УДК 517.512

Л. Г. Коваленко

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ СРЕДНИХ ЧЕЗАРО ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА ДВОЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Получено представление средних Чезаро отрицательного порядка двойных ортогональных рядов через некоторые подпоследовательности их прямоугольных частных сумм.

Пусть $\mathbb{Z}_+^2 = \{i = (i_1, i_2)\}$ – множество точек из $\mathbb{R}^2$ с целыми неотрицательными координатами, частично упорядоченное соглашением, что неравенство $i \le n$ для $i, n \in \mathbb{Z}_+^2$ означает $i_1 \le n_1$ и $i_2 \le n_2$. Всюду в дальнейшем считаем $i, k, n \in \mathbb{Z}_+^2$. Условимся также обозначать $n^* = \max\{n_1, n_2\}$, $n_* = \min\{n_1, n_2\}$ и для $x, y \in \mathbb{R}_+^2$, $z \in \mathbb{Z}_+^2$ будем писать $\| x \| = x_1 \cdot x_2$, $x \pm y = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2)$, $z^x = (z_1^{x_1}, z_2^{x_2})$.

Пусть $\varphi = \{\varphi_i(x),\ x \in X = (0,1)^2\}$ – двойная ортонормированная система (ОНС), $S_n(x)$ – прямоугольные суммы двойного ортогонального ряда

$$\sum_{i \ge 0} a_i \varphi_i \equiv \sum_{i_1 = 0}^{\infty} \sum_{i_2 = 0}^{\infty} a_{i_1 i_2} \varphi_{i_1 i_2}(x), \qquad x \in X, \qquad \{a_i : i \in \mathbb{Z}_+^2\} \in l^2, \tag{1}$$

и $\sigma_n^{-\alpha}(x)$ – средние Чезаро отрицательного порядка ряда (1). По определению

$$\sigma_n^{-\alpha}(x) \equiv \sigma_{n_1 n_2}^{-\alpha_1, -\alpha_2}(x) = \frac{1}{\| A_n^{-\alpha} \|} \sum_{i \le n} \| A_{n-i}^{-\alpha} \| a_i \, \varphi_i(x), \quad 0 < \alpha_j < 1, \quad j = 1, 2,$$

где $\| A_n^{-\alpha} \| = A_{n_1}^{-\alpha_1} \cdot A_{n_2}^{-\alpha_2}$ и $A_{n_j}^{-\alpha_j} = \binom{n_j - \alpha_j}{n_j}$ – биноминальные коэффициенты, $j = 1, 2$. В дальнейшем будем использовать без всяких ссылок различные свойства биномиальных коэффициентов (см., например, [3, с. 130, 131]).

Свойства последовательности средних Чезаро отрицательного порядка обычных однократных ортогональных рядов вида (1) изучались рядом авторов в [1, 5, 6]. G. Sunouchi, S. Yano (см. [6]) получили в этом случае достаточное условие сходимости почти всюду последовательности $\sigma_n^{-\alpha}(x)$, которое В. А. Андриенко в [1] дополнил точной оценкой скорости сходимости почти всюду. Затем в работе Д. В. Брегвадзе [5] было установлено, что достаточное условие из [6] является также необходимым условием сходимости почти всюду последовательности чезаровских средних однократных ортогональных рядов вида (1) на классе всех ОНС, и был доказан аналог результата Sunouchi и Yano для двойных ортогональных рядов.

В настоящей работе получено представление средних Чезаро отрицательного порядка ряда (1) через некоторые подпоследовательности его прямоугольных частных сумм. Доказанная ниже теорема является двумерным аналогом леммы 3 из [1] и содержит, как и в одномерном случае, ключевую идею решения задач о скорости сходимости чезаровских средних отрицательного порядка двойных ортогональных рядов и оценке порядка их роста.

Рассмотрим неубывающую по каждой переменной двойную последовательность действительных чисел $\{\lambda(n) = \lambda(n_1, n_2) > 0\}$, стремящуюся к бесконечности при $n^* \to \infty$. Обозначим через $\lambda_1(n_1) = \lambda(n_1, 0)$ и $\lambda_2(n_2) = \lambda(0, n_2)$

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2003. – 46, № 3. – С. 48-53.

ее следы на координатных осях. Не ограничивая общности, предполагаем, что $\lambda(0,0)=\lambda_1(0)=\lambda_2(0)=1$.

