УДК 517.526

Д. І. Боднар

БАГАТОВИМІРНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ

Проаналізовано різні підходи до багатовимірних узагальнень неперервних дробів.

1. До недавнього часу загальноприйнятою була думка про те, що вперше узагальнення неперервного дробу запропонував Л. Ейлер у 1769 році [18]. Як з'ясувалось, японський математик K. Takebe (1664–1739) ще раніше застосував поняття, що узагальнює неперервний дріб, до розв'язання діофантових нерівностей. Хоча прямих доказів цього немає, але в роботі M. Fujiwara [20], опублікованій у 1939 році, реферується стаття Genkei Narane за 1728 рік, де, зокрема, переглядаються результати K. Takebe.

Було відомо, що для розв'язання діофантової нерівності $|ax - by| < 1$, де $a,\ b \in \mathbb{R}_+$, можна застосувати правильний неперервний дріб [14, 23, 27], у який розвивається відношення $\frac{a}{b}$. K. Takebe розглянув діофантові нерівності $|ax - by \pm c| < 1$, де $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}_+$. Якщо для визначеності вибрати знак «$-$» перед c і побудувати алгоритм

$$\frac{b}{a} = a_1 + \omega_1, \qquad \frac{1}{\omega_1} = a_2 + \omega_2, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\omega_{n-1}} = a_n + \omega_n, \quad \ldots,$$

$$\frac{c}{a} = b_1 - \Omega_1, \qquad \frac{\Omega_1}{\omega_1} = b_2 - \Omega_2, \quad \ldots, \quad \frac{\Omega_{n-1}}{\omega_{n-1}} = b_n - \Omega_n, \quad \ldots,$$

де $0 < \omega_n < 1,\ 0 < \Omega_n < 1,\ n = 1, 2, \ldots$, то розв'язками цієї нерівності є $x = u_n$, $y = v_n,\ n \ge n_0$, причому $u_n = P_{n-1} b_n + u_{n-1},\ v_n = Q_{n-1} b_n + v_{n-1},\ n = 2, 3, \ldots$, $u_1 = b,\ v_1 = 1$; $P_n,\ Q_n$ – чисельник і знаменник n-го підхідного дробу неперервного дробу, в який розвивається відношення $\frac{b}{a}$. Відношення $\frac{c}{a}$ розвивається у дріб вигляду

$$\frac{c}{a} = b_1 - \cfrac{b_2 - \cfrac{b_3 - \cfrac{b_4 - \ddots}{\cfrac{1}{\omega_3}}}{\cfrac{1}{\omega_2}}}{\cfrac{1}{\omega_1}}, \qquad \text{де} \qquad \frac{1}{\omega_i} = a_{i+1} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_{i+k}}, \qquad i = 1, 2, \ldots .$$

2. Ще J. L. Lagrange [25, с. 609] довів, що кожна квадратична ірраціональність розвивається у правильний неперервний періодичний дріб. Можна побудувати однопараметричну сім'ю розвинень $\sqrt{t},\ t > 0$, у періодичні неперервні дроби, використовуючи ітераційний процес

$$\left\| \begin{matrix} A_n \\ B_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a & t \\ 1 & a \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{matrix} \right\|, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad A_0 = a, \qquad B_0 = 1 .$$

Звідси отримуємо [14]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = a + \cfrac{t - a^2}{2a + \cfrac{t - a^2}{2a + \ddots}} .$$

Дійсний параметр a регулює обчислювальний процес: збіжність, двостороннє наближення, збіжність до заданого розв'язку рівняння.

Розглядаючи ітераційний процес

$$\begin{Vmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a & t-p & t \\ 1 & a & t \\ 1 & 1 & a+p \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \\ C_{n-1} \end{Vmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

де $A_0 = a^2$, $B_0 = a$, $C_0 = 1$, отримуємо двовимірні узагальнення неперервних дробів [13], причому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = y^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{B_n}{C_n} = y$, де y − дійсний корінь кубічного рівняння $y^3 + py - t = 0$.

