УДК 539.3

Л. А. Фильштинский

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПО ВРЕМЕНИ ОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ В $\mathbb{R}^3$

Предложена новая процедура построения однородных решений уравнений теплопроводности для анизотропного слоя в $\mathbb{R}^3$. *С использованием этих решений рассмотрена граничная задача теплопроводности для слоя, ослабленного сквозной туннельной полостью, на поверхности которой задан периодически изменяющийся во времени тепловой поток. Задача о тепловых волнах в слое с полостью сведена к системе интегральных уравнений.*

В настоящей статье построена полная система однородных решений для слоя в $\mathbb{R}^3$ при условии, что температура циклически изменяется во времени, а на основаниях слоя она выдерживается равной нулю. Граничная задача Неймана для слоя с туннельной сквозной полостью сведена к системе одномерных интегральных уравнений.

1. Речь идет об интегрировании дифференциального уравнения параболического типа с постоянными коэффициентами

$$\left(L(D) - c\frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0, \qquad c = \rho c_\varepsilon > 0\,,$$

$$L(D) = \sum_{m,n=1}^{3} a_{mn}\partial_m\partial_n, \qquad a_{mn} = a_{nm}, \qquad \partial_n = \frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{1}$$

в слое $-\infty < x_1,\ x_2 < \infty,\ \ -h < x_3 < h$ при выполнении однородных граничных условий на его основаниях

$$u\Big|_{x_3=\pm h} = 0\,. \tag{2}$$

В уравнении (1) величины a_{mn} имеют смысл тензора теплопроводности; c_ε – удельная теплоемкость материала; t – время.

Для T-периодического по времени решения граничной задачи Дирихле (1), (2) положим

$$u = \mathrm{Re}\,(e^{i\omega t}\,U), \qquad U = U(x_1, x_2, x_3), \qquad T = 2\pi/\omega\,. \tag{3}$$

Исключая в соответствии с (3) время в уравнении (1), приведем его к виду

$$\{L(D) - ic\omega\}\,U = 0\,. \tag{4}$$

Решение уравнения (4) проведем операторным методом. Полагая $U' = \partial_3 U$, $U'' = \partial_3^2 U$, представим это уравнение в форме

$$U'' + 2AU' + BU = 0\,, \tag{5}$$

где

$$A = \frac{1}{a_{33}}(a_{13}\partial_1 + a_{23}\partial_2)\,,$$

$$B = \frac{1}{a_{33}}(a_{11}\partial_1^2 + 2a_{12}\partial_1\partial_2 + a_{22}\partial_2^2 - ic\omega)\,.$$

Проинтегрировав уравнение (5), получим

$$U = e^{-Ax_3}\{(\cos\alpha x_3)\,C_1 + (\alpha^{-1}\sin\alpha x_3)\,C_2\}\,,$$

$$\alpha^2 = B - A^2 = \Delta_{11}\partial_1^2 + 2\Delta_{12}\partial_1\partial_2 + \Delta_{22}\partial_2^2 - \Omega, \qquad \Omega = ic\omega/a_{33}\,,$$

$$\Delta_{11} = \frac{a_{11}}{a_{33}} - \left(\frac{a_{13}}{a_{33}}\right)^2, \quad \Delta_{12} = \frac{a_{12}}{a_{33}} - \frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}^2}, \quad \Delta_{22} = \frac{a_{22}}{a_{33}} - \left(\frac{a_{23}}{a_{33}}\right)^2 > 0,$$

$$C_1 = C_1(x_1, x_2), \qquad C_2 = C_2(x_1, x_2). \tag{6}$$

Для определения функции C_k, $k = 1,2$, привлечем граничные условия (2), которые в амплитудах имеют вид $U(x_1, x_2, \pm h) = 0$. С учетом (6) получаем следующую операторную систему уравнений:

$$e^{-Ah}\{(\cos h\alpha)\,C_1 + (\alpha^{-1}\sin h\alpha)\,C_2\} = 0,$$

$$e^{Ah}\{(\cos h\alpha)\,C_1 - (\alpha^{-1}\sin h\alpha)\,C_2\} = 0. \tag{7}$$

Введем разрешающую функцию ψ_1 по формулам

$$C_1 = e^{-Ah}(\alpha^{-1}\sin\alpha h)\,\psi_1, \qquad C_2 = -\,e^{-Ah}(\cos\alpha h)\,\psi_1. \tag{8}$$