Теорема. *Пусть последовательность* $\{\lambda(n)=\lambda(n_1,n_2)>0\}$ *такова, что по каждой переменной*

$$\lambda(n)\left\|(n+1)^{-\alpha}\right\|\uparrow \tag{2}$$

и $\{m_k=(m_{k_1},m_{k_2})>0\}$ *– некоторая строго возрастающая последовательность из* $\mathbb{Z}_+^2$, *которая обладает следующими свойствами:*

$$1<q_j\le m_{k_j+1}/m_{k_j}\le r_j,\qquad j=1,2, \tag{3}$$

и для некоторых $\gamma_j\in(0,1)$

$$\lambda_j(m_{k_j})m_{k_j}^{-1-\gamma_j}\downarrow,\qquad j=1,2. \tag{4}$$

Тогда при условии

$$\sum_{i\ge 0}a_i^2\,\lambda^2(i)<\infty \tag{5}$$

для любого $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $0<\alpha_j<1$, $j=1,2$, *любой ОНС* φ, $x\in X$, *и* $m_k<n\le m_{k+1}$ *справедливо равенство*

$$\sigma_n^{-\alpha}(x)=S_{m_k}(x)+\frac{\alpha_1}{n_1}S_{m_k}^{(1)}(x)+\frac{\alpha_2}{n_2}S_{m_k}^{(2)}(x)+\left\|\frac{\alpha}{n}\right\|S_{m_k}^{(1,2)}(x)+r_n(x), \tag{6}$$

где $S_{m_k}^{(1)}(x)=\sum\limits_{i\le m_k}i_1a_i\varphi_i(x)$, $S_{m_k}^{(2)}(x)=\sum\limits_{i\le m_k}i_2a_i\varphi_i(x)$, $S_{m_k}^{(1,2)}(x)=\sum\limits_{i\le m_k}\|i\|a_i\varphi_i(x)$ *и почти всюду на* X

$$r_n(x)=\overline{\overline{o}}_x\{(n_1+1)^{\alpha_1}/\lambda_1(n_1)+(n_2+1)^{\alpha_2}/\lambda_2(n_2)\}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим сначала, что соотношение $r_n(x)=\overline{\overline{o}}_x(\gamma_n)$ почти всюду на X, где γ_n – двойная последовательность положительных чисел, означает, что $r_n(x)\gamma_n^{-1}\to 0$ почти всюду при $n_*\to\infty$ и существует функция $F(x)\in L^2(X)$ такая, что $|r_n(x)|\gamma_n^{-1}\le F(x)$ для всех $x\in X, n\in\mathbb{Z}_+^2$.

По определению для $m_k<n\le m_{k+1}$ справедливо представление (6) с

$$r_n(x)=\sum_{i\le m_k}\left(\left\|A_{n-i}^{-\alpha}/A_n^{-\alpha}\right\|-1-\|\alpha i/n\|-\alpha_1 i_1/n_1-\alpha_2 i_2/n_2\right)a_i\varphi_i(x)+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\sum_{i\in P_j}\left\|A_{n-i}^{-\alpha}/A_n^{-\alpha}\right\|a_i\varphi_i(x)\equiv\rho_n(x)+\sum_{j=1}^{3}r_n^{(j)}(x), \tag{8}$$

а множества $P_j\subset\mathbb{Z}_+^2$ определяются неравенствами

$$P_1=\{i=(i_1,i_2)\in\mathbb{Z}_+^2:\ m_{k_1}+1\le i_1\le n_1,\quad 0\le i_2\le m_{k_2}\},$$

$$P_2=\{i=(i_1,i_2)\in\mathbb{Z}_+^2:\ 0\le i_1\le m_{k_1},\quad m_{k_2}+1\le i_2\le n_2\},$$

$$P_3=\{i=(i_1,i_2)\in\mathbb{Z}_+^2:\ m_{k_1}+1\le i_1\le n_1,\quad m_{k_2}+1\le i_2\le n_2\}.$$

По аналогии с доказательством леммы 2 [2, с. 7] можно доказать, что

$$\rho_n(x) = \bar{\bar{o}}_x \left\{ \frac{(n_1+1)^{\alpha_1}}{\lambda_1(n_1)} + \frac{(n_2+1)^{\alpha_2}}{\lambda_2(n_2)} \right\}. \tag{9}$$

Для оценки $r_n^{(3)}(x)$, полагая $\delta = -(\alpha+1)/2$ (где $-\alpha-\delta = (1-\alpha)/2 > 0$, $\delta > -1$), имеем

$$r_n^{(3)}(x) = \left\| A_n^{-\alpha} \right\|^{-1} \sum_{i \in P_3} a_i \varphi_i(x) \sum_{i \le l \le n} \left\| A_{n-l}^{-\alpha-\delta-1} A_{l-i}^{\delta} \right\| =$$

$$= \left\| A_n^{-\alpha} \right\|^{-1} \sum_{m_k < l \le n} \left\| A_{n-l}^{-\alpha-\delta-1} A_l^{\delta} \right\| \tilde{\sigma}_l^{\delta}(x),$$

