УДК 518.5; 621.746.62

В. М. Колодяжний, В. О. Рвачов

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАЛИШКОВОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ВІДЛИВКА В УМОВАХ ВИНИКНЕННЯ КРИСТАЛІЗАЦІЙНИХ ТРІЩИН

Пропонується метод розв'язування задачі теорії пружності, оснований на реалізації ідеї визначення бігармонічної функції у заданій області за допомогою спеціальних локалізованих розв'язків першої крайової задачі для рівняння Лапласа в канонічних областях з застосуванням методу граничної колокації.

Утворення гарячих або кристалізаційних тріщин у процесі формування відливка суттєво знижує ефективність технології ливарного виробництва. Моделювання напруженого стану відливка в умовах виникнення сукупності різних за розміром і розміщенням кристалізаційних тріщин зумовлено практичною необхідністю дослідження впливу цих дефектів на властивості виробу.

Відомо, що поведінка сплавів у температурному інтервалі крихкості залежить від температури та неоднорідності властивостей середовища, які спричиняються нерівномірним розподілом температур в об'ємі відливка. Нерівномірний розподіл температури в об'ємі відливка (температурні поля у реального відливка індивідуальні і визначаються, зокрема, геометрією відливка) та неодночасне протікання фазових перетворень зумовлюють формування кристалізаційних температурних напружень, які виникають у локальних зонах в результаті утруднень усадки відливка. Наявність прошарків рідини в кристалічному каркасі, міжзеренних деформацій, переміщень, поворотів кристалітів один відносно одного сприяють зародженню і розвитку тріщин. Взаємодія відливка та форми, окремих елементів відливка, низка процесів, що мають місце при охолодженні, спричиняють виникнення напружень. Залишкові напруження в окремих локальних зонах можуть сягати границь міцності та зумовлювати руйнування відливків [3, 4].

При охолодженні відливка тріщина розвивається в довжину та ширину. Вважаємо, що ширина тріщини збільшується неперервно, а поширення у поздовжньому напрямі відбувається в околі температури кристалізації. Труднощі при моделюванні процесів формування тріщин зумовлені відсутністю детальних даних про властивості сплавів, їх залежності від температури, особливостей ливарної форми та змінах у процесі взаємодії відливка та форми, ускладнень при розрахунках температурного поля і напружень в умовах складного напруженого стану реального відливка [3, 10].

Тому припускаємо, що відливок є вже зі сформованою сукупністю тріщин, які утворилися в результаті технологічних процесів охолодження відливка, тобто в умовах складного напруженого стану тіла. Для розрахунку зовнішніх зусиль, які можуть спровокувати подальше поширення тріщин, необхідно розробити методику визначення напруженого стану тіла відливка, в якому є різні за формою та розміщенням тріщини.

Для вирішення вказаної проблеми пропонується метод розв'язування задачі теорії пружності для скінченного тіла при наявності системи тріщин. Розміри тріщин, їх кількість у зоні розтріскування визначаються згідно з практичними спостереженнями на основі можливого передбачення або за результатами спеціальних методів діагностики дефектів після завершення процесу формування відливка. У роботі розглянуто двовимірну модель, але такий підхід може бути поширений і на випадок дослідження тривимірного відливка.

Нехай достатньо гладкий контур $\partial\Omega_0$ оточує декілька замкнутих криволінійних розрізів $\partial\Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, контури яких є гладкими та не мають спільних точок (рис. 1). Розміри та розміщення однієї тріщини відносно інших можуть бути довільними.

У випадку плоскої деформації при відсутності масових сил напружений стан тіла у перетині, паралельному до площини деформації, буде визначатися допоміжними умовами, які забезпечують рівновагу зовнішніх сил, що прикладені на кожній з границь області, його формою і не залежатиме від властивостей матеріалу тіла [2].

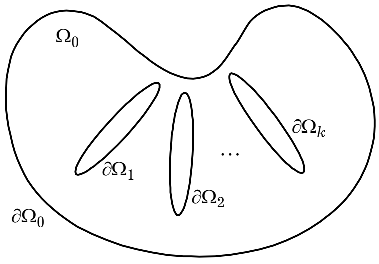

Рис. 1

Як відомо [4], для того щоб функція напружень визначала дійсний напружений стан відливка, необхідно та достатньо, щоб вона була бігармонічною:

$$\Delta\Delta\Phi(x_1, x_2) = 0\,, \tag{1}$$

де $\Delta\Delta = \dfrac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\dfrac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \dfrac{\partial^4}{\partial x_2^4}$; $\Phi(x_1, x_2)$ – функція напружень Ері.