Коли $a = 0$, отримуємо матрицю для наближеного обчислення $\sqrt[3]{t} : \sqrt[3]{t^2} : 1$, що фактично розглянув Л. Ейлер. Метод Ейлера був узагальнений у роботах W. Lorey'a [28], M. Krafft'a [24], M. Müller'a [32], О. М. Хованського [13, 14]. Незважаючи на те, що тут вживається термін «багатовимірні неперервні дроби», проте явний вигляд отриманих при цьому дробів не виписується. Підхід Ейлера до узагальнення неперервних дробів на основі скінченно-різницевих рівнянь використовувався пізніше в роботах інших математиків.

3. L. M. Milne-Thomson [29] запропонував матричний підхід до узагальнення неперервних дробів. Розглянемо послідовність квадратних матриць k-го порядку

$$A_m = \begin{Vmatrix} a_m^{(1)} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_m^{(2)} & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m^{(k-1)} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_m^{(k)} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

де k − фіксоване натуральне число, $a_m^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots m$, $m = 1, 2, \ldots,$ − комплексні числа, $a_1^{(k)} = 1$. Нехай $A_{m,0}$ означає перший стовпець матриці A_m. Добуток матриць $A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_{n,0}$, $n = 1, 2, \ldots,$ породжує багатовимірний неперервний дріб, який автор називає спадним неперервним дробом розмірності k. Виявляється, що

$$A_1 A_2 \ldots A_n = \begin{Vmatrix} p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots \\ q_n & q_{n-2} & q_{n-2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_n & w_{n-1} & w_{n-2} & \cdots \end{Vmatrix},$$

де

$$p_n = a_n^{(1)} p_{n-1} + a_n^{(2)} p_{n-2} + \ldots + a_n^{(k)} p_{n-k},$$

$$q_n = a_n^{(1)} q_{n-1} + a_n^{(2)} q_{n-2} + \ldots + a_n^{(k)} q_{n-k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$w_n = a_n^{(1)} w_{n-1} + a_n^{(2)} w_{n-2} + \ldots + a_n^{(k)} w_{n-k}.$$

Дріб, що задається за допомогою добутку квадратних матриць k-го порядку

$$B_m = \begin{Vmatrix} b_m^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_m^{(2)} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_m^{(3)} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m^{(k)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}, \qquad m = 1, 2, \dots,$$

де $b_1^{(k)} = 1$, у роботі названо зростаючим неперервним дробом розмірності k.

Поклавши $k = 2$ і розглянувши відношення $\dfrac{p_n}{q_n}$, $n = 1, 2, \dots$, у першому випадку отримаємо неперервний дріб

$$a_1^{(1)} + \cfrac{a_2^{(2)}}{a_2^{(1)} + \cfrac{a_3^{(2)}}{a_3^{(1)} + \ddots}},$$

у другому − дріб вигляду

$$b_1^{(2)} + \cfrac{b_2^{(2)} + \cfrac{b_3^{(2)} + \iddots}{b_3^{(1)}}}{b_2^{(1)}}.$$

Ці результати L. M. Milne-Thomson доповів на I-му Міжнародному математичному конгресі в Цюриху в 1932 році.

4. E. Fürshtenau [21] запропонував алгоритм, що узагальнює неперервний дріб. Нехай маємо два дійсних числа p і q. Припустимо, що

$$p = a_0 + \frac{q_1}{p_1}, \quad p_1 = a_1 + \frac{q_2}{p_2}, \quad p_2 = a_2 + \frac{q_3}{p_3}, \quad \dots,$$

$$q = b_0 + \frac{c_1}{p_1}, \quad q_1 = b_1 + \frac{c_2}{p_2}, \quad q_2 = b_2 + \frac{c_3}{p_3}, \quad \dots.$$

За допомогою послідовних вкладень дістанемо такі вирази для p і q:

$$p = a_0 + \cfrac{b_1 + \cfrac{c_2}{a_2 + \cfrac{b_3 + \cfrac{c_4}{a_4 + \cdots}}{a_3 + \cfrac{b_4 + \cdots}{a_4 + \cdots}}}}{a_1 + \cfrac{b_2 + \cfrac{c_3}{a_3 + \cfrac{b_4 + \cdots}{a_4 + \cdots}}}{a_2 + \cfrac{b_3 + \cfrac{c_4 + \cdots}{a_4 + \cdots}}{a_3 + \cfrac{b_4 + \cdots}{a_4 + \cdots}}}},$$

$$q = b_0 + \cfrac{c_1}{a_1 + \cfrac{b_2 + \cfrac{c_3}{a_3 + \cfrac{b_4 + \cdots}{a_4 + \cdots}}}{a_2 + \cfrac{b_3 + \cfrac{c_4 + \cdots}{a_4 + \cdots}}{a_3 + \cfrac{b_4 + \cdots}{a_4 + \cdots}}}},$$

які автор називає неперервними дробами 2-го класу. У випадку $c_i = 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, вони вироджуються у неперервні дроби.

