УДК 539.3

Б. В. Процюк

ТРИВИМІРНІ СТАТИЧНІ ТА КВАЗІСТАТИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТИХ ТІЛ ІЗ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИМИ ГРАНИЦЯМИ

З використанням функцій Гріна крайових задач для системи трьох звичайних частково вироджених диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами отримано за відомих факторів збурення розв'язки тривимірних статичних і квазістатичних задач термопружності для шаруватих простору, півпростору та шару з чотирма варіантами граничних умов на кожній з обмежуючих поверхонь на основі одних і тих самих ключових співвідношень.

У [1] викладено підхід до розв'язування за відомого температурного поля осесиметричних статичних і квазістатичних задач термопружності для шаруватих тіл із плоскопаралельними границями, який грунтується на використанні функцій Гріна задач для відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь.

Характерним для цього підходу є те, що, будуючи функції Гріна у напівбезмежній шаруватій області для одного з шести варіантів граничних умов, одночасно отримуються функції Гріна для решти варіантів. Але в подальшому використовуються функції Гріна тільки для чотирьох варіантів граничних умов, для яких вони є симетричними. Причому співвідношення для кожного варіанту відрізняються лише тим, що початкові значення рекурсій беруться відповідно до варіанту граничних умов. Із побудованих таким способом функцій Гріна отримуються шляхом відповідного граничного переходу функції Гріна для необмеженої шаруватої області та обмеженої шаруватої області, на новоутвореній границі якої аналоги нормальних і дотичних напружень або переміщень дорівнюють нулеві.

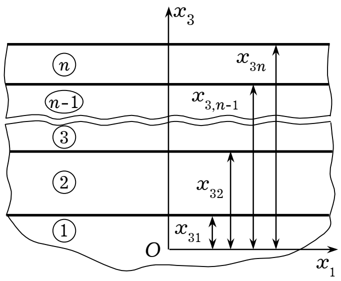

Рис. 1

Метою цієї роботи є отримати з використанням аналогічного підходу розв'язки тривимірних статичних і квазістатичних задач термопружності для шаруватих простору, півпростору та шару з плоскопаралельними границями за відомих температурного поля, масових і поверхневих сил або переміщень.

Розглянемо віднесений до декартової системи координат x_1, x_2, x_3 шаруватий півпростір (переріз зображено на рис. 1) з плоскопаралельними границями поділу, між ізотропними складовими частинами якого здійснюється ідеальний термомеханічний контакт. Температурне поле

$$t = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{t}(\eta_1, \eta_2, x_3)\cos(\eta_1 x_1)\cos(\eta_2 x_2)\, d\eta_1\, d\eta_2\,, \tag{1}$$

у якому знаходиться півпростір, вважаємо відомим з розв'язку відповідної задачі теплопровідності. Крім того припускаємо, що функції $u_{in}^*(x_1, x_2)$, $\sigma_{3in}^*(x_1, x_2)$, яким можуть дорівнювати відповідно значення переміщень та нормальних і дотичних напружень на зовнішній поверхні півпростору, а також масові сили X_i допускають зображення у вигляді інтегралів Фур'є

$$u_{in}^* = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{u}_{in}^*(\eta_1, \eta_2)\cos(\eta_1 x_1)\cos(\eta_2 x_2)\, d\eta_1\, d\eta_2\,,$$

$$\sigma^*_{3in} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \bar{\sigma}^*_{3in}(\eta_1, \eta_2)\cos(\eta_1 x_1)\cos(\eta_2 x_2)\, d\eta_1\, d\eta_2 \,,$$

$$X_i = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \bar{X}_i(\eta_1, \eta_2, x_3)\cos(\eta_1 x_1)\cos(\eta_2 x_2)\, d\eta_1\, d\eta_2, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{2}$$

Переміщення u^*_i, $i = 1, 2, 3$, які загасають на безмежності, визначаємо з системи рівнянь

$$\mu(x_3)u^*_{i,jj} + [\lambda(x_3) + \mu(x_3)]\,\varepsilon^*_{,i} +$$

$$+ \sum_{q=1}^{n-1}\left[\tilde{\mu}_q(u^*_{i,3} + u^*_{3,i}) + \delta_{i3}\tilde{\lambda}_q\varepsilon^*\right]_{x_3 = x_{3q} - 0}\delta(x_3 - x_{3q}) =$$

$$= \left[\gamma^*(x_3)t\right]_{,i} - X_i \tag{3}$$

при такого ж типу граничних умовах на поверхні $x_3 = x_{3n}$, як в осесиметричному випадку:

$$\mathbf{1}^\circ. \quad \sigma^*_{3i} = \sigma^*_{3in}(x_1, x_2), \qquad i = 1, 2, 3\,;$$

$$\mathbf{2}^\circ. \quad u^*_i = u^*_{in}(x_1, x_2), \qquad i = 1, 2, 3\,;$$

$$\mathbf{5}^\circ. \quad u^*_3 = u^*_{3n}(x_1, x_2), \qquad \sigma^*_{3i} = \sigma^*_{3in}(x_1, x_2), \quad i = 1, 2\,;$$

$$\mathbf{6}^\circ. \quad u^*_i = u^*_{in}(x_1, x_2), \qquad i = 1, 2, \qquad \sigma^*_{33} = \sigma^*_{33n}(x_1, x_2)\,. \tag{4}$$

Напруження σ^*_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, визначаємо на основі співвідношень Дюгамеля − Неймана

$$\sigma^*_{ij} = \mu(x_3)(u^*_{i,j} + u^*_{j,i}) + \lambda(x_3)\,\varepsilon^*\delta_{ij} - \gamma^*(x_3)\,t\,\delta_{ij}\,. \tag{5}$$

Тут $\gamma^*(x_3) = \left[3\lambda(x_3) + 2\mu(x_3)\right]\alpha_t(x_3)$; $\lambda(x_3)$, $\mu(x_3)$ і $\alpha_t(x_3)$ − кусково-сталі функції, які в межах k-ї підобласті співпадають з коефіцієнтами Ляме λ_k, μ_k і температурними коефіцієнтами лінійного розширення $\alpha_t^{(k)}$ відповідно; $\tilde{\mu}_q = \mu_{q+1} - \mu_q$; $\tilde{\lambda}_q = \lambda_{q+1} - \lambda_q$; $\varepsilon^* = u^*_{i,i}$; $\delta(z)$ − дельта-функція Дірака; δ_{ij} − символ Кронекера .