Тогда первое уравнение из (7) будет удовлетворено, а из второго получим

$$(\alpha^{-1}\sin 2h\alpha)\,\psi_1 = 0. \tag{9}$$

Представив оператор-функцию в левой части уравнения (9) в виде ряда, получим дифференциальное уравнение бесконечного порядка относительно ψ_1:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2h)^{k+1}}{(2k+1)!}\,\alpha^{2k}\right)\psi_1 = 0. \tag{10}$$

Для его решения введем систему функций $\varphi_j(x_1, x_2)$, удовлетворяющих уравнениям

$$(\alpha^2 - \mu_j^2)\,\varphi_j = 0. \tag{11}$$

Из (11) следует, что $\alpha^{2k}\varphi_j = \mu_j^{2k}\varphi_j$, поэтому из требования, чтобы функция φ_j удовлетворяла уравнению (10), получаем

$$\frac{1}{\mu_j}\sin(2h\mu_j)\,\varphi_j = 0.$$

Таким образом, нетривиальные решения φ_j уравнения (9) существуют и соответствующие им характеристические числа μ_j определяются равенствами

$$\mu_j = \frac{\pi j}{2h}, \qquad j = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Остановимся более подробно на определении собственных функций φ_j. Вводя невырожденное преобразование координат

$$x_1^* = x_1 - p x_2, \qquad x_2^* = \sqrt{\Delta^*}\,x_2,$$

$$p = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}}, \qquad q = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}, \qquad \Delta^* = q - p^2 > 0, \tag{12}$$

приведем уравнение (11) к виду

$$(\nabla_*^2 - \nu_j^2)\,\varphi_j = 0,$$

$$\nabla_*^2 = \partial_{1*}^2 + \partial_{2*}^2, \qquad \partial_{m*} = \partial / \partial x_m^*, \qquad m = 1,2,$$

$$\nu_j = \left(\frac{\mu_j^2 + \Omega}{\Delta_{22}\Delta^*} \right)^{1/2} = \alpha_j + i\beta_j . \tag{13}$$

Отсюда следует, что φ_j − комплексные метагармонические функции в афинных переменных x_1^*, x_2^*. Далее будем считать, что $\alpha_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots$. Это условие обеспечивает затухание функций $\varphi_j(x_1^*, x_2^*)$ на бесконечности. Учитывая (9), (11), разрешающую функцию ψ_1 представим в виде

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x_1^*, x_2^*) . \tag{14}$$

Выясним теперь структуру решения исходной граничной задачи (1), (2). Подставляя соотношения (8) в формулу (6), для амплитуды U получим

$$U = U_1 = e^{-A(h+x_3)} \left\{ \alpha^{-1} \sin \alpha(h - x_3) \right\} \psi_1 . \tag{15}$$

В силу (11) имеет место соотношение

$$\alpha^{-1} \sin \alpha(h - x_3)\, \varphi_j = \frac{1}{\mu_j} \sin\left[\mu_j (h - x_3) \right] \varphi_j . \tag{16}$$

Подставляя в (15) функцию ψ_1 из (14) и учитывая при этом (16), получим решение граничной задачи (1), (2) в символической форме:

$$u_1 = \operatorname{Re}(e^{i\omega t}\, U_1) ,$$

$$U_1 = e^{-A(h+x_3)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} \sin\left[\mu_j (h - x_3)\, \varphi_j(x_1^*, x_2^*) \right] . \tag{17}$$

Рассмотрим теперь второе решение операторной системы (7), вводя разрешающую функцию ψ_2 по соотношениям

$$C_1 = e^{Ah} (\alpha^{-1} \sin \alpha h)\, \psi_2 , \qquad C_2 = e^{Ah} (\cos \alpha h)\, \psi_2 .$$

Тогда второе из уравнений (7) будет удовлетворено, а из первого получаем разрешающее уравнение (9) для функции ψ_2. Поступая аналогично предыдущему, находим второе решение граничной задачи (1), (2):

$$u_2 = \operatorname{Re}(e^{i\omega t}\, U_2) ,$$

$$U_2 = e^{A(h-x_3)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} \sin\left[\mu_j (h + x_3) \right] \varphi_j(x_1^*, x_2^*) . \tag{18}$$

