} \frac{dt}{t},$$

що й доводить рівність (1).

Згідно з теоремою 1.3.3 з [6] існують такі числа $c_1=c_1(\theta,r)$, $c_2 = c_2(\theta,r)>0$, що виконуються нерівності

$$\mathcal{K}_\nu(t,x) \le c_1 t^\theta \| x \|^\theta_{E^{\nu,\alpha}_{p,r}(A)}, \qquad x \in E^{\nu,\alpha}_{p,r}(A),$$

$$\| x \|^\theta_{E^{\nu,\alpha}_{p,r}(A)} \le c_2 \| x \|^{1-\theta}_{E^\nu_p(A)} \| x \|^\theta, \qquad x \in E^\nu_p(A). \tag{3}$$

Із рівності (1) маємо $t^{-\theta}\mathcal{K}_\nu(t,x) \sim (t^\alpha \mathcal{E}_\nu(t,x))^\theta$, а, отже, $\mathcal{K}_\nu(t,x) \sim t(\mathcal{E}_\nu(t,x))^\theta$. Звідси і з (3) отримуємо (2). Теорему доведено. ◊

Нехай $0 < \alpha_0, \alpha_1 < \infty$, $1 \le r_0, r_1, p, q \le \infty$ і $0 < \theta < 1$. Розглянемо інтерполяційний простір $(E^{\nu,\alpha_0}_{p,r_0}(A), E^{\nu,\alpha_1}_{p,r_1}(A))_{\theta,q}$ з нормою

$$\| x \|_{(E^{\nu,\alpha_0}_{p,r_0}(A), E^{\nu,\alpha_1}_{p,r_1}(A))_{\theta,q}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty (t^{-\theta}\mathcal{K}_{\nu,\alpha_0,\alpha_1}(t,x))^q \dfrac{dt}{t} \right)^{1/q} & : \quad q < \infty, \\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta}\mathcal{K}_{\nu,\alpha_0,\alpha_1}(t,x) & : \quad q = \infty, \end{cases}$$

де $\mathcal{K}_{\nu,\alpha_0,\alpha_1}(t,x) = \inf\limits_{x=x_0+x_1} \left(\| x_0 \|_{E^{\nu,\alpha_0}_{p,r_0}(A)} + t \| x_1 \|_{E^{\nu,\alpha_1}_{p,r_1}(A)} \right)$, $x_0 \in E^{\nu,\alpha_0}_{p,r_0}(A)$, $x_1 \in$ $\in E^{\nu,\alpha_1}_{p,r_1}(A)$, $x \in E^{\nu,\alpha_0}_{p,r_0}(A) + E^{\nu,\alpha_1}_{p,r_1}(A)$.

Теорема 2. *Нехай* $1 \le r_0, r_1, p, q \le \infty$ *і* $0 < \theta < 1$.

(***а***) *При* $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$ *і* $\alpha_0 \ne \alpha_1$ *виконується така рівність*:

$$(E^{\nu,\alpha_0}_{p,r_0}(A), E^{\nu,\alpha_1}_{p,r_1}(A))_{\theta,q} = E^{\nu,\alpha}_{p,q}(A). \tag{4}$$

(***б***) *При* $1/q = (1-\theta)/r_0 + \theta/r_1$ *виконується така рівність*:

$$(E^{\nu,\alpha}_{p,r_0}(A), E^{\nu,\alpha}_{p,r_1}(A))_{\theta,q} = E^{\nu,\alpha}_{p,q}(A). \tag{5}$$

Д о в е д е н н я. Із рівності (1) і теореми 1.3.3 з [6] випливає, що простори $E^{\nu,\alpha}_{p,r}(A)^\theta$ – банахові. Тому, згідно з теоремою про реітерацію ([4, розд. 3, § 3.5]), при $\theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1$, $\theta = 1/(\alpha+1)$, $r = \theta q$

$$(E^{\nu,\alpha_0}_{p,r_0}(A)^{\theta_0}, E^{\nu,\alpha_1}_{p,r_1}(A)^{\theta_1})_{\eta,q} = E^{\nu,\alpha}_{p,r}(A)^\theta. \tag{6}$$