Увівши термопружний потенціал переміщень Φ, розв'язок задач (3), (4) подамо у вигляді

$$u^*_i = u_i + \Phi_{,i}\,, \tag{6}$$

де u_i задовольняють систему рівнянь

$$\mu(x_3)u_{i,jj} + [\lambda(x_3) + \mu(x_3)]\,\varepsilon_{,i} +$$

$$+ \sum_{q=1}^{n-1}\left[\tilde{\mu}_q(u_{i,3} + u_{3,i}) + \delta_{i3}\tilde{\lambda}_q\varepsilon\right]_{x_3 = x_{3q} - 0}\delta(x_3 - x_{3q}) = X_{ti} - X_i\,, \tag{7}$$

$$X_{ti} = -\,2\sum_{q=1}^{n-1}\tilde{\mu}_q\Phi_{,i3}\Big|_{x_3 = x_{3q} - 0}\,\delta(x_3 - x_{3q}), \qquad i = 1, 2\,,$$

$$X_{t3} = 2\sum_{q=1}^{n-1}\tilde{\mu}_q(\Phi_{,11} + \Phi_{,22})\Big|_{x_3 = x_{3q} - 0}\,\delta(x_3 - x_{3q})\,,$$

і один із варіантів граничних умов на поверхні $x_3 = x_{3n}$:

$$\textbf{1}^\circ. \quad \sigma_{33} = \sigma^*_{33n} + 2\mu_n(\Phi_{,11} + \Phi_{,22}), \qquad \sigma_{3i} = \sigma^*_{32n} - 2\mu_n \Phi_{,i3}, \quad i = 1,2;$$

$$\textbf{2}^\circ. \quad u_i = u^*_{in} - \Phi,_i, \qquad i = 1,2,3;$$

$$\textbf{5}^\circ. \quad u_3 = u^*_{3n} - \Phi,_3, \qquad \sigma_{3i} = \sigma^*_{32n} - 2\mu_n \Phi_{,i3}, \quad i = 1,2;$$

$$\textbf{6}^\circ. \quad u_i = u^*_{in} - \Phi,_i, \qquad i = 1,2, \qquad \sigma_{33} = \sigma^*_{33n} + 2\mu_n(\Phi_{,11} + \Phi_{,22}). \tag{8}$$

Тут $\sigma_{ij} = \mu(x_3)(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda(x_3)\varepsilon\delta_{ij}$, $\varepsilon = u_{i,i}$, $i, j = 1,2,3$.

Термопружний потенціал $\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3)$, як частковий розв'язок рівняння

$$\nabla^2\Phi = \gamma(x_3)t, \qquad \gamma(x_3) = \alpha_t(x_3)[1 + \nu(x_3)][1 - \nu(x_3)]^{-1}, \tag{9}$$

вибираємо таким:

$$\Phi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{\Phi}\cos(\eta_1 x_1)\cos(\eta_2 x_2)\,d\eta_1\,d\eta_2, \tag{10}$$

де $\bar{\Phi} = -\dfrac{1}{2\beta}\displaystyle\int_{-\infty}^{x_{3n}} \gamma(\zeta)\,\bar{t}(\eta_1, \eta_2, \zeta)\,e^{-\beta|x_3 - \zeta|}\,d\zeta$.

Напруження, які йому відповідають, визначатимуться тоді за формулами

$$\sigma^t_{ii} = -\mu(x_3)\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \eta_i^2\bar{\Phi}\cos(\eta_1 x_1)\cos(\eta_2 x_2)\,d\eta_1\,d\eta_2 + \gamma(x_3)\,t\right], \quad i = 1,2,$$

$$\sigma^t_{12} = \frac{4\mu(x_3)}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \eta_1\eta_2\bar{\Phi}\sin(\eta_1 x_1)\sin(\eta_2 x_2)\,d\eta_1\,d\eta_2,$$

$$\sigma^t_{13} = -\frac{4\mu(x_3)}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \eta_1\,\bar{\Phi}'\sin(\eta_1 x_1)\cos(\eta_2 x_2)\,d\eta_1\,d\eta_2,$$

$$\sigma^t_{23} = -\frac{4\mu(x_3)}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \eta_2\bar{\Phi}'\cos(\eta_1 x_1)\sin(\eta_2 x_2)\,d\eta_1\,d\eta_2,$$

$$\sigma^t_{33} = \frac{4\mu(x_3)}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \beta^2\bar{\Phi}\cos(\eta_1 x_1)\cos(\eta_2 x_2)\,d\eta_1\,d\eta_2. \tag{11}$$

Розв'язок задач (7), (8) відповідно до (2), (10) будемо шукати у вигляді

$$u_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{u}_1\sin(\eta_1 x_1)\cos(\eta_2 x_2)\,d\eta_1\,d\eta_2,$$

$$u_2 = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{u}_2\cos(\eta_1 x_1)\sin(\eta_2 x_2)\,d\eta_1\,d\eta_2,$$

$$u_3 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{u}_3\cos(\eta_1 x_1)\cos(\eta_2 x_2)\,d\eta_1\,d\eta_2. \tag{12}$$