В частном случае трансверсально-изотропной среды ($a_{13} = a_{23} = 0$) получаем окончательные выражения

$$U_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} \sin\left[\mu_j (h - x_3) \right] \varphi_j , \qquad U_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} \sin\left[\mu_j (h + x_3) \right] \varphi_j .$$

Из них можно скомбинировать симметричные и кососимметричные относительно срединной плоскости слоя однородные решения:

$$U^+ = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cos\left[\frac{\pi(2j+1)}{2h} x_3 \right] \varphi_{2j+1}(x_1^*, x_2^*) ,$$

$$U^- = \frac{1}{2}(U_2 - U_1) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \sin\left(\frac{\pi j}{h} x_3 \right) \varphi_{2j}(x_1^*, x_2^*) . \tag{19}$$

2. Возвращаясь к общему случаю прямолинейной анизотропии, введем переменные

$$x_* = x_1 - px_2 - (h + x_3)\left(\frac{a_{13}}{a_{33}} - p\,\frac{a_{23}}{a_{33}}\right),$$

$$y_* = \sqrt{\Delta^*}\left(x_2 - (h + x_3)\,\frac{a_{23}}{a_{33}}\right). \tag{20}$$

Полагая далее

$$\Phi_j^{(1)} = e^{-A(h+x_3)}\varphi_j(x_1^*, x_2^*)\,, \tag{21}$$

формулу (17) запишем в виде

$$U_1 = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_j}\sin\left[\mu_j(h - x_3)\right]\Phi_j^{(1)}\,. \tag{22}$$

Из равенства (21) следует, что $\Phi_j^{(1)}$ является функцией трех переменных x_1, x_2, x_3. Точнее, покажем, что $\Phi_j^{(1)} = \Phi_j^{(1)}(x_*, y_*)$, где переменные x_*, y_* определены равенствами (20). Для этого подставим выражение (22) в исходное дифференциальное уравнение (4). В результате получим систему уравнений

$$\omega\Phi_j^{(1)} = 0, \qquad 2\omega\partial_3\Phi_j^{(1)} + \Lambda_j\Phi_j^{(1)} = 0\,, \tag{23}$$

где

$$\omega = a_{13}\partial_1 + a_{23}\partial_2 + a_{33}\partial_3\,,$$

$$\Lambda_j = a_{11}\partial_1^2 + 2a_{12}\partial_1\partial_2 + a_{22}\partial_2^2 - a_{33}\partial_3^2 - a_{33}(\mu_j^2 + \Omega)\,.$$

Первое из уравнений системы (23) удовлетворяется на любой непрерывно дифференцируемой функции переменных x_*, y_*. Действительно, оператор ω в этих переменных имеет вид

$$\omega = a_{13}\,\frac{\partial}{\partial x_*} + a_{23}\left(\sqrt{\Delta^*}\,\frac{\partial}{\partial y_*} - p\,\frac{\partial}{\partial x_*}\right) + a_{33}\left(\frac{pa_{23} - a_{13}}{a_{33}}\,\frac{\partial}{\partial x_*} - \sqrt{\Delta^*}\,\frac{a_{23}}{a_{33}}\,\frac{\partial}{\partial y_*}\right) \equiv 0\,.$$

Второе из уравнений системы (23) теперь имеет вид $\Lambda_j\Phi_j^{(1)} = 0$, причем оператор Λ_j в переменных x_*, y_* можно представить в следующей форме:

$$\Lambda_j = a\,\frac{\partial^2}{\partial x_*^2} + 2e\,\frac{\partial^2}{\partial x_*\partial y_*} + b\,\frac{\partial^2}{\partial y_*^2} - a_{33}(\Omega + \mu_j^2)\,,$$

$$a = a_{11} - 2pa_{12} + a_{22}p^2 - \frac{1}{a_{33}}(pa_{23} - a_{13})^2\,,$$

$$e = \sqrt{\Delta^*}\left(a_{12} - pa_{22} + \frac{a_{23}}{a_{33}}(pa_{23} - a_{13})\right),$$

$$b = \Delta^*\left(a_{22} - \frac{a_{23}^2}{a_{33}}\right), \qquad \Omega + \mu_j^2 = \Delta^*\Delta_{22}\nu_j^2\,. \tag{24}$$