где

$$\tilde{\sigma}_l^{\delta}(x) = \left\| A_l^{\delta} \right\|^{-1} \sum_{m_k < i \le l} \left\| A_{l-i}^{\delta} \right\| a_i \varphi_i(x).$$

Тогда

$$\left| r_n^{(3)}(x) \right|^2 \le C(\alpha) \left\| n^{2\alpha} \right\| \sum_{l=m_k+1}^{n} \left\| ((n+1-l)(l+1))^{-\alpha-1} \right\| \sum_{i=m_k+1}^{n} \left| \tilde{\sigma}_l^{\delta}(x) \right|^2 \le$$

$$\le C(\alpha) \left\| m_k^{\alpha-1} \right\| \sum_{m_k < l \le n} \left| \tilde{\sigma}_l^{\delta}(x) \right|^2.$$

(Через $C(\alpha)$ здесь и далее обозначены некоторые постоянные, зависящие от указанного параметра и, вообще говоря, от r_j и q_j, $j = 1, 2$). Следовательно,

$$\int_X \sup_{m_k < n \le m_{k+1}} \left| r_n^{(3)}(x) \right|^2 dx \le$$

$$\le C(\alpha) \left\| m_k^{\alpha-1} \right\| \sum_{m_k < i \le m_{k+1}} a_i^2 \sum_{i \le l \le m_{k+1}} \left\| (l+1)^{\alpha+1} (l+1-i)^{-\alpha-1} \right\| \le$$

$$\le C(\alpha) \left\| m_k^{2\alpha} \right\| \sum_{m_k < i \le m_{k+1}} a_i^2.$$

Отсюда и из (5) получаем

$$\sum_{k \ge 0} \lambda^2(m_k) \left\| (m_k+1)^{-2\alpha} \right\| \int_X \sup_{m_k < n \le m_{k+1}} \left| r_n^{(3)}(x) \right|^2 dx \le$$

$$\le C(\alpha) \sum_{k \ge 0} \lambda^2(m_k) \sum_{m_k < i \le m_{k+1}} a_i^2 \le C(\alpha) \sum_{i \ge 0} a_i^2 \lambda^2(i) < \infty,$$

что влечет по теореме Леви с учетом (2)–(4) оценку

$$r_n^{(3)}(x) = \bar{\bar{o}}_x \left\{ \frac{\left\| (m_k+1)^{\alpha} \right\|}{\lambda(m_k)} \right\} = \bar{\bar{o}}_x \left\{ \frac{(n_1+1)^{\alpha_1}}{\lambda_1(n_1)} + \frac{(n_2+1)^{\alpha_2}}{\lambda_2(n_2)} \right\}, \tag{10}$$

поскольку

$$\left[\frac{(i_1+1)^{\alpha_1}}{\lambda_1(i_1)} + \frac{(i_2+1)^{\alpha_2}}{\lambda_2(i_2)} \right]^{-1} \le \frac{\lambda(i)}{2 \left\| (i+1)^{\alpha} \right\|},$$

так как следы неубывающей последовательности связаны неравенством $\left[1/\lambda_1(n_1) + 1/\lambda_2(n_2) \right]^{-1} \le \lambda(n)/2$.

Оценим теперь порядок величины $r_n^{(2)}(x)$. Для этого представим $r_n^{(2)}(x)$ в виде

$$r_n^{(2)}(x) = \left\| A_n^{-\alpha} \right\|^{-1} \sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{n_2} \left\| A_{n-i}^{-\alpha} \right\| a_i \varphi_i(x) +$$

$$+ \left\| A_n^{-\alpha} \right\|^{-1} \sum_{i_1=m_{k_1-1}+1}^{m_{k_1}} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{n_2} \left\| A_{n-i}^{-\alpha} \right\| a_i \varphi_i(x) \equiv b_n^{(1)}(x) + b_n^{(2)}(x). \quad (11)$$

Для $b_n^{(2)}(x)$ при $n_* \to \infty$ справедлива оценка вида (10):

$$b_n^{(2)}(x) = o_x \left\{ \frac{\left\| (m_{k-1}+1)^{\alpha} \right\|}{\lambda(m_{k-1})} \right\} = o_x \left\{ \frac{(n_1+1)^{\alpha_1}}{\lambda_1(n_1)} + \frac{(n_2+1)^{\alpha_2}}{\lambda_2(n_2)} \right\}. \quad (12)$$