Скінченні дроби, що містять елементи a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, називають n-ми підхідними дробами $\frac{P_{n-1}}{N_{n-1}}$ і $\frac{Q_{n-1}}{N_{n-1}}$ для p і q відповідно. Для чисельників і знаменників цих дробів справджуються рекурентні співвідношення

$$\begin{Vmatrix} P_n \\ Q_n \\ N_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ Q_{n-1} & Q_{n-2} & Q_{n-3} \\ N_{n-1} & N_{n-2} & N_{n-3} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{Vmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

при початкових умовах

$$\begin{Vmatrix} P_{-1} & P_{-2} & P_{-3} \\ Q_{-1} & Q_{-2} & Q_{-3} \\ N_{-1} & N_{-2} & N_{-3} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

і припущенні, що $c_0 = 0$.

Б. В. Круковський [7] встановив, що дроби p і q збігаються, якщо є збіжними ряди

$$\sigma_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{b_{i+1}}{a_i a_{i+1}} \right|, \qquad \sigma_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{c_{i+2}}{a_i a_{i+1} a_{i+3}} \right| \qquad \text{і} \qquad \sigma_1 + \sigma_2 < \frac{1}{2}.$$

5. Для побудови розвинення дійсного числа у правильний неперервний дріб використовують алгоритм Евкліда. Підхідні дроби цього розвинення дають найкращі раціональні наближення заданого числа. Можна отримати багатовимірні узагальнення неперервних дробів, узагальнюючи алгоритм Евкліда. Цей підхід застосував норвезький математик Viggo Brun ще в 1919 році. Він використав інтерпретацію алгоритму Евкліда як алгоритму «різниць». Майже через 40 років він повернувся до цієї тематики [17]. Розглядаючи алгоритм Евкліда як алгоритм «часток», Є. В. Подсипанін [8] побудував алгоритм, по суті, еквівалентний до алгоритму Brun'a.

Нехай $\{a_k, \varepsilon_k\}$ – послідовність пар чисел таких, що $a_k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_k = 0$ або $\varepsilon_k = 1$, і $\delta_k = 1 - \varepsilon_k$. Поклавши

$$\begin{Vmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{Vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \begin{Vmatrix} a_k & \varepsilon_k & \delta_k \\ \delta_k & 0 & \varepsilon_k \\ \varepsilon_k & \delta_k & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

отримаємо, що для довільних a_k, ε_k існують границі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}=\alpha\in[0,1], \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{p_n}=\beta\in[0,1] \tag{2}$$

і, навпаки, для довільної пари дійсних чисел $(\alpha,\beta)\in[0,1]\times[0,1]$ існує послідовність пар $\{a_k,\ \varepsilon_k\}$, для яких виконуються співвідношення (1), (2).

Цей підхід використовували у своїх роботах інші автори, зокрема N. Pipping [34], J. B. Rosser [37], H. R. P. Ferguson, R. W. Forcade [19].

6. Одним з найбільш вдалих і досліджених узагальнень неперервних дробів є алгоритм Якобі – Перрона. У статті Якобі [22], опублікованій посмертно, побудовано алгоритм, який дав можливість як завгодно точно наблизити два несумірні дійсні числа раціональними з однаковими знаменниками. Це перша спроба знайти тривимірні аналоги правильних неперервних дробів. Збіжність алгоритму обґрунтував O. Perron [33] через 37 років.