Постоянные a, b, e, фигурирующие в (24), определяем, учитывая соотношения (6), (12):

$$a = b = a_{33}\Delta^*\Delta_{22}\,, \qquad e = 0\,.$$

Таким образом, функция $\Phi_j^{(1)}$ является произвольным решением уравнения типа Гельмгольца в переменных (20):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_*^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_*^2}-\nu_j^2\right)\Phi_j^{(1)}=0, \qquad \operatorname{Re}\nu_j>0, \qquad j=1,2,\dots . \tag{25}$$

Наряду с (22) можно ввести второе решение U_2:

$$U_2(x_1,x_2,x_3)=U_1(-x_1,-x_2,-x_3).$$

Очевидно, функция U_2 также является решением уравнения (4) и для нее имеем

$$u_2=\operatorname{Re}(e^{i\omega t}\,U_2),$$

$$U_2=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_j}\sin\left[\mu_j(h+x_3)\right]\Phi_j^{(2)}. \tag{26}$$

При этом функция $\Phi_j^{(2)}$ является решением уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{**}^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_{**}^2}-\nu_j^2\right)\Phi_j^{(2)}=0, \tag{27}$$

где

$$x_{**}=px_2-x_1-(h-x_3)\left(\frac{a_{13}}{a_{33}}-p\frac{a_{23}}{a_{33}}\right),$$

$$y_{**}=-\sqrt{\Delta^*}\left(x_2+(h-x_3)\frac{a_{23}}{a_{33}}\right).$$

Из функций (22), (26) можно составить однородные решения граничной задачи (1), (2), обладающие центральной или косой симметрией относительно начала координат. Положим

$$\Phi_j^{(2)}(x_1,x_2,x_3)=\Phi_j^{(1)}(-x_1,-x_2,-x_3), \qquad j=1,2,\dots .$$

Тогда соответствующие решения примут вид

$$u^+=\operatorname{Re}(e^{i\omega t}U^+), \qquad u^-=\operatorname{Re}(e^{i\omega t}U^-),$$

$$U^+=\frac{1}{2}(U_1+U_2), \qquad U^-=\frac{1}{2}(U_1-U_2).$$

3. В качестве приложения построенных однородных решений рассмотрим граничную задачу теплопроводности для трансверсально-изотропного (в смысле тепловых свойств) слоя, содержащего сквозную туннельную полость. Будем считать, что на поверхности S полости задан циклически изменяющийся во времени тепловой поток q, соответствующий симметричному относительно срединной плоскости слоя распределению температур:

$$Q=\operatorname{Re}\{e^{i\omega t}\,q(\xi)\}, \qquad \xi=(\xi_1,\xi_2,x_3)\in S,$$

$$q(\xi)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\,q_j(\xi_1,\xi_2)\cos\frac{\pi(2j+1)}{2h}x_3, \tag{28}$$

а на бесконечности ($|x_1|\to\infty$, $|x_2|\to\infty$) температура равна нулю. Контур поперечного сечения полости обозначим через Γ. Предполагаем, что Γ – простая замкнутая достаточно гладкая кривая.

Граничное условие на поверхности S запишем в виде [2]

$$q_n=q_1n_1+q_2n_2=Q,$$

$$q_1=-a_{11}\partial_1u-a_{12}\partial_2u, \qquad q_2=-a_{12}\partial_1u-a_{22}\partial_2u,$$

$$n_1=\cos\psi, \qquad n_2=\sin\psi, \tag{29}$$

где ψ – угол между внешней нормалью к контуру Γ и осью Ox_1, а коэффициенты a_{mn} – компоненты тензора теплопроводности материала слоя.