Підставивши (2), (10), (12) в (7) і (8), отримаємо для знаходження $\bar{u}_i$ систему рівнянь

$$D_i(\bar u_1,\bar u_2,\bar u_3)\equiv \mu(x_3)(\bar u_i''-\beta^2\bar u_i)+(-1)^i\eta_i\left[\lambda(x_3)+\mu(x_3)\right]\bar\varepsilon +$$
$$+\sum_{q=1}^{n-1}\tilde\mu_q(\bar u_{i,3}+(-1)^i\eta_i\bar u_3)\Big|_{x_3=x_{3q}-0}\delta(x_3-x_{3q})=$$
$$=2\eta_i\sum_{q=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\tilde\mu_q\bar\Phi'\Big|_{x_3=x_{3q}-0}\delta(x_3-x_{3q})-\bar X_i,\qquad i=1,2,$$
$$D_3(\bar u_1,\bar u_2,\bar u_3)\equiv \mu(x_3)(\bar u_3''-\beta^2\bar u_i)+\left[\lambda(x_3)+\mu(x_3)\right]\bar\varepsilon_{,3} +$$
$$+\sum_{q=1}^{n-1}(2\tilde\mu_q\bar u_{3,3}+\tilde\lambda_q\bar\varepsilon)\Big|_{x_3=x_{3q}-0}\delta(x_3-x_{3q})=$$
$$=-\,2\beta^2\sum_{q=1}^{n-1}\tilde\mu_q\beta^2\bar\Phi\Big|_{x_3=x_{3q}-0}\delta(x_3-x_{3q})-X_3 \qquad (13)$$

з наступними варіантами граничних умов:

$$\textbf{1}^\circ.\quad \bar\sigma_{33}=\bar\sigma^*_{33n}-2\mu_n\beta^2\bar\Phi,\qquad \bar\sigma_{3i}=\bar\sigma^*_{3in}+2\mu_n\eta_i\bar\Phi',\quad i=1,2;$$
$$\textbf{2}^\circ.\quad \bar u_i=\bar u^*_{in}+\eta_i\bar\Phi,\qquad i=1,2,\qquad \bar u_3=\bar u^*_{3n}-\bar\Phi';$$
$$\textbf{5}^\circ.\quad \bar u_3=\bar u^*_{3n}-\bar\Phi',\qquad \bar\sigma_{3i}=\bar\sigma^*_{3in}+2\mu_n\eta_i\bar\Phi',\qquad i=1,2;$$
$$\textbf{6}^\circ.\quad \bar u_i=\bar u^*_{in}+\eta_i\bar\Phi,\qquad i=1,2,\qquad \bar\sigma_{33}=\bar\sigma^*_{33n}-2\mu_n\beta^2\bar\Phi, \qquad (14)$$

де $\beta^2=\eta_1^2+\eta_2^2$, $\quad\bar\sigma_{3i}=\mu(x_3)\left[(-1)^i\bar u_i'-\eta_i\bar u_3\right]$, $\quad i=1,2$,

$\bar\sigma_{33}=2\mu(x_3)\bar u_3'+\lambda(x_3)\varepsilon$, $\quad\bar\varepsilon=\bar u_1\eta_1-\bar u_2\eta_2+\bar u_3'$.

Задачі (13), (14) розв'язуємо методом функцій Гріна. Функції Гріна $\bar G_i^{(k)}=\bar G_i^{(k)}(\eta_1,\eta_2,x_3,\xi_3)$ визначаємо з системи рівнянь

$$D_i(\bar G_1^{(k)},\bar G_2^{(k)},\bar G_3^{(k)})=-\,\delta_{ik}\,\delta(x_3-\xi_3),\qquad i=1,2,\quad k=1,2,3,$$
$$D_3(\bar G_1^{(k)},\bar G_2^{(k)},\bar G_3^{(k)})=-\,\delta_{3k}\,\delta(x_3-\xi_3) \qquad (15)$$

з відповідними однорідними граничними умовами на поверхні $x_3=x_{3n}$:

$$\textbf{1}^\circ.\quad \bar\tau_{33}^{(k)}=\bar\tau_{32}^{(k)}=\bar\tau_{31}^{(k)}=0;\qquad \textbf{2}^\circ.\quad \bar G_1^{(k)}=\bar G_2^{(k)}=\bar G_3^{(k)}=0;$$
$$\textbf{5}^\circ.\quad \bar G_3^{(k)}=0,\quad \bar\tau_{31}^{(k)}=\bar\tau_{32}^{(k)}=0;\qquad \textbf{6}^\circ.\quad \bar G_1^{(k)}=\bar G_2^{(k)}=0,\quad \bar\tau_{33}^{(k)}=0, \qquad (16)$$

де $\bar\tau_{3i}^{(k)}=\mu(x_3)\left[(-1)^{i+1}\bar G_i^{(k)'}-\eta_i\bar G_3^{(k)}\right]$, $\quad i=1,2$, $\quad\bar\tau_{33}^{(k)}=2\mu(x_3)G_3^{(k)'}+\lambda(x_3)\bar\varepsilon^{(k)}$,

$\bar\varepsilon^{(k)}=\eta_1\bar G_1^{(k)}-\eta_2\bar G_2^{(k)}+\bar G_3^{(k)'}$.