Полагая $\delta = -(\alpha_2+1)/2$, заметим, что

$$b_n^{(1)}(x) = \left\| A_n^{-\alpha} \right\|^{-1} \sum_{i_1 \le m_{k_1-1}} A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{n_2} a_i \varphi_i(x) \sum_{i_2 \le p \le n_2} A_{n_2-p}^{-\alpha_2-\delta-1} A_{p-i_2}^{\delta} =$$

$$= \frac{1}{A_{n_2}^{-\alpha_2}} \sum_{p=m_{k_2}+1}^{n_2} A_{n_2-p}^{-\alpha_2-\delta-1} \left(\frac{1}{A_{n_1}^{-\alpha_1}} \sum_{i_1 \le m_{k_1-1}} A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{p} A_{p-i_2}^{\delta} a_i \varphi_i(x) \right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{A_{n_2}^{-\alpha_2}} \sum_{p=m_{k_2}+1}^{n_2} A_{n_2-p}^{-\alpha_2-\delta-1} S_p(x),$$

где для каждого натурального $p \in (m_{k_2}, n_2]$

$$S_p(x) = \frac{1}{A_{n_1}^{-\alpha_1}} \sum_{i_1 \le m_{k_1-1}} A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{p} A_{p-i_2}^{\delta} a_i \varphi_i(x).$$

Тогда, согласно неравенству Коши − Буняковского, для всех $n_1 > m_{k_1}$ и $m_{k_2} < n_2 \le m_{k_2+1}$ имеем оценку

$$\left[b_n^{(1)}(x) \right]^2 \le C(\alpha_2) m_{k_2}^{2\alpha_2} \sum_{p=m_{k_2}+1}^{n_2} (n_2 - p + 1)^{-\alpha_2-1} \sum_{p=m_{k_2}+1}^{n_2} S_p^2(x). \quad (13)$$

Применяя теперь к $S_p(x)$ последовательно преобразование Абеля и неравенство Коши − Буняковского, получаем

$$S_p(x) = \frac{1}{A_{n_1}^{-\alpha_1}} \left\{ \sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}-1} \Delta A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1} \sum_{j \le i_1} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{p} A_{p-i_2}^{\delta} a_{ji_2} \varphi_{ji_2}(x) + \right.$$

$$\left. + A_{n_1-m_{k_1-1}}^{-\alpha_1} \sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{p} A_{p-i_2}^{\delta} a_i \varphi_i(x) \right\},$$

$$\left[S_p(x) \right]^2 \le C(\alpha_1) \left\{ \frac{1}{m_{k_1-1}} \sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}-1} \left[\sum_{j=0}^{i_1} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{p} A_{p-i_2}^{\delta} a_{ji_2} \varphi_{ji_2}(x) \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{p} A_{p-i_2}^{\delta} a_i \varphi_i(x) \right]^2 \right\}. \quad (14)$$

В самом деле, поскольку $\Delta A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1} = A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1} - A_{n_1-i_1-1}^{-\alpha_1} = A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1-1} < 0$, то

$$\sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}-1} \left| \Delta A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1} \right| = \left| A_{n_1}^{-\alpha_1} - A_{n_1-m_{k_1-1}-1}^{-\alpha_1} \right| < A_{n_1-m_{k_1-1}-1}^{-\alpha_1}$$

и на основании (3) для всех $0 \le i_1 \le m_{k_1-1}$ имеем

$$\frac{1}{A_{n_1}^{-\alpha_1}} \sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}-1} \left| \Delta A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1} \right| < \frac{A_{n_1-m_{k_1-1}}^{-\alpha_1}}{A_{n_1}^{-\alpha_1}} \le C(\alpha_1) \frac{n_1^{\alpha_1}}{(n_1 - m_{k_1-1})^{\alpha_1}} \le C(\alpha_1),$$

$$\frac{\left| \Delta A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1} \right|}{A_{n_1}^{-\alpha_1}} = \frac{\left| A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1-1} \right|}{A_{n_1}^{-\alpha_1}} \le C(\alpha_1) \frac{n_1^{\alpha_1}}{(n_1 - i_1)^{\alpha_1+1}} \le \frac{C(\alpha_1)}{m_{k_1-1}}.$$

Полагая

$$\Psi_{m_k}(x) = \sup\left\{ \left[b_n^{(1)}(x) \right]^2 : n_1 \ge m_{k_1}, \quad m_{k_2} < n_2 \le m_{k_2+1} \right\}, \tag{15}$$