Введем комплексную переменную $z_* = x_1^* + i\,x_2^*$ и операторы комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z_*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1^*} - i\,\frac{\partial}{\partial x_2^*}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z_*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1^*} + i\,\frac{\partial}{\partial x_2^*}\right), \qquad \bar z_* = x_1^* - ix_2^*.$$

В этих переменных компоненты вектора теплового потока будут иметь вид

$$q_k = -\,2\,\mathrm{Re}\left\{(a_{k1} + \nu_* a_{k2})\,\frac{\partial u}{\partial z_*}\right\}, \quad \nu_* = i\sqrt{\Delta^*} - p, \quad k = 1, 2. \tag{30}$$

Исключив время из граничного условия (29), сведем его с учетом равенств (3), (28), (30) к следующей системе граничных равенств:

$$\left.\left(\beta\,\frac{\partial U}{\partial z_*} + \bar\beta\,\frac{\partial U}{\partial \bar z_*}\right)\right|_S = -\,q(\xi),$$

$$\left.\left(\beta\,\frac{\partial \bar U}{\partial z_*} + \bar\beta\,\frac{\partial \bar U}{\partial \bar z_*}\right)\right|_S = -\,\overline{q(\xi)}, \qquad \xi \in S,$$

$$\beta = \beta(\psi) = (a_{11} + \nu_* a_{21})\cos\psi + (a_{12} + \nu_* a_{22})\sin\psi. \tag{31}$$

Очевидно, второе равенство в (31) является следствием первого, поэтому остается одно из них. Далее исключим из (31) толщинную координату x_3. Для этого воспользуемся первым из соотношений (20) и представлением (28). Из уравнения (31) получим

$$\left.\left(\beta\,\frac{\partial}{\partial z_*}\,\varphi_{2j+1} + \bar\beta\,\frac{\partial}{\partial \bar z_*}\,\varphi_{2j+1}\right)\right|_\Gamma = -\,q_j(\xi_1, \xi_2), \quad (\xi_1, \xi_2) \in \Gamma, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{32}$$

Таким образом, симметричная задача для трансверсально-изотропного слоя с туннельной полостью сводится к (не более чем) счетной совокупности комплексных функциональных уравнений (32) относительно комплексных метагармонических функций φ_{2j+1}. Причем для каждого фиксированного значения $j = 0, 1, \ldots$ имеем одно уравнение относительно одной неизвестной функции.

Для приведения граничной задачи (32) к интегральным уравнениям представим функцию φ_{2j+1} в виде обобщенного потенциала простого слоя

$$\varphi_{2j+1}(x_1^*, x_2^*) = \int_\Gamma p_j(\zeta)\,K_0(\nu_j^*\rho)\,ds, \qquad j = 0, 1, \ldots, \tag{33}$$

$$\zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in \Gamma, \qquad \rho = |\,\zeta_* - z_*\,|, \qquad \nu_j^* = \nu_{2j+1},$$

$$z_* = x_1^* + ix_2^* = x_1 - px_2 + i\sqrt{\Delta^*}\,x_2,$$

$$\zeta_* = \xi_1 - p\xi_2 + i\sqrt{\Delta^*}\,\xi_2,$$

где $K_m(z)$ – функция Макдональда порядка m [1]; $p_j(\zeta)$ – искомая плотность; ds – элемент дуги контура Γ.

Имеют место соотношения [3]

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m}\,K_0(\gamma r) = \left(-\,\frac{\gamma}{2}\right)^m e^{-im\theta} K_m(\gamma r), \qquad z = re^{i\theta},$$

$$\frac{\partial^m}{\partial \bar z^m}\,K_0(\gamma r) = \left(-\,\frac{\gamma}{2}\right)^m e^{im\theta} K_m(\gamma r), \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

С учетом этих формул и представления (33) находим

$$\frac{\partial}{\partial z_*}\varphi_{2j+1} = \frac{\nu_j^*}{2}\int_\Gamma p_j(\zeta)\,e^{-i\alpha}\,K_1(\nu_j^*\rho)\,ds, \qquad \zeta_* - z_* = \rho e^{i\alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar z_*}\varphi_{2j+1} = \frac{\nu_j^*}{2}\int_\Gamma p_j(\zeta)\,e^{i\alpha}\,K_1(\nu_j^*\rho)\,ds\,. \tag{34}$$

Функцию Макдональда $K_1(z)$ можно представить в виде [1]