Задачі (15), (16), увівши функції

$$\bar U_1^{(k)}=\eta_2\bar G_1^{(k)}+\eta_1\bar G_2^{(k)},\qquad \bar U_2^{(k)}=\eta_1\bar G_1^{(k)}-\eta_2\bar G_2^{(k)}, \qquad (17)$$

зводимо до задач

$$\mu(x_3)(\bar U_1^{(k)''}-\beta^2\bar U_1^{(k)})+\sum_{q=1}^{n-1}\tilde\mu_q\bar U_1^{(k)'}\Big|_{x_3=x_{3q}-0}\delta(x_3-x_{3q})=-\,\Upsilon_{1k}\delta(x_3-\xi_3), \qquad (18)$$

$$\bar U_1^{(k)'}\Big|_{x_3=x_{3n}}=0\qquad\text{або}\qquad \bar U_1^{(k)}\Big|_{x_3=x_{3n}}=0, \qquad (19)$$

які є аналогами задач для визначення в шаруватому півпросторі трансформант температури або трансформант переміщення при крученні і задач для системи рівнянь

$$\mu(x_3)\big[\,\bar{U}_2^{(k)''} - 2g_1(x_3)\beta^2\bar{U}_2^{(k)} - g_2(x_3)\beta^2\bar{G}_3^{(k)'}\,\big] +$$

$$+\sum_{q=1}^{n-1}\tilde{\mu}_q\big[\,\bar{U}_2^{(k)'} - \beta^2\bar{G}_3^{(k)}\big]\Big|_{x_3=x_{3q}-0}\delta(x_3 - x_{3q}) = -\,\Upsilon_{2k}\delta(x_3 - \xi_3)\,,$$

$$\mu(x_3)\big[\,2g_1(x_3)\bar{G}_3^{(k)''} - \beta^2\bar{G}_3^{(k)} + g_2(x_3)\bar{U}_2^{(k)'}\,\big] +$$

$$+\sum_{q=1}^{n-1}\big[2\tilde{\mu}_q\bar{G}_3^{(k)'} + \tilde{\lambda}_q\bar{e}\,\big]\Big|_{x=x_{3q}-0}\delta(x_3 - x_{3q}) = -\,\delta_{3k}\,\delta(x_3 - \xi_3) \quad (20)$$

з такими варіантами граничних умов на поверхні $x_3 = x_{3n}$:

$$\textbf{1}^\circ.\ \ \bar{\bar{\tau}}_{33}^{(k)} = \bar{\bar{\tau}}_{32}^{(k)} = 0\,; \qquad \textbf{2}^\circ.\ \ \bar{U}_2^{(k)} = \bar{G}_3^{(k)} = 0\,;$$

$$\textbf{5}^\circ.\ \ \bar{G}_3^{(k)} = 0, \quad \bar{\bar{\tau}}_{32}^{(k)} = 0\,; \qquad \textbf{6}^\circ.\ \ \bar{U}_2^{(k)} = 0, \quad \bar{\bar{\tau}}_{33}^{(k)} = 0\,. \quad (21)$$

Ці задачі є аналогами задач для визначення трансформант осесиметричних переміщень шаруватого півпростору.

Тут $\bar{\bar{\tau}}_{33}^{(k)} = 2\mu(x_3)\,\bar{G}_3^{(k)'} + \lambda(x_3)\bar{e}^{(k)}$, $\quad \bar{\bar{\tau}}_{23}^{(k)} = \mu(x_3)\big(\bar{U}_2^{(k)'} - \beta^2\bar{G}_3^{(k)}\big)$,

$\bar{e}^{(k)} = \beta\bar{G}_3^{(k)'} + \bar{U}_2^{(k)}$; $\quad g_1(x_3) = g_2(x_3)g_3(x_3)$, $\quad g_2(x_3) = [1 - 2\nu(x_3)]^{-1}$,

$g_3(x_3) = 1 - \nu(x_3)$; $\quad \Upsilon_{1k} = \eta_2\delta_{1k} + \eta_1\delta_{2k}$, $\quad \Upsilon_{2k} = \eta_1\delta_{1k} - \eta_2\delta_{2k}$.

Розв'язок сформульованих задач визначаємо за допомогою функцій Гріна відповідних крайових задач для звичайного диференціального рівняння [2] і для системи звичайних диференціальних рівнянь [1]. З урахуванням цих функцій Гріна та співвідношень (17) одержимо

$${}_s\bar{G}_1^{(k)}(x_3,\xi_3) = \beta^{-2}\big\{{}_s\bar{U}_1^{(k)}(x_3,\xi_3)\,\eta_2 + \eta_1\big[\,{}_s\tilde{G}_r^{(r)}(x_3,\xi_3)\Upsilon_{2k} + {}_s\tilde{G}_r^{(z)}(x_3,\xi_3)\,\beta\,\delta_{3k}\big]\big\}\,,$$

$${}_s\bar{G}_2^{(k)}(x_3,\xi_3) = \beta^{-2}\big\{{}_s\bar{U}_1^{(k)}(x_3,\xi_3)\eta_1 - \eta_2\big[\,{}_s\tilde{G}_r^{(r)}(x_3,\xi_3)\Upsilon_{2k} + {}_s\tilde{G}_r^{(z)}(x_3,\xi_3)\,\beta\,\delta_{3k}\big]\big\}\,,$$

$${}_s\bar{G}_3^{(k)}(x_3,\xi_3) = \beta^{-1}\big[\,{}_s\tilde{G}_z^{(r)}(x_3,\xi_3)\Upsilon_{2k} + {}_s\tilde{G}_z^{(z)}(x_3,\xi_3)\,\beta\delta_{3k}\big]. \quad (22)$$