За L. Bernstein'ом [15], алгоритмом Якобі – Перрона вектора $a^{(0)}=\left(a_1^{(0)},\ a_2^{(0)},\ \ldots,\ a_{n-1}^{(0)}\right)\in\mathbb{R}^{n-1}$, $n\ge 2$, називається послідовність векторів $\{a^{(k)}\}$ така, що

$$a^{(k)}\in\mathbb{R}^{n-1},$$

$$a^{(k+1)}=\left(a_1^{(k)}-b_1^{(k)}\right)^{-1}\left(a_2^{(k)}-b_2^{(k)},\ \ldots,\ a_{n-1}^{(k)}-b_{n-1}^{(k)},\ 1\right), \qquad k=0,1,\ldots,$$

де $b^{(k)}=f(a^{(k)})$ і $f:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^{n-1}$ – деякий оператор такий, що $a_1^{(k)}\ne b_1^{(k)}$, $k=1,2,\ldots$.

Якщо для $n=2$ покласти $f(a^{(k)})=\left[a^{(k)}\right]$, де $[a]$ – найбільша ціла частина a, то алгоритм породжує правильний неперервний дріб, у який розвивається дійсне число $a^{(0)}$:

$$a^{(0)}=b^{(0)}+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b^{(k)}}.$$

L. Bernstein [15] знайшов класи алгебричних ірраціональностей, розвинення яких в узагальнені неперервні дроби за алгоритмом Якобі – Перрона є періодичними, та застосував цей алгоритм для знаходження одиниць алгебричних полів.

7. Зміна класів алгебричних ірраціональностей, які породжують узагальнення періодичних правильних неперервних дробів, зумовила модифікації цього алгоритму.

А. Пуанкаре дав геометричну інтерпретацію правильного неперервного дробу, в який розвивається дійсне число α, вибираючи точки координатної сітки, найближче розміщені до прямої $y=\alpha x$. На основі цієї інтерпретації у роботі [35] він побудував узагальнення неперервного дробу, використовуючи просторову пряму $y=\alpha x$, $z=\beta y$ і певним чином побудовані тетраедри. Таким чином було отримано сумісні наближення пари дійсних чисел (α,β) раціональними з однаковими знаменниками.

У передмові до докторської дисертації Г. Ф. Вороний [5] критично переглянув результати своїх попередників. З його точки зору, узагальнення неперервних дробів, запропоновані Л. Діріхле, Л. Кронекером, Г. Мінковським [30], є найприроднішими узагальненнями. Г. Ф. Вороний довів методи Л. Діріхле, Л. Кронекера до алгоритму і отримав нове узагальнення неперервного дробу на основі поняття системи коваріантних форм.

Спроба узагальнення алгоритму неперервних дробів за допомогою дробів Фарея належала Гурвіцу. Цей підхід розвинув G. Szekeres [38]. Він запропонував новий варіант узагальнення алгоритму неперервних дробів на k-вимірний випадок, базуючись на розгляді узагальнень дробів Фарея у

k - му фундаментальному симплексі. Алгоритм не є періодичним, але є зручним для розв'язування задач діофантових наближень і для знаходження одиниць алгебричних полів.

8. Ще в XI ст. індійські математики для розв'язання діофантового рівняння $ax + by = c$, де a, b, $c \in \mathbb{Z}$, застосували чисельники та знаменники підхідного дробу, в який розвивається відношення $\frac{a}{b}$.

Для розв'язання діофантового рівняння

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a_0, \qquad a_i \in \mathbb{Z}, \qquad i = 0,1,\ldots,n, \tag{3}$$

застосовували такий алгоритм [6, 26, 31]. Позначимо $b_i^{(1)} = a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$. На першому кроці маємо

$$b_1^{(1)} = l_2^{(1)}b_2^{(1)} + r_2^{(1)}, \qquad r_2^{(1)} = l_3^{(1)}b_3^{(1)} + r_3^{(1)}, \qquad \ldots, \qquad r_{n-1}^{(1)} = l_n^{(1)}b_n^{(1)} + r_n^{(1)}.$$

Якщо $r_n^{(1)} \neq 0$, то позначивши $b_1^{(2)} = b_2^{(1)}$, $\ldots$, $b_{n-1}^{(2)} = b_n^{(1)}$, $b_n^{(2)} = r_n^{(1)}$, повторюємо алгоритм, поки на k-му кроці отримаємо $r_n^{(k)} = 0$. Тоді шукаємо розв'язок рівняння (3), де замість a_0 маємо $b_1^{(k)}$. Це один із лінійно незалежних розв'язків рівняння, однорідного до (3). Зменшуємо число невідомих і продовжуємо алгоритм, поклавши $b_1^{(k+1)} = b_2^{(k)}, \ldots, b_{n-1}^{(k+1)} = b_n^{(k)}$ і т. д. Відношення $\frac{a_i}{a_j}$ розвиваються у багатовимірні неперервні дроби з розгалуженнями вверх і вниз. Явний вигляд цих дробів у роботах [6, 26, 31] не записано.