из (13)–(15) получаем, что

$$\int_X \max_{m_k < n \le m_{k+1}} \left| b_n^{(1)}(x) \right|^2 dx \le \int_X \Psi_{m_k}(x)\, dx \le$$

$$\le C(\alpha_1)\, m_{k_2}^{2\alpha_2} \sum_{p=m_{k_2}+1}^{m_{k_2+1}} \sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}-1} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{p} (p+1-i_2)^{-1-\alpha_2} a_i^2 \le$$

$$\le C(\alpha_1)\, m_{k_2}^{2\alpha_2} \sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}-1} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{m_{k_2+1}} a_i^2 .$$

Определив теперь последовательность

$$F_{k_1}(x) = \sum_{k_2 \ge 0} \lambda_2^2(m_{k_2})\,(m_{k_2}+1)^{-2\alpha_2}\, \Psi_{m_k}(x) \le F_2(x),$$

легко видеть, что

$$\int_X F_2(x)\, dx \le C(\alpha_1) \sum_{i_1=0}^{m_1-1} \sum_{k_2 \ge 0} \lambda_2^2(m_{k_2}) \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{m_{k_2+1}} a_i^2 \le$$

$$\le C(\alpha_1) \sum_{i \ge 0} a_i^2\, \lambda^2(i) < \infty .$$

Тогда по теореме Леви, признаку Вейерштрасса, учитывая (2)–(4), получаем оценку

$$b_n^{(1)}(x) = o_x\left\{ (n_2+1)^{\alpha_2} / \lambda_2(n_2) \right\} \text{ при } n_2 \to \infty \text{ равномерно по } n_1 . \tag{16}$$

Из (11), (12) и (16) следует, что

$$r_n^{(2)}(x) = o_x \left\{ \frac{(n_1+1)^{\alpha_1}}{\lambda_1(n_1)} + \frac{(n_2+1)^{\alpha_2}}{\lambda_2(n_2)} \right\}, \qquad n_* \to \infty . \tag{17}$$

Очевидно, что величина $r_n^{(1)}$ имеет такой же порядок.

Теперь утверждение теоремы следует из (8)–(10), (17). Отметим только, что, в соответствии с нашими обозначениями, оценка остатка (7) предполагает не только порядок приближения почти всюду, но и наличие мажоранты $F(x) \in L^2$ (см., например, замечание 2 из [4, с. 249]).

Теорема доказана. ◊

Сопоставляя доказанную теорему с аналогичным результатом для последовательности средних Чезаро положительного порядка двойных ортогональных рядов (см. лемму 2 из [2]), можно получить соотношение между чезаровскими средними положительного и отрицательного порядков и тем самым на основании теоремы 1 из [2] установить точные по порядку на классе всех ОНС оценки скорости чезаровского суммирования отрицательного порядка двойных ортогональных рядов.

1. *Андриенко В. А.* О суммируемости ортогональных рядов методами Чезаро отрицательного порядка // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 9. – С. 3–10.
2. *Андриенко В. А., Коваленко Л. Г.* Аппроксимативные свойства средних Чезаро двойных ортогональных рядов // Вісн. Одес. держ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2000. – **5**, № 3. – С. 5–11.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 616 с.
4. *Andrienko V. A.* Rate of approximation by rectangular partial sums of double orthogonal series // Anal. Math. – 1996. – **22**. – P. 243–266.
5. *Bregvadze D. V.* On the $(C, \ -1 < \alpha < 0, \ -1 < \beta < 0)$-summability on single and double orthogonal series // Acta math. hung. – 1993. – **62**, No. 3-4. – P. 311–332.
6. *Sunouchi G., Yano S.* Convergence and summability of orthogonal series (Notes on Fourier analysis. XXXIX // Proc. Jap. Acad. A. – 1950. – **26**, No. 1. – P. 10–16.

ПРО ОДНЕ ЗОБРАЖЕННЯ СЕРЕДНІХ ЧЕЗАРО ВІД'ЄМНОГО ПОРЯДКУ ПОДВІЙНИХ ОРТОГОНАЛЬНИХ РЯДІВ

Отримано зображення для середніх Чезаро від'ємного порядку подвійних ортогональних рядів через деякі підпослідовності їх прямокутних часткових сум.

ON SOME REPRESENTATION OF NEGATIVE ORDER CESARO MEANS OF DOUBLE ORTHOGONAL SERIES

A representation of negative order Cesaro means of double orthogonal series has been obtained by means of the sequences of their rectangular partial sums.

Одесс. нац. ун-т им. И. И. Мечникова, Одесса

Получено
21.11.02