Тут індекс «s» вказує, який із варіантів граничних умов (16) задовольняють функції Гріна. Функції ${}_s\tilde{G}_r^{(r)}(x_3,\xi_3)$, ${}_s\tilde{G}_r^{(z)}(x_3,\xi_3)$, ${}_s\tilde{G}_z^{(r)}(x_3,\xi_3)$, ${}_s\tilde{G}_z^{(z)}(x_3,\xi_3)$ визначаються співвідношеннями, наведеними в [1], у яких необхідно замінити ξ на β. Функції ${}_s\bar{U}_1^{(k)}(x_3,\xi_3)$ отримуються з наступних співвідношень, у яких треба прийняти $c_h = -1$ для $s = 1$ і $s = 5$ та $c_h = 1$ для $s = 2$ і $s = 6$:

$${}_s\bar{U}_1^{(k)} = {}_s\bar{U}_{1,1}^{(k)} + \sum_{q=1}^{n-1}\big[\,{}_s\bar{U}_{1,q+1}^{(k)} - {}_s\bar{U}_{1,q}^{(k)}\big]S(x_3 - x_{3q})\,,$$

$${}_s\bar{U}_{1,i}^{(k)} = {}_s\bar{U}_{1,i,1}^{(k)} + \sum_{q=1}^{n-1}\big[\,{}_s\bar{U}_{1,i,q+1}^{(k)} - {}_s\bar{U}_{1,i,q}^{(k)}\big]S(\xi_3 - x_{3q})\,,$$

$${}_s\bar{U}_{1,1,1}^{(k)}(x_3,\xi_3) = \frac{\Upsilon_{1k}}{2\beta\mu_1}\big[\,e^{-\beta(\xi_3 - x_3)}S(\xi_3 - x_3) +$$

$$+\, e^{-\beta(x_3-\xi_3)}S(x_3-\xi_3)\big]-\frac{Y_{1k}L^{-}_{n1}}{2\beta\mu_1 M}\,e^{-\beta(2x_{31}-x_3-\xi_3)}\,,$$

$${}_s\bar U^{(k)}_{1,1,p}(x_3,\xi_3)=-\frac{Y_{1k}\,2^{2-p}}{\beta\mu_p M}\big[\,L^{-}_{np}\,e^{-\beta(2x_{3p}-x_3-\xi_3)}+L^{+}_{np}\,e^{-\beta(\xi_3-x_3)}\big],$$

$${}_s\bar U^{(k)}_{1,p,1}(x_3,\xi_3)={}_s\bar U^{(k)}_{1,1,p}(\xi_3,x_3,),$$

$${}_s\bar U^{(k)}_{1,j,j}(x_3,\xi_3)=\frac{Y_{1k}}{2\beta\mu_j}\big[\,e^{-\beta(\xi_3-x_3)}S(\xi_3-x_3)+e^{-\beta(x_3-\xi_3)}S(x_3-\xi_3)\big]-$$

$$-\frac{Y_{1k}}{2\beta\mu_j M}\Big\{-M_2^{(j-1)}L^{+}_{nj}e^{-\beta(\xi_3+x_3-2x_{3,j-1}}+\Big[M_1^{(j-1)}e^{-\beta(2x_{3j}-\xi_3-x_3)}+$$

$$+\,M_2^{(j-1)}\big(\,e^{-\beta(2h_j+x_3-\xi_3)}+e^{-\beta(2h_j-x_3+\xi_3)}\big)\Big]L^{-}_{nj}\Big\},$$

$${}_s\bar U^{(k)}_{1,j,p}(x_3,\xi_3)=-\frac{Y_{1k}\,2^{p-j-1}}{\beta\mu_p M}\Big[\big(\,M_1^{(j-1)}e^{-\beta(2x_{3p}-x_3-\xi_3)}+$$

$$+\,M_2^{(j-1)}e^{-\beta(2x_{3p}-2x_{3,j-1}+x_3-\xi_3)}\big)L^{-}_{np}-$$

$$-\big(M_2^{(j-1)}e^{-\beta(x_3+\xi_3-2x_{3,j-1})}+M_1^{(j-1)}e^{-\beta(\xi_3-x_3)}\big)L^{+}_{np}\Big],$$

$${}_s\bar U^{(k)}_{1,p,j}(x_3,\xi_3)={}_s\bar U^{(k)}_{1,j,p}(\xi_3,x_3)\,;$$

$$M=M_1^{(n-1)}+c_h M_2^{(n-1)}e^{-2\beta h_n},\ \ M_i^{(j-1)}=\gamma_1^{(j-1)}-(-1)^i N_{j-1}\gamma_2^{(j-1)},\ \ N_{j-1}=\frac{\mu_{j-1}}{\mu_j}\,,$$

$$\gamma_i^{(1)}=1,\qquad \gamma_i^{(j)}=M_1^{(j-1)}-(-1)^i M_2^{(j-1)}e^{-2\beta h_j},\qquad i=1,2,\quad j=\overline{2,n}\,;$$

$$L^{\mp}_{np}=V^{(11p)}_{n-1}\mp V^{(23p)}_{n-1}+c_h\big[\,V^{(12p)}_{n-1}\mp V^{(24p)}_{n-1}\big]e^{-2\beta h_n},\qquad p=\overline{1,n-1}\,;$$

$$L^{-}_{nn}=c_h,\qquad L^{+}_{nn}=1;\qquad V^{(1ip)}_{p+m-1}=æ^{(1p)}_{p+m-1}-(-1)^i N_{p+m-1}æ^{(2p)}_{p+m-1}\,,$$

$$æ^{(ip)}_{p+1}=1-(-1)^i e^{-2\beta h_{p+1}},\ \ æ^{(ip)}_{p+m}=V^{(11p)}_{p+m-1}-(-1)^i V^{(12p)}_{p+m-1}e^{-2\beta h_{p+m}},\ \ i=1,2\,;$$

$$V^{(2ip)}_{p+m-1}=æ^{(3p)}_{p+m-1}-(-1)^i N_{p+m-1}æ^{(4p)}_{p+m-1},\ \ æ^{(ip)}_{p+1}=\frac{\mu_p}{\mu_{p+1}}\big[1+(-1)^i e^{-2\beta h_{p+1}}\big],$$

$$æ^{(ip)}_{p+m}=V^{(23p)}_{p+m-1}-(-1)^i V^{(24p)}_{p+m-1}e^{-2\beta h_{p+m}},\qquad i=3,4,\quad m=\overline{2,n-p}\,.$$