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + K_*(z)\,,$$

где $K_*(z)$ не имеет особенностей на плоскости комплексного переменного z. Поэтому для предельных значений выражений (34) при $z \to \zeta_0 = \xi_{10} + i\xi_{20} \in \Gamma$, $z_* \to \zeta_{*0} = \xi_{10} - p\,\xi_{20} + i\sqrt{\Delta^*}\,\xi_{20}$ получаем следующие формулы:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_*}\varphi_{2j+1}\right)^{\pm}_{z\to\zeta_0} = \pm\,\frac{\pi i}{2}\,\frac{p_j(\zeta_0)}{a_*(\psi_0)} + \frac{\nu_j^*}{2}\int_\Gamma p_j(\zeta)\,e^{-i\alpha_0}K_1(\nu_j^*\rho_0)\,ds\,,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar z_*}\varphi_{2j+1}\right)^{\pm}_{z\to\zeta_0} = \mp\,\frac{\pi i}{2}\,\frac{p_j(\zeta_0)}{\overline{a_*(\psi_0)}} + \frac{\nu_j^*}{2}\int_\Gamma p_j(\zeta)\,e^{i\alpha_0}K_1(\nu_j^*\,\rho_0)\,ds\,, \tag{35}$$

где $\rho_0 = |\,\zeta_* - \zeta_{*0}\,|$, $\quad \zeta_* - \zeta_{*0} = \rho_0 e^{i\alpha_0}$, $\quad a_*(\psi) = \nu_*\cos\psi - \sin\psi$, $\quad \psi_0 = \psi(\zeta_0)$.

В рассматриваемом случае слоя с полостью под ψ будем понимать угол между внешней нормалью к конечной области M, ограниченной контуром Γ, и осью Ox_1. При таком соглашении в соотношениях (35) необходимо оставить нижний знак.

Наконец, подставляя предельные значения (35) в граничные равенства (31), получаем (не более чем) счетную систему несвязанных сингулярных интегральных уравнений второго рода

$$p_j(\zeta_0) - \frac{\lambda_j}{\pi}\int_\Gamma p_j(\zeta)\,H_j(\zeta,\zeta_0)\,ds = \frac{q_j(\xi_{10},\xi_{20})}{\pi\sqrt{\Delta}}\,, \qquad j = 0,1,\ldots,$$

$$\lambda_j = \frac{\nu_j^*}{\sqrt{\Delta}}\,, \qquad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2\,,$$

$$H_j(\zeta,\zeta_0) = \mathrm{Re}\,\{\beta(\psi_0)\,e^{-i\alpha_0}\}\,K_1(\nu_j^*\,\rho_0)\,. \tag{36}$$

При выводе интегральных уравнений (36) использована формула, справедливая для трансверсально-изотропной среды:

$$\beta(\psi) = -\,i\sqrt{\Delta}\,a_*(\psi)\,.$$

Тепловые волны в слое, порожденные потоком (28) через поверхность полости, определяются интегральными уравнениями (36), соотношениями (33) и (20).

Таким образом, построенные однородные решения дают возможность наметить аналитические процедуры сведения граничных задач теплопроводности для кусочно-однородного анизотропного слоя к интегральным уравнениям.

1. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
2. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 312 с.
3. *Фильштинский Л. А.* Взаимодействие волн напряжений с криволинейными туннельными трещинами продольного сдвига в полупространстве // Прикл. математика и механика. – 1982. – **46**, № 3. – С. 482–487.

ПЕРІОДИЧНІ В ЧАСІ ОДНОРІДНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНОГО ШАРУ В $\mathbb{R}^3$

Запропоновано новий спосіб побудови однорідних розв'язків рівнянь теплопровідності для анізотропного шару в $\mathbb{R}^3$. *Із використанням цих розв'язків розглянуто граничну задачу теплопровідності для шару, послабленого наскрізною тунельною порожниною, на поверхні якої задано тепловий потік, що періодично змінюється у часі. Задачу про теплові хвилі у шарі з порожниною зведено до системи інтегральних рівнянь.*

TIME PERIODICAL HOMOGENEOUS SOLUTIONS OF HEAT CONDUCTION EQUATION FOR ANISOTROPIC LAYER IN $\mathbb{R}^3$

A new algorithm for construction homogeneous solutions to heat conduction problem for anisotropic layer in $\mathbb{R}^3$ *has been developed. The boundary-value problem for anisotropic layer with a cavity has been explored with the help of these solutions. Periodically varying in time heat flow is determined on the cavity surface. The mentioned problem has been entirely reduced to a system of integral equations.*

Сум. гос. ун-т, Сумы

Получено
21.02.03