Використовуючи теорему про степені ([4, розд. 3, § 3.11]), отримуємо

$$(E^{\nu,\alpha_0}_{p,r_0}(A)^{\theta_0}, E^{\nu,\alpha_1}_{p,r_1}(A)^{\theta_1})_{\eta,q} = (E^{\nu,\alpha_0}_{p,r_0}(A), E^{\nu,\alpha_1}_{p,r_1}(A))^\theta_{\rho,r}, \tag{7}$$

де $\rho = \eta\theta_1/\theta$. З рівностей (6) і (7) маємо

$$(E^{\nu,\alpha_0}_{p,r_0}(A), E^{\nu,\alpha_1}_{p,r_1}(A))_{\rho,r} = E^{\nu,\alpha}_{p,r}(A),$$

де $\alpha = (1-\rho)\alpha_0 + \rho\alpha_1$. Таким чином, рівність (4) встановлено.

Згідно з теоремою 3.4.5 з [4] при $\theta = 1/(\alpha+1)$, $r = \theta q$, $1/q = (1-\eta)/r_0 +$ $+ \eta/r_1$ отримуємо

$$(E^{\nu,\alpha}_{p,r_0}(A)^\theta, E^{\nu,\alpha}_{p,r_1}(A)^\theta)_{\eta,q} = E^{\nu,\alpha}_{p,r}(A)^\theta. \tag{8}$$

На підставі теореми про степені при $\eta = \theta$

$$(E^{\nu,\alpha}_{p,r_0}(A)^\theta, E^{\nu,\alpha}_{p,r_1}(A)^\theta)_{\eta,q} = (E^{\nu,\alpha}_{p,r_0}(A), E^{\nu,\alpha}_{p,r_1}(A))^\theta_{\theta,r}. \tag{9}$$

З рівностей (8) і (9) випливає рівність (5). Теорему доведено. ◊

На підставі рівності (4) з теореми 1.3.3 з роботи [6] отримуємо

Наслідок 1. *Існують такі числа* $c_1 = c_1(\theta, q)$, $c_2 = c_2(\theta, q) > 0$, *що виконуються нерівності*

$$\mathcal{K}_{\nu,\alpha_0,\alpha_1}(t, x) \le c_1 t^{\theta} \| x \|_{E^{\nu,\alpha}_{p,q}(A)}, \qquad x \in E^{\nu,\alpha}_{p,q}(A),$$

$$\| x \|_{E^{\nu,\alpha}_{p,q}(A)} \le c_2 \| x \|^{1-\theta}_{E^{\nu,\alpha_0}_{p,r_0}(A)} \| x \|^{\theta}_{E^{\nu,\alpha_1}_{p,r_1}(A)}, \qquad x \in E^{\nu,\alpha_0}_{p,r_0}(A) \bigcap E^{\nu,\alpha_1}_{p,r_1}(A).$$

Наслідок 2. *При* $1 \le q_0 \le q_1 \le \infty$ *справджуються неперервні вкладення* $E^{\nu,\alpha}_{p,q_0}(A) \subset E^{\nu,\alpha}_{p,q_1}(A)$. *Крім цього, якщо* $E^{\nu,\alpha_0}_{p,r_0}(A) \subset E^{\nu,\alpha_1}_{p,r_1}(A)$, *то при* $0 < \theta_0 < < \theta_1 < 1$

$$\left(E^{\nu,\alpha_0}_{p,r_0}(A), E^{\nu,\alpha_1}_{p,r_1}(A)\right)_{\theta_0,q_0} \subset \left(E^{\nu,\alpha_0}_{p,r_0}(A), E^{\nu,\alpha_1}_{p,r_1}(A)\right)_{\theta_1,q_1}.$$

2. Розглянемо апроксимаційний простір між простором $\mathcal{B}$ і простором $E(A) = \bigcup_{\nu>0} E^{\nu}_{p}(A)$, $1 \le p \le \infty$, усіх векторів експоненціального типу оператора A. У просторі $E(A)$ задамо норму $\| x \|_{E(A)} = \| x \| + \inf\{\nu : x \in E^{\nu}_{p}(A)\}$. Для $0 < \theta < 1$ визначимо інтерполяційний простір $(E(A), \mathcal{B})_{\theta,q}$ з нормою

$$\| x \|_{(E(A),\mathcal{B})_{\theta,q}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{\infty} (t^{-\theta}\mathcal{K}(t, x))^q \dfrac{dt}{t} \right)^{1/q} & : \quad q < \infty, \\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta}\mathcal{K}(t, x) & : \quad q = \infty, \end{cases}$$

де $\mathcal{K}(t, x) = \inf\limits_{x=x_0+x_1} \left(\| x_0 \|_{E(A)} + t\| x_1 \|\right)$, $x_0 \in E(A)$, $x_1 \in \mathcal{B}$.