З побудованих функцій Гріна легко отримати функції Гріна ${}^{m}_{s}\bar G^{(k)}_i$ для обмеженої шаруватої області з $(n-1)$-ю складовою частиною з такими ж варіантами граничних умов на зовнішніх поверхнях, як на поверхні напівбезмежної шаруватої області. Для цього потрібно виключити з розгляду підобласть з індексом «1», а у формулах для ${}_s\tilde G^{(r)}_r(x_3,\xi_3)$, ${}_s\tilde G^{(z)}_r(x_3,\xi_3)$, ${}_s\tilde G^{(r)}_z(x_3,\xi_3)$, ${}_s\tilde G^{(z)}_z(x_3,\xi_3)$ та ${}_s\bar U^{(k)}_1(x_3,\xi_3)$ надати $P_{\ell 1}$, $\ell=\overline{1,6}$, та $M_1^{(1)}$, $M_2^{(1)}$

залежно від варіанту граничних умов на поверхні $x_3 = 0$ такі значення:

– для $\quad {}_s\bar{\tau}_{33}^{(k)} = {}_s\bar{\tau}_{32}^{(k)} = {}_s\bar{\tau}_{31}^{(k)} = 0 \qquad (m = 1)$:

$$P_{11} = P_{31} = P_{41} = P_{51} = P_{61} = 0, \qquad P_{21} = 1, \qquad M_1^{(1)} = M_2^{(1)} = 1;$$

– для $\quad {}_s\bar{G}_1^{(k)} = {}_s\bar{G}_2^{(k)} = {}_s\bar{G}_3^{(k)} = 0 \qquad (m = 2)$:

$$P_{21} = P_{31} = P_{41} = P_{51} = P_{61} = 0, \qquad P_{11} = 1, \qquad M_1^{(1)} = 1, \qquad M_2^{(1)} = -1;$$

– для $\quad {}_s\bar{G}_3^{(k)} = 0, \quad {}_s\bar{\tau}_{32}^{(k)} = {}_s\bar{\tau}_{31}^{(k)} = 0 \qquad (m = 5)$:

$$P_{11} = P_{21} = P_{31} = P_{41} = P_{51} = 0, \qquad P_{61} = 2, \qquad M_1^{(1)} = M_2^{(1)} = 1;$$

– для $\quad {}_s\bar{G}_1^{(k)} = {}_s\bar{G}_2^{(k)} = 0, \quad {}_s\bar{\tau}_{33}^{(k)} = 0 \qquad (m = 6)$:

$$P_{11} = P_{21} = P_{31} = P_{41} = P_{61} = 0, \qquad P_{51} = 2, \qquad M_1^{(1)} = 1, \qquad M_2^{(1)} = -1.$$

Індекс «m» тут вказує на номер варіанту граничних умов на поверхні, протилежній до поверхні, на якій заданий s-й варіант граничних умов.

Для необмеженої шаруватої області у формулах (22) треба спрямувати h_n до нескінченності.

Важливо відмітити, що у всіх розглянутих випадках функції Гріна симетричні і не містять експонент із додатним аргументом.

Використовуючи побудовані функції Гріна, а також встановлену тотожність

$$\begin{aligned} & V_1 D_1(U_1, U_2, U_3) - U_1 D_1(V_1, V_2, V_3) + V_2 D_2(U_1, U_2, U_3) - \\ & \quad - U_2 D_2(V_1, V_2, V_3) + V_3 D_3(U_1, U_2, U_3) - U_3 D_3(V_1, V_2, V_3) = \\ & = \frac{d}{dx_3}\left\{\mu(x_3)(V_1 U_1' - U_1 V_1' + V_2 U_2' - U_2 V_2') + \left[\lambda(x_3) + 2\mu(x_3)\right](V_3 U_3' - \right. \\ & \quad \left. - U_3 V_3') + \left[\lambda(x_3) + \mu(x_3)\right]\left[\eta_1(V_3 U_1 - U_3 V_1) - \eta_2(V_3 U_2 - U_3 V_2)\right]\right\}, \end{aligned}$$

можемо тепер записати розв'язки відповідних крайових задач для системи рівнянь (13). Застосуємо цю тотожність до функцій $V_i = \bar{G}_i^{(k)}(x_3, \xi_3)$ і до шуканого розв'язку $\bar{u}_i(x_3)$. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} & \bar{u}_1(\xi_3)\delta_{1k}\delta(x_3 - \xi_3) + \bar{u}_2(\xi_3)\delta_{2k}\delta(x_3 - \xi_3) + \bar{u}_1(\xi_3)\delta_{3k}\delta(x_3 - \xi_3) = \\ & = \frac{d}{dx_3}\left[\bar{G}_1^{(k)}\bar{\sigma}_{31} - \bar{u}_1\bar{\tau}_{31}^{(k)} - \bar{G}_2^{(k)}\bar{\sigma}_{32} + \bar{u}_2\bar{\tau}_{32}^{(k)} + \bar{G}_3^{(k)}\bar{\sigma}_{33} - \bar{u}_3\bar{\tau}_{33}^{(k)}\right] + \\ & + 2\sum_{q=1}^{n-1}\tilde{\mu}_q\left\{\left[\eta_2\bar{G}_2^{(k)}(x_{3q} + 0, \xi_3) - \eta_1\bar{G}_1^{(k)}(x_{3q} + 0, \xi_3)\right]\bar{\Phi}'(x_{3q} - 0) + \right. \\ & \left. + \beta^2\bar{G}_3^{(k)}(x_{3q} + 0, \xi_3)\,\bar{\Phi}(x_{3q} - 0)\right\}\delta(x_3 - x_{3q}) + \\ & + \bar{G}_1^{(k)}(x_3, \xi_3)\bar{X}_1(x_3) + \bar{G}_2^{(k)}(x_3, \xi_3)\bar{X}_2(x_3) + \bar{G}_3^{(k)}(x_3, \xi_3)\bar{X}_3(x_3). \end{aligned}$$

Далі необхідно проінтегрувати цю рівність у межах області, що розглядається, і скористатись при цьому симетричністю відповідних функцій Гріна.