9. В. Я. Скоробогатько [9, 10] запропонував багатовимірне узагальнення неперервного дробу для функцій багатьох змінних, назвавши його гіллястим ланцюговим дробом. Особливі та часткові випадки таких дробів розглядали раніше. У роботі Ilse Pratje [36] вони виникли при застосуванні композицій відображень Жуковського $w_n = \frac{a_n}{2}\left(\frac{w_{n+1}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{w_{n+1}}\right)$, $n = 1,2,\ldots$, до задачі уніформізації, у В. П. Терських [12] − при дослідженні механічних коливань у різних енергетичних установках у суднобудуванні.

Гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) визначаються за допомогою композицій багатовимірних дробово-лінійних відображень. ГЛД − це послідовність $\{f_n\}$, де

$$f_n = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i_1}}{b_{i_1} + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{a_{i_1i_2}}{b_{i_1i_2} + \ddots + \sum\limits_{i_n=1}^{N} \cfrac{a_{i_1i_2\ldots i_n}}{b_{i_1i_2\cdots i_n}}}} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{a_{i_1i_2\cdots i_k}}{b_{i_1i_2\cdots i_k}}.$$

Характерних рекурентних формул для чисельників і знаменників підхідних дробів багатовимірних узагальнень неперервних дробів, що розглядались раніше, для ГЛД не існує. Різні аспекти в дослідженні аналітичної теорії ГЛД розглядались у монографіях [1, 4, 9] та оглядових статтях [2, 3,16].

М. С. Сявавко [11] запропонував континуальний аналог ГЛД і застосував його до розв'язування інтегральних рівнянь.

Наведений у статті огляд досліджень не претендує на повноту. Нами використано бібліографію, зібрану, на жаль, покійним нині істориком математики І. І. Герасимом.

1. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
2. *Боднар Д. І.* Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 1. – С. 117–126.
3. *Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й.* Гіллясті ланцюгові дроби (до 30-річчя виходу першої публікації) // Мат. методи та фіз.-мех. поля – 1996. – **39**, № 2. – С. 9–19.
4. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – К.: Наук. думка, 1974. – 272 с.
5. *Вороной Г. Ф.* Собрание сочинений. – Киев: Изд-во АН УССР, 1952. – Т. 1. – 400 с.
6. *Гребинча М. К.* Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей // Вестн. М. Г. А. – 1923. – **II**, № 1. – С. 1–10.
7. *Круковський Б. В.* До теорії нескінченних неперервних дробів 2-го класу // Журн. Ін-ту математики УАН. – 1933. – № 1. – С. 195–206.
8. *Подсыпанин Е. В.* Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей, связанном с алгоритмом Вигго Бруна // Зап. науч. семинаров ЛОМИ: Исследования по теории чисел. – 1977. – **67**. – С. 184–194.
9. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
10. *Скоробогатько В. Я., Дронюк Н. С., Бобик О. І., Пташник Б. Й.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування // II наук. конф. молодих математиків України. – К.: Наук. думка, 1966. – С. 561–565.
11. *Сявавко М. С.* Інтегральні ланцюгові дроби. – К.: Наук. думка, 1994. – 205 с.
12. *Терских В. П.* Метод цепных дробей в применении к исследованию колебаний механических систем: В 2 т. – Л.: Судпромгиз, 1955. – Т. 2. – 332 с.
13. *Хованский А. Н.* К вопросу о разложении кубических иррациональностей в трехмерные цепные дроби // Тр. кафедры мат. анализа. – Калининград: Калининград. гос. ун-т, 1969. – С. 85–98.
14. *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. – М.: Гостехиздат, 1956. – 203 с.
15. *Bernstein L.* The Jacobi – Perron algorithm. Its theory and application // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer Verlag, 1971. – **207**. – 160 p.
16. *Bodnar D., Kuchmins'ka Kh., Sus' O.* A survey of analytic theory of branched continued fractions // Commun. Analytic Theory of Continued Fractions. – 1993. – **2**. – P. 4–23.
17. *Brun V.* Algorithmes Euclidieuns pour trios et quatre nombres // XIII Congr. Math. Scand. – 1957. – P. 45–64.
18. *Euler L.* De inventione quotcumque mediarum proportionaium citra radicum exctrationem // Novi Comment. Acad. Sci. Petrop. – 1769. – **14**; 1770. – **1.** – P. 188–214.
19. *Ferguson H. R. P., Forcade R. W.* Generalization of the Euclidian algorithm pour for real number to all dimensions higher than two // Bull. Amer. Math. Soc. – 1979. – **1**, No. 6. – P. 912–914.
20. *Fujiwara M.* A problem of Diophantine approximations in the old Japanese mathematics // Proc. Acad. Tokyo. – 1939. – **15**. – P. 101–104.
21. *Fürshtenau E.* Über Kettenbrüche höherer Ordnung // Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. – 1876. – S. 133–135.
22. *Jacobi C. G. J.* Allgemeine Theorie der Kettenbrüchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahe aus drei vorhergchruden gibildet wird // J. für die Reine und Angew. Math. – 1868. – **69**. – S. 29–64.
23. *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Massachusetts: Addison–Wesley Publ. Co., 1980. – 428 p.
24. *Krafft M.* Über ein Eulershes Verfahren zur Wurzelberechnung // Monatshefte für Math. und Phys. – 1941. – **49**. – S. 312–315.
25. *Lagrange J. L.* Œuvres. – T. 2. – Paris, 1868.
26. *Lehmer D. N.* The general solution of the indeterminate equation: $Ax + By + Cz + \cdots = r$ // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1919. – **5**. – P. 111–114.
27. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions with applications. – Amsterdam: North-Holland, 1992. – 606 p.
28. *Lorey W.* Über ein Eulershes Verfahren zur Wurzelberechnung // Monatshefte für Math. und Phys. – 1939. – **48**. – S. 190–197.
29. *Milne-Thomson L. M.* On the operational solution of the homogeneous linear equation of finite differences, by generalized continued fractions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. A. – 1931. – **51**. – P. 91.

30. *Minkowski H.* Zur Theorie der Kettenbrüche // Ann. sci. Ec. norm. super. 3 sér. – 1896. – **13**. – S. 41–60.
31. *Morito S., Salkin H. M.* Using the blankinship algorithm to find the general solution of linear diophantine equation // Acta Informatica. – 1980. – **13**, No. 4. – P. 379–382.
32. *Müller M.* Über ein Eulershes Verfahren zur Wurzelberechnung // Math. Z. – 1948. – **51**, No. 4. – S. 474–496.
33. *Perron O.* Grundlägen für eine Theorie des Jacobichen Kettenbruchalgorithmus // Math. Ann. – 1907. – **64**. – S. 1–76.
34. *Pipping N.* Über eine Verallgemeinerung des Euklidischen Algorithmus // Acta Acad. aboensis. Ser. Math. et Phys. – 1922. – **1.** – S. 3–14.
35. *Poincare A.* Sur une géneralisation des fractions continues // C. r. Acad. Sci. Ser. 1. – 1884. – **99**. – P. 1014–1016.
36. *Pratje I.* Iteration der Joukowski. Abbildung und ihre Strecken-Komplexe // Mitt. Math. Semin. der Univ. Giessen. – 1954. – No. 48. – S. 1–54.
37. *Rosser J. B.* Generalised ternary continued fraction // Amer. Math. Month. – 1950. – **57**. – P. 528–535.
38. *Szekeres G.* Multidimensional continued fraction // Ann. Univ. Sci. Budapest. Rolando Eötvos nominatae. Sec. Math. – 1970. – **13**. – P. 113–140.

МНОГОМЕРНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ НЕПЕРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

Проанализированы различные подходы к многомерным обобщениям непрерывных дробей.

MULTIDIMENSIONAL GENERALIZATIONS OF CONTINUED FRACTIONS

Different approaches to multidimensional generalization of continued fractions are analyzed.

Терноп. акад. нар. гос-ва, Тернопіль

Одержано
01.12.02