Означення 2. Нехай $0 < \alpha < \infty$, $1 \le p$, $r \le \infty$. Тоді покладемо

$$E^{\alpha}_{p,r}(A) = \left\{ x \in \mathcal{B} : \| x \|_{E^{\alpha}_{p,r}(A)} = \left(\int\limits_0^{\infty} t^{\alpha r}\mathcal{E}(t, x)^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r} < \infty \right\},$$

$$E^{\alpha}_{p,\infty}(A) = \left\{ x \in \mathcal{B} : \| x \|_{E^{\alpha}_{p,\infty}(A)} = \sup_{t>0} t^{\alpha}\mathcal{E}(t, x) < \infty \right\},$$

де $\mathcal{E}(t, x) = \inf\limits_{\| x_0 \|_{E(A)} \le t} \| x - x_0 \|$, $x_0 \in E(A)$, $0 < t < \infty$.

Через $E^{\alpha}_{p,r}(A)^{\rho}$, $\rho > 0$, позначимо простір $E^{\alpha}_{p,r}(A)$ з квазінормою $\| x \|^{\rho}_{E^{\alpha}_{p,r}(A)}$.

Теорема 3. *Нехай* $\theta = 1/(\alpha + 1)$, $r = \theta q$ *і* $1 \le p, q \le \infty$.

(*а*) *Виконується така рівність*:

$$E^{\alpha}_{p,r}(A)^{\theta} = \left(E(A), \mathcal{B}\right)_{\theta,q}.$$

(**б**) *Існують такі числа* $c_1 = c_1(\theta, r)$, $c_2 = c_2(\theta, r)$, *що виконуються нерівності*

$$\mathcal{E}(t, x) \le c_1 t^{-\alpha} \| x \|_{E^{\alpha}_{p,r}(A)}, \qquad x \in E^{\alpha}_{p,r}(A),$$

$$\| x \|_{E^{\alpha}_{p,r}(A)} \le c_2 \| x \|^{\alpha}_{E(A)} \| x \|, \qquad x \in E(A).$$

Д о в е д е н н я аналогічне доведенню теореми 1. ◊

Позначимо через $\hat{E}^{\alpha}_{p,r}(A)$ поповнення простору $E^{\alpha}_{p,r}(A)$ за нормою $\|\cdot\|_{E^{\alpha}_{p,r}(A)}$. Нехай $0 < \alpha_0, \alpha_1 < \infty$, $1 \le r_0, r_1, p, q \le \infty$ і $0 < \theta < 1$. Визначимо інтерполяційний простір $(\hat{E}^{\alpha_0}_{p,r_0}(A), \hat{E}^{\alpha_1}_{p,r_1}(A))_{\theta,q}$ з нормою

$$\| x \|_{(\hat{E}^{\alpha_0}_{p,r_0}(A), \hat{E}^{\alpha_1}_{p,r_1}(A))_{\theta,q}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{\infty} (t^{-\theta} \mathcal{K}_{\alpha_0,\alpha_1}(t,x))^q \, \dfrac{dt}{t} \right)^{1/q} & : \quad q < \infty, \\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta} \, \mathcal{K}_{\alpha_0,\alpha_1}(t,x) & : \quad q = \infty, \end{cases}$$

де $\mathcal{K}_{\alpha_0,\alpha_1}(t,x) = \inf\limits_{x=x_0+x_1} \left(\| x_0 \|_{\hat{E}^{\alpha_0}_{p,r_0}(A)} + t \| x_1 \|_{\hat{E}^{\alpha_1}_{p,r_1}(A)} \right)$, $x_0 \in \hat{E}^{\alpha_0}_{p,r_0}(A)$, $x_1 \in \hat{E}^{\alpha_1}_{p,r_1}(A)$, $x \in \hat{E}^{\alpha_0}_{p,r_0}(A) + \hat{E}^{\alpha_1}_{p,r_1}(A)$.

Теорема 4. *Нехай* $1 \le r_0, r_1, p, q \le \infty$ *і* $0 < \theta < 1$.