У випадку безмежної і напівбезмежної шаруватої області для s-го варіанту граничних умов (14) і (16) відповідно одержимо

$$\bar{u}_1(x_3)\delta_{1k} + \bar{u}_2(x_3)\delta_{2k} + \bar{u}_3(x_3)\delta_{3k} = 2\sum_{q=1}^{n-1} \tilde{\mu}_q \Big\{ \big[\bar{G}_k^{(2)}(x_3, x_{3q} + 0)\eta_2 -$$

$$- \bar{G}_k^{(1)}(x_3, x_{3q} + 0)\eta_1 \big] \bar{\Phi}'(x_{3q} - 0) + \bar{G}_k^{(3)}(x_3, x_{3q} + 0)\beta^2 \bar{\Phi}(x_{3q} - 0) \Big\} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \big[\bar{G}_k^{(1)}(x_3, \xi_3)\bar{X}_1(\xi_3) + \bar{G}_k^{(2)}(x_3, \xi_3)\bar{X}_2(\xi_3) + \bar{G}_k^{(3)}(x_3, \xi_3)\bar{X}_3(\xi_3) \big] d\xi_3 ,$$

$${}_s\bar{u}_1(x_3)\delta_{1k} + {}_s\bar{u}_2(x_3)\delta_{2k} + {}_s\bar{u}_3(x_3)\delta_{3k} = {}_s\bar{A}_k(x_3) + {}_s\bar{C}_k(x_3) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{x_{3n}} \big[{}_s\bar{G}_k^{(1)}(x_3, \xi_3)\bar{X}_1(\xi_3) + {}_s\bar{G}_k^{(2)}(x_3, \xi_3)\bar{X}_2(\xi_3) + {}_s\bar{G}_k^{(3)}(x_3, \xi_3)\bar{X}_3(\xi_3) \big] d\xi_3 ,$$

де $\bar{G}_k^{(i)}$ – функція Гріна для необмеженої шаруватої області;

$${}_s\bar{C}_k(x_3) = 2\sum_{q=1}^{n-1} \tilde{\mu}_q \Big\{ \big[{}_s\bar{G}_k^{(2)}(x_3, x_{3q} + 0)\eta_2 - {}_s\bar{G}_k^{(1)}(x_3, x_{3q} + 0)\eta_1 \big] \bar{\Phi}'(x_{3q} - 0) +$$

$$+ {}_s\bar{G}_k^{(3)}(x_3, x_{3q} + 0)\beta^2 \bar{\Phi}(x_{3q} - 0) \Big\} ,$$

$${}_1\bar{A}_k(x_3) = {}_1\bar{G}_k^{(1)}(x_3, x_{3n})\big[\bar{\sigma}_{31n}^* + 2\mu_n \eta_1 \bar{\Phi}'(x_{3n}) \big] - {}_1\bar{G}_k^{(2)}(x_3, x_{3n})\big[\bar{\sigma}_{32n}^* +$$

$$+ 2\mu_n \eta_2 \bar{\Phi}'(x_{3n}) \big] + {}_1\bar{G}_k^{(3)}(x_3, x_{3n})\big[\bar{\sigma}_{33n}^* - 2\mu_n \beta^2 \bar{\Phi}(x_{3n}) \big] ,$$

$${}_2\bar{A}_k(x_3) = - {}_2\bar{G}_1^{(k)'}(x_{3n}, x_3)\mu_n \big[\bar{u}_{1n}^* + \eta_1 \bar{\Phi}(x_{3n}) \big] - {}_2\bar{G}_2^{(k)'}(x_{3n}, x_3)\mu_n \big[\bar{u}_{2n}^* +$$

$$+ \eta_2 \bar{\Phi}(x_{3n}) \big] - {}_2\bar{G}_3^{(k)'}(x_{3n}, x_3)\Lambda_n \big[\bar{u}_{3n}^* - \bar{\Phi}(x_{3n}) \big] ,$$

$${}_5\bar{A}_k(x_3) = {}_5\bar{G}_k^{(1)}(x_3, x_{3n})\big[\bar{\sigma}_{31n}^* + 2\mu_n \eta_1 \bar{\Phi}'(x_{3n}) \big] - {}_5\bar{G}_k^{(2)}(x_3, x_{3n})\big[\bar{\sigma}_{32n}^* +$$

$$+ 2\mu_n \eta_2 \bar{\Phi}'(x_{3n}) \big] - {}_5\bar{G}_3^{(k)'}(x_{3n}, x_3)\Lambda_n \big[\bar{u}_{3n}^* - \bar{\Phi}'(x_{3n}) \big] ,$$

$${}_6\bar{A}_k(x_3) = - {}_6\bar{G}_1^{(k)'}(x_{3n}, x_3)\mu_n \big[u_{1n}^* + \eta_1 \bar{\Phi}(x_{3n}) \big] - {}_6\bar{G}_2^{(k)'}(x_{3n}, x_3)\mu_n \big[u_{2n}^* +$$

$$+ \eta_2 \bar{\Phi}(x_{3n}) \big] + {}_6\bar{G}_k^{(3)}(x_3, x_{3n})\big[\bar{\sigma}_{33n}^* - 2\mu_n \beta^2 \bar{\Phi}(x_{3n}) \big] ,$$

$$\Lambda_j = \lambda_j + 2\mu_j .$$

Якщо в крайових задачах для багатошарової обмеженої області вибрати s-й варіант граничних умов (14) на поверхні $x_3 = x_{3n}$ і m-й – на поверхні $x_3 = 0$:

$$\bar{\sigma}_{3i}^* \Big|_{x_3=0} = \bar{\sigma}_{3i0}^*(\eta_1, \eta_2), \qquad i = 1, 2, 3 , \qquad \text{для } m = 1 ;$$