Це рівняння виконується у багатозв'язній області Ω_0. Вважаємо, що функція напружень в області має неперервні похідні до 4-го порядку. Функція Ері повинна задовольняти відповідні граничні умови. Нехай на всіх контурах, що визначають область розв'язання задачі, ці умови мають вигляд

$$\Phi(x_1, x_2) = g_s(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \partial\Omega_s\,,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x_1, x_2) = q_s(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \partial\Omega_s, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, k\,, \tag{2}$$

де ν – зовнішня нормаль до границі області Ω_s.

Таким чином, розв'язування плоскої задачі теорії пружності зводиться до визначення бігармонічної функції (1) за відомими на контурах значеннями цієї функції та її нормальних похідних (2).

Шуканий розв'язок будуємо на основі підходу до розв'язування крайових задач, який використовується у роботах В. Д. Купрадзе [5], М. А. Алексідзе [1], К. Ректоріса [8, 14]. Наближений розв'язок крайової задачі вибирається таким, що точно задовольняє вихідне диференціальне рівняння і наближено – граничні умови.

Система координатних функцій складається зі спеціально вибраних і прив'язаних до визначених точок парної сукупності: гармонічної функції і гармонічної функції з множником у вигляді многочлена, не вище другого степеня. Пропонується використовувати апроксимаційно гнучкішу систему локалізованих базисних функцій для забезпечення високої якості наближення та отримання добре обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких зводиться вирішення вихідної задачі.

Точно справдити диференціальне рівняння можна при використанні розв'язків першої крайової задачі для диференціального рівняння Лапласа у визначених канонічних областях – внутрішності круга, зовнішності круга, у півплощини та інших. Вважаємо, що означені канонічні області G_μ обмежені відповідними контурами ∂G_μ та є областями площини (x_1, x_2); ν – напрямок нормалі до контуру, зовнішній щодо області G_μ.

Якщо контури є колами, то їх рівняння мають таку канонічну форму:

$$\omega_\mu(x_1, x_2) \equiv R^2 - (x_1 - \alpha_\mu)^2 - (x_2 - \beta_\mu)^2 = 0\,,$$

де $(\alpha_\mu,\ \beta_\mu)$ – координати центрів кіл.

Для півплощин контури є прямими:

$$\omega_\mu(x_1, x_2) \equiv (x_1 - \alpha_\mu)/(\beta_\mu - \alpha_\mu) - (x_2 - \gamma_\mu)/(\delta_\mu - \gamma_\mu) = 0\,,$$

де $P_1(\alpha_\mu, \beta_\mu)$ та $P_2(\delta_\mu, \gamma_\mu)$ – точки на прямих ∂G_μ, які вибирають у послідовності, що зумовлена орієнтацією (зліва від контуру) області відносно контуру (рис. 2).

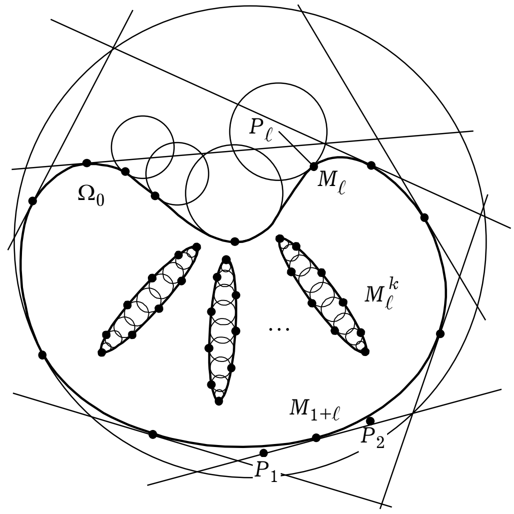

Рис. 2

У заданих канонічних областях гармонічні функції $u_\mu(x_1, x_2)$ ($\Delta u_\mu = 0$ в G_μ, та $u_\mu = h_\mu(x_1, x_2)$ на ∂G_μ) подаємо у вигляді інтеграла Пуассона [9]. Щоб визначити шукану гармонічну функцію в означеній канонічній області, треба задавати додаткову інформацію про розміщення цієї області та про вигляд функції $h_\mu(x_1, x_2)$ – граничної умови. Якщо канонічна область є внутрішнім або зовнішнім кругом, то гармонічна функція у ній є функцією, що залежить від двох координат (x_1, x_2) та п'яти параметрів: координат центра кола (x_1^0, x_2^0), локальної системи координат (ρ, φ) та допоміжної інформації про граничну функцію $\hbar$:

$$u(x_1, x_2) = u(x_1, x_2;\ \alpha, \beta, \delta, \gamma, \hbar),$$

$$(\alpha,\ \beta) = (x_1^0,\ x_2^0), \qquad (\delta,\ \gamma) = (\rho,\ \varphi), \qquad \hbar = \operatorname{supp} h(R, \varphi).$$

Подібним набором параметрів, але з відповідною зміною їх змісту, задається гармонічна функція для півплощини.