(***а***) *При* $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$ *і* $\alpha_0 \ne \alpha_1$ *виконується така рівність*:

$$(\hat{E}^{\alpha_0}_{p,r_0}(A), \hat{E}^{\alpha_1}_{p,r_1}(A))_{\theta,q} = \hat{E}^{\alpha}_{p,q}(A).$$

(***б***) *При* $1/q = (1-\theta)/r_0 + \theta/r_1$ *виконується така рівність*:

$$(\hat{E}^{\alpha}_{p,r_0}(A), \hat{E}^{\alpha}_{p,r_1}(A))_{\theta,q} = \hat{E}^{\alpha}_{p,q}(A).$$

Д о в е д е н н я аналогічне доведенню теореми 2. ◊

Згідно з теоремою 1.3.3 з [6] існують такі числа $c_1 = c_1(\theta, q)$, $c_2 = c_2(\theta, q) > 0$, що виконуються нерівності

$$\mathcal{K}_{\alpha_0,\alpha_1}(t,x) \le c_1 t^{\theta} \| x \|_{\hat{E}^{\alpha}_{p,q}(A)}, \qquad x \in \hat{E}^{\alpha}_{p,q}(A),$$

$$\| x \|_{\hat{E}^{\alpha}_{p,q}(A)} \le c_2 \| x \|^{1-\theta}_{\hat{E}^{\alpha_0}_{p,r_0}(A)} \| x \|^{\theta}_{\hat{E}^{\alpha_1}_{p,r_1}(A)}, \qquad x \in \hat{E}^{\alpha_0}_{p,r_0}(A) \cap \hat{E}^{\alpha_1}_{p,r_1}(A).$$

При $1 \le q_0 \le q_1 \le \infty$ справджуються неперервні вкладення $\hat{E}^{\alpha}_{p,q_0}(A) \subset \hat{E}^{\alpha}_{p,q_1}(A)$. Крім цього, якщо $\hat{E}^{\alpha_0}_{p,r_0}(A) \subset \hat{E}^{\alpha_1}_{p,r_1}(A)$, то при $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$

$$(\hat{E}^{\alpha_0}_{p,r_0}(A), \hat{E}^{\alpha_1}_{p,r_1}(A))_{\theta_0,q_0} \subset (\hat{E}^{\alpha_0}_{p,r_0}(A), \hat{E}^{\alpha_1}_{p,r_1}(A))_{\theta_1,q_1}.$$

3. Нехай Ω − обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з границею $\partial\Omega$ класу C^{∞} і набір операторів

$$(Lu)(t) = \sum_{|\beta| \le 2m} a_{\beta} D^{\beta} u(t), \qquad a_{\beta} \in C,$$

$$(B_j u)(t) = \sum_{|\beta| \le m_j} b_{j,\beta} D^{\beta} u(t), \qquad b_{j,\beta} \in C^{\infty}(\partial\Omega), \quad j = 1, \ldots, m,$$

є регулярно еліптичним (див. означення 5.2.1/4 з [6]). У просторі $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, розглянемо замкнений оператор A, заданий співвідношеннями

$$Au = Lu, \qquad D(A) = W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega), \tag{10}$$

де $W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega) = \left\{ u \in W^{2m}_p(\Omega) : B_j u \big|_{\partial\Omega} = 0, \quad j = 1, \ldots, m \right\}$.

Теорема 5. *Для оператора* A, *заданого співвідношеннями* (10), *виконується рівність*

$$E^{\alpha}_{p,r}(A) = \left\{ u \in B^{\alpha}_{p,r}(\Omega) : B_j A^k u \Big|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1,\ldots,m, \quad k = 0,1,\ldots \right\}, \qquad (11)$$

де $B^{\alpha}_{p,r}(\Omega)$ *– простір Бєсова порядку* $\alpha > 0$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо банахові простори

$$E^{\nu}_{p}(D) = \left\{ u(t) \in C^{\infty}(\bar{\Omega}) : D^{\beta} u(t) \in L_p(\Omega),\ |\beta| = k,\ k \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

з нормами

$$\| u \|_{E^{\nu}_{p}(D)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=k} \left(\frac{\| D^{\beta} u \|_{L_p(\Omega)}}{\nu^k} \right)^p \right)^{1/p} < \infty .$$

Простір $E(D) \equiv \bigcup_{\nu>0} E^{\nu}_{p}(D)$ співпадає з простором $\operatorname{Exp} \mathbb{C}^n$ цілих функцій експоненціального типу, які належать $L_p(\Omega)$ (лема 3 з [5]).