За допомогою гармонічних функцій, що породжуються фундаментальними розв'язками першої крайової задачі для рівняння Лапласа, будуємо лінійно незалежну систему координатних функцій

$$\left\{u_\mu(x_1, x_2;\ \alpha_\mu, \beta_\mu, \delta_\mu, \gamma_\mu, \hbar_\mu) + \omega_\mu(x_1, x_2) u_\mu(x_1, x_2;\ \alpha_\mu, \beta_\mu, \delta_\mu, \gamma_\mu, \hbar_\mu)\right\},$$

параметри якої будуть підпорядковані наступним вимогам.

Нехай на контурі $\partial\Omega_0$ рівномірно розміщена послідовність точок $M_\ell = M_\ell(x_1^\ell, x_2^\ell)$. У кожній точці M_ℓ поставимо зовнішній до області Ω_0 перпендикуляр, на якому визначимо точку $P_\ell = P(x_1^{\ell 0}, x_2^{\ell 0})$ – координати центра кола радіуса $\delta_\ell = \nu(M_\ell, P_\ell)$, де $\nu(M_\ell, P_\ell)$ – відстань між точками M_ℓ та P_ℓ. Вказаної інформації достатньо для побудови кола, а значить – для отримання функції $\omega_\mu(x_1, x_2)$, яка буде описувати це коло.

Через точку $M_{\ell+1}(x_1^{\ell+1}, x_2^{\ell+1})$ (рис. 2) можна провести дотичну пряму, яка не перетинатиме область Ω_0 (на ділянці опуклості контуру). Якщо задати на цій прямій дві точки $P_1(\alpha^{\ell+1}, \beta^{\ell+1})$ і $P_2(\delta^{\ell+1}, \gamma^{\ell+1})$ відповідно до розміщення півплощини поза областю Ω_0, то отримуємо функцію $\omega_\mu(x_1, x_2)$, яка описує канонічну область, та необхідні значення параметрів елемента шуканої системи.

Параметр $\hbar_\mu$ вибираємо, застосовуючи критерій найкращих апроксимаційних властивостей систем функцій, які будуть наближено представляти граничні функції вихідної крайової задачі. До таких систем відносимо системи атомарних функцій $\mathrm{up}(x/\eta)$ [7], системи хвильок (*wavelet* системи) [11, 13], системи елементарних хвильок [12]. Зауважимо, що вибір апроксимаційних властивостей атомарної функції $\mathrm{up}(x)$ пов'язаний з визначенням величини носія цієї фінітної функції: $\hbar = \mathrm{supp}\,\mathrm{up}(x/\eta)$.

На берегах k-ї тріщини також розмістимо послідовність рівномірно вибраних точок M_ℓ^k і згідно з наведеною вище процедурою впишемо в тріщину круги, в зовнішності яких будемо відбудовувати гармонічні функції. Якщо тріщина вузька, то вписуємо в відповідну тріщину круги, центри яких будуть розташовані на лінії геометричного центру області тріщини (лінії, точки якої рівновіддалені від меж тріщини) (рис. 2). Шукані точки M_ℓ^k визначатимуться, як точки дотику круга до берега тріщини. Для кожного такого круга вибираємо одну точку дотику.

Кожна функція з системи координатних функцій зображується сумою гармонічної функції та добутку гармонічної функції на многочлен, не вище другого степеня:

$$\{u_\mu^\ell(x_1, x_2;\ \alpha_\mu, \beta_\mu, \delta_\mu, \gamma_\mu, \hbar_\mu) + \omega_\mu^\ell(x_1, x_2)u_\mu^\ell(x_1, x_2;\ \alpha_\mu, \beta_\mu, \delta_\mu, \gamma_\mu, \hbar_\mu)\} =$$

$$= \{u_\mu^\ell(x_1, x_2) + \omega_\mu^\ell(x_1, x_2)u_\mu^\ell(x_1, x_2)\}$$

і задовольняє всюди в області Ω_0 бігармонічне рівняння. Множник $\omega_\mu^\ell(x_1, x_2)$ біля гармонічної в Ω_0 функції $u_\mu^\ell(x_1, x_2;\ \alpha_\mu, \beta_\mu, \delta_\mu, \gamma_\mu, \hbar_\mu)$ не виводить останню з класу бігармонічних функцій [9].