Визначимо простір $E^{\alpha}_{p,r}(D) = \left\{ u \in L_p(\Omega) : \| u \|_{E^{\alpha}_{p,r}(D)} < \infty \right\}$ з нормою

$$\| u \|_{E^{\alpha}_{p,r}(D)} = \left(\int_0^{\infty} t^{\alpha r} \mathcal{E}(t,u)^r \, \frac{dt}{t} \right)^{1/r},$$

де

$$\mathcal{E}(t,u) = \inf_{\| u_0 \|_{E(D)} \le t} \| u - u_0 \|,$$

$$\| u_0 \|_{E(D)} = \| u_0 \| + \inf \left\{ \mu : u_0 \in E^{\mu}_{p}(D) \right\},\ \ 0 < \mu < \infty .$$

Простір $E^{\alpha}_{p,r}(D)$ співпадає з класичним простором Бєсова $B^{\alpha}_{p,r}(\Omega)$. Дійсно, використовуючи теореми 7.1.7, 3.11.5 з [4] і теорему 2.4.1 з [6], отримуємо

$$E^{\alpha}_{p,r}(D) = \left(\left(E(D), L_p(\Omega) \right)_{1/(\alpha+1),\, r(\alpha+1)} \right)^{\alpha+1} =$$

$$= \left(\left(L_p(\Omega), B^{s}_{p,p}(\Omega) \right)^{1/(s+1)}_{\alpha(s+1)/s(\alpha+1),\, r(\alpha+1)} \right)^{\alpha+1} =$$

$$= \left(L_p(\Omega), B^{s}_{p,p}(\Omega) \right)_{\alpha/s,\, r} = B^{\alpha}_{p,r}(\Omega) . \qquad (12)$$

Згідно з теоремою 3 з [5] виконується рівність

$$\bigcup_{\nu>0} E^{\nu}_{p}(A) = \left\{ u \in E(D) : B_j A^k u \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad j = 1,\ldots,m, \quad k = 0,1,\ldots \right\} .$$

Звідси та з (12), враховуючи рівність $\| u \|_{E^{\alpha}_{p,r}(D)} = \| u \|_{E^{\alpha}_{p,r}(A)}$, $u \in E^{\alpha}_{p,r}(A)$, отримуємо рівність (11). Теорему доведено. ◊

Відмітимо, що $\| u \|_{E^{\alpha}_{p,r}(A)} \le \| u \|_{E^{\nu,\alpha}_{p,r}(A)}$, $u \in E^{\nu,\alpha}_{p,r}(A)$, а тому виконуються неперервні вкладення

$$E^{\nu,\alpha}_{p,r}(A) \subset \left\{ u \in B^{\alpha}_{p,r}(\Omega) : B_j A^k u \Big|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1,\ldots,m, \quad k = 0,1,\ldots \right\} .$$

1. *Горбачук М. Л., Горбачук В. І.* Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 5. – С. 616–628.
2. *Радыно Я. В.* Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 9. – С. 1559–1569.
3. *Радзиевский Г. В.* Прямые и обратные теоремы в задачах о приближении по векторам конечной степени // Мат. сб. – 1998. – **189**, № 4. – С. 83–124.
4. *Bergh J., Löfström J.* Interpolation spaces. An introduction. – Berlin: Springer, 1976. – 247 p.
5. *Lopushansky O. V., Dmytryshyn M. I.* Vectors of exponential type of operators with discrete spectrum // Праці Львів. мат. товариства. – 1998. – **9**, № 1. – С. 70–77.
6. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. – Berlin: Springer, 1995. – 664 p.

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА МЕЖДУ БАНАХОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ И ВЕКТОРАМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

В терминах интерполяционных пространств описаны аппроксимационные пространства между банаховым пространством и пространствами векторов экспоненциального типа замкнутого оператора.

APPROXIMATION SPACES BETWEEN BANACH SPACE AND EXPONENTIAL TYPE VECTORS

Approximation spaces between Banach space and spaces of exponential type vectors of closed operator are described in terms of interpolation spaces.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

[2] Прикарпат. ун-т ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано 17.07.03