Таким чином, система координатних функцій складається з r_0 функцій, які були утворені за рахунок розподілу точок вздовж границі $\partial\Omega_0$, та $\sum\limits_{s=1}^{k} r_s$ функцій, які утворені за рахунок розподілу точок вздовж берегів k тріщин.

Наближений розв'язок вихідної крайової задачі шукаємо у вигляді

$$u_n(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{r_0}\left[a_i^0\, u_\mu^{0i}(x_1, x_2) + b_i^0\, \omega_\mu^{0i}(x_1, x_2)\, u_\mu^{0i}(x_1, x_2)\right] +$$

$$+ \sum_{s=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_s}\left[a_j^s\, u_\mu^{sj}(x_1, x_2) + b_j^s\, \omega_\mu^{sj}(x_1, x_2)\, u_\mu^{sj}(x_1, x_2)\right], \qquad (3)$$

де індекс μ вказує на тип канонічної області та вибирається згідно з характерними особливостями початкової області (рис. 2); $n = 1, 2, \ldots, r_0 + \sum\limits_{s=1}^{k} r_s$.

Невідомі коефіцієнти a_i^0, b_i^0, a_j^s, b_j^s, $i = 1, 2, \ldots, r_0$, $s = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, r_s$, визначаємо за допомогою методу граничної колокації. З цією метою точки дотику M_ℓ канонічних областей та початкової області будемо вважати вузлами колокації. Всього маємо $r_0 + \sum\limits_{s=1}^{k} r_s$ точок. Поставимо вимогу, щоб у вузлах колокації граничні умови (2) задовольнялись для подання (3).

Для знаходження коефіцієнтів $a_i^0,\ b_i^0,\ a_j^s,\ b_j^s,\ \ i = 1,2,\dots,r_0,\ s = 1,2,\dots,k$, $j = 1,2,\dots,r_s$, побудуємо лінійну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{r_0} \left[a_i^0\, u_\mu^{0i}(x_1^\ell, x_2^\ell) + b_i^0\, \omega_\mu^{0i}(x_1^\ell, x_2^\ell)\, u_\mu^{0i}(x_1^\ell, x_2^\ell) \right] +$$

$$+ \sum_{s=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_s} \left[a_j^s\, u_\mu^{sj}(x_1^\ell, x_2^\ell) + b_j^s\, \omega_\mu^{sj}(x_1^\ell, x_2^\ell)\, u_\mu^{sj}(x_1^\ell, x_2^\ell) \right] = g(x_1^\ell, x_2^\ell),$$

$$\sum_{i=1}^{r_0} \left\{ a_i^0 \frac{\partial}{\partial \nu} u_\mu^{0i}(x_1^\ell, x_2^\ell) + b_i^0 \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\omega_\mu^{0i}(x_1^\ell, x_2^\ell)\, u_\mu^{0i}(x_1^\ell, x_2^\ell) \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_s} \left\{ a_j^s \frac{\partial}{\partial \nu} u_\mu^{sj}(x_1^\ell, x_2^\ell) + b_j^s \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\omega_\mu^{sj}(x_1^\ell, x_2^\ell)\, u_\mu^{sj}(x_1^\ell, x_2^\ell) \right] \right\} = h(x_1^\ell, x_2^\ell),$$

$$\ell = 1,2,\dots,r_0 + \sum_{s=1}^{k} r_s .$$

Обчислення нормальних похідних можна виконувати згідно з підходом В. Л. Рвачова [6] до продовження граничних функцій.

Для цього будемо застосовувати функції $\chi_s(x,y)$, $s = 0,1,\dots,k$ (які описують контури вихідної області), нормалізовані до першого порядку, тобто $\chi_s\big|_{\partial\Omega_s} = 0,\ \left.\dfrac{\partial \chi_s}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega_s} = 1,\ s = 0,1,\dots,k$. Тоді, використовуючи спеціальні диференціальні оператори $D_{\chi_s} = \dfrac{\partial \chi_s}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \chi_s}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial x_2},\ \ s = 0,1,\dots,k$, отримуємо наступну форму лінійної системи:

$$\sum_{i=1}^{r_0} \left[a_i^0\, u_\mu^{0i}(x_1^\ell, x_2^\ell) + b_i^0\, \omega_\mu^{0i}(x_1^\ell, x_2^\ell)\, u_\mu^{0i}(x_1^\ell, x_2^\ell) \right] +$$

$$+ \sum_{s=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_s} \left[a_j^s\, u_\mu^{sj}(x_1^\ell, x_2^\ell) + b_j^s\, \omega_\mu^{sj}(x_1^\ell, x_2^\ell)\, u_\mu^{sj}(x_1^\ell, x_2^\ell) \right] = g(x_1^\ell, x_2^\ell),$$

$$\sum_{i=1}^{r_0} \Big\{ a_i^0 D_{\chi_0} u_\mu^{0i}(x_1^\ell, x_2^\ell) + b_i^0 \left[\omega_\mu^{0i}(x_1^\ell, x_2^\ell) D_{\chi_0} u_\mu^{0i}(x_1^\ell, x_2^\ell) + \right.$$

$$\left. + u_\mu^{0i}(x_1^\ell, x_2^\ell) D_{\chi_0} \omega_\mu^{0i}(x_1^\ell, x_2^\ell) \right] \Big\} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_s} \Big\{ a_j^s D_{\chi_s} u_\mu^{sj}(x_1^\ell, x_2^\ell) + b_j^s \left[\omega_\mu^{sj}(x_1^\ell, x_2^\ell)\, D_{\chi_s} u_\mu^{sj}(x_1^\ell, x_2^\ell) + \right.$$

$$\left. + u_\mu^{sj}(x_1^\ell, x_2^\ell)\, D_{\chi_s} \omega_\mu^{sj}(x_1^\ell, x_2^\ell) \right] \Big\} = h(x_1^\ell, x_2^\ell), \qquad \ell = 1,2,\dots,r_0 + \sum_{s=1}^{k} r_s .$$

Зауважимо, що практична реалізація запропонованого підходу передбачає дослідження питання про оптимальне розміщення точок прив'язки канонічних областей до початкової області задачі, що може поліпшити оцінку наближення до шуканих розв'язків. Дослідження цієї проблеми виходить за рамки даної статті.

1. *Алексидзе М. А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. – М.: Наука, 1991. – 352 с.
2. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. – М.: Высш. шк., 1976. – 272 с.
3. *Баландин Г. Ф.* Основы теории формирования отливки: В 2 ч. – М.: Машиностроение, 1976. – Ч. 1. – 328 с.; 1979. – Ч. 2. – 335 с.
4. *Константинов Л. С., Трухов А. П.* Напряжения, деформации и трещины в отливках. – М.: Машиностроение, 1981. – 199 с.
5. *Купрадзе В. Д.* О приближенном решении задач математической физики // Успехи мат. наук. – 1967. – **22**, № 2 (134). – С. 59–107.
6. *Рвачев В. Л.* Теория *R*-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 551 с.
7. *Рвачев В. Л., Рвачев В. А.* Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. – Киев: Наук. думка, 1979. – 196 с.
8. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 589 с.
9. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
10. *Флемингс М.* Процессы затвердевания. – М.: Мир, 1977. – 424 с.
11. *Kolodyazhny V. M., Rvachov V. O.* On some elementary orthogonal wavelet systems // Доп. НАН України. – 1995. – № 2. – С. 20–22.
12. *Kolodyazhny V. M., Rvachov V. O.* On the construction of Y. Meyer wavelets using up(x) function // Доп. АН України. – 1993. – № 10. – С. 18–24.
13. *Louis A. K., Maaß P., Rieder A.* Wavelets. Theory and Applications. – Chichester: John Wiley & Sons, 1997. – 324 p.
14. *Rektorys K., Danešová J., Matyska J., Vitner Č.* Solution of the first problem of plane elasticity for multiply connected regions by the method of least squares on the boundary. Part I, Part II // Aplikace Matematiky. – 1977. – **22**, No. 5. – P. 349–394; – **22**, No. 6. – P. 425–454.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОТЛИВКИ В УСЛОВИЯХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КРИСТАЛЛИЗАЦИОННЫХ ТРЕЩИН

Предлагается метод решения задачи теории упругости, основанный на реализации идеи определения бигармонической функции в заданной области при помощи специальных локализованных решений первой краевой задачи для уравнения Лапласа в канонических областях с применением метода граничной коллокации.

SIMULATION OF RESIDUAL STRESSED STATE OF CASTING UNDER CONDITIONS OF CRYSTALLINE CRACKS BIRTH

The method for solution of elasticity theory problem is proposed, based on realization of the idea of biharmonic function determination in the given domain with the help of special localized solutions to the Laplace first boundary-value problem in the canonical domains using the boundary collocation method.

Ін-т проблем машинобудування
ім. А. М. Підгорного НАН України, Харків,

Нац. аерокосм. ун-т
ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», Харків

Одержано
01.02.03