$$\bar{u}_i^* \Big|_{x_3=0} = \bar{u}_{i0}^*(\eta_1, \eta_2), \qquad i = 1, 2, 3 , \qquad \text{для } m = 2 ;$$

$$\bar{\sigma}_{3i}^* \Big|_{x_3=0} = \bar{\sigma}_{3i0}^*(\eta_1, \eta_2), \qquad i = 1, 2 ,$$

$$\bar{u}_3^* \Big|_{x_3=0} = \bar{u}_{30}^*(\eta_1, \eta_2) \qquad \text{для } m = 5 ;$$

$$\bar{u}_i^* \Big|_{x_3=0} = \bar{u}_{i0}^*(\eta_1, \eta_2), \qquad i = 1, 2 ,$$

$$\bar{\sigma}_{33}^* \Big|_{x_3=0} = \bar{\sigma}_{330}^*(\eta_1, \eta_2) \qquad \text{для } m = 6 ,$$

то для трансформант переміщень ${}^{m}_{s}\bar{u}_i(x_3)$ отримаємо

$$
{}^{m}_{s}\bar{u}_1(x_3)\delta_{1k} + {}^{m}_{s}\bar{u}_2(x_3)\delta_{2k} + {}^{m}_{s}\bar{u}_3(x_3)\delta_{3k} = {}^{m}_{s}\bar{A}_k(x_3) -
$$

$$
- {}^{m}_{s}\bar{B}_k(x_3) + {}^{m}_{s}\bar{C}_k(x_3) + \int\limits_0^{x_{3n}} \left[{}^{m}_{s}\bar{G}_k^{(1)}(x_3, \xi_3)\bar{X}_1(\xi_3) + \right.
$$

$$
\left. + {}^{m}_{s}\bar{G}_k^{(2)}(x_3, \xi_3)\bar{X}_2(\xi_3) + {}^{m}_{s}\bar{G}_k^{(3)}(x_3, \xi_3)\bar{X}_3(\xi_3) \right] d\xi_3 ,
$$

де

$$
{}^{m}_{s}\bar{C}_k(x_3) = 2\sum_{q=2}^{n-1} \tilde{\mu}_q \left\{ \left[{}^{m}_{s}\bar{G}_k^{(2)}(x_{3q} + 0, \xi_3)\eta_2 - \right.\right.
$$

$$
\left.\left. - {}^{m}_{s}\bar{G}_k^{(1)}(x_{3q} + 0, \xi_3)\eta_1 \right] \bar{\Phi}'(x_{3q} - 0) + {}^{m}_{s}\bar{G}_k^{(3)}(x_{3q} + 0, \xi_3)\,\beta^2 \bar{\Phi}(x_{3q} - 0) \right\},
$$

$$
{}^{m}_{1}\bar{A}_k(x_3) = {}^{m}_{1}\bar{G}_k^{(1)}(x_3, x_{3n}) \left[\bar{\sigma}^*_{31n} + 2\mu_n \eta_1 \bar{\Phi}'(x_{3n}) \right] - {}^{m}_{1}\bar{G}_k^{(2)}(x_3, x_{3n}) \left[\bar{\sigma}^*_{32n} + \right.
$$

$$
\left. + 2\mu_n \eta_2 \bar{\Phi}'(x_{3n}) + {}^{m}_{1}\bar{G}_k^{(3)}(x_3, x_{3n}) \left[\bar{\sigma}^*_{33n} - 2\mu_n \beta^2 \bar{\Phi}(x_{3n}) \right] \right.,
$$

$$
{}^{m}_{2}\bar{A}_k(x_3) = - {}^{m}_{2}\bar{G}_1^{(k)'}(x_{3n}, x_3)\mu_n \left[\bar{u}^*_{1n} + \eta_1 \bar{\Phi}(x_{3n}) \right] + {}^{m}_{2}\bar{G}_2^{(k)'}(x_{3n}, x_3)\mu_n \left[\bar{u}^*_{2n} + \right.
$$

$$
\left. + \eta_2 \bar{\Phi}(x_{3n}) \right] - {}^{m}_{2}\bar{G}_3^{(k)'}(x_{3n}, x_3)\Lambda_n \left[\bar{u}^*_{3n} - \bar{\Phi}'(x_{3n}) \right],
$$

$$
{}^{m}_{5}\bar{A}_k(x_3) = {}^{m}_{5}\bar{G}_k^{(1)}(x_3, x_{3n}) \left[\bar{\sigma}^*_{31n} + 2\mu_n \eta_1 \bar{\Phi}'(x_{3n}) \right] - {}^{m}_{5}\bar{G}_k^{(2)}(x_3, x_{3n}) \left[\bar{\sigma}^*_{32n} + \right.
$$

$$
\left. + 2\mu_n \eta_2 \Phi'(x_{3n}) - {}^{m}_{2}\bar{G}_3^{(k)'}(x_{3n}, x_3)\Lambda_n \left[\bar{u}^*_{3n} - \bar{\Phi}'(x_{3n}) \right] \right.,
$$

$$
{}^{m}_{6}\bar{A}_k(x_3) = - {}^{m}_{6}\bar{G}_1^{(k)'}(x_{3n}, x_3)\mu_n \left[\bar{u}^*_{1n} + \eta_1 \bar{\Phi}(x_{3n}) \right] - {}^{m}_{6}\bar{G}_2^{(k)'}(x_{3n}, x_3)\mu_n \left[\bar{u}^*_{2n} + \right.
$$

$$
\left. + \eta_2 \bar{\Phi}'(x_{3n}) \right] + {}^{m}_{6}\bar{G}_k^{(3)}(x_3, x_{3n}) \left[\bar{\sigma}^*_{33n} - 2\mu_n \beta^2 \bar{\Phi}(x_{3n}) \right],
$$

$$
{}^{1}_{s}\bar{B}_k(x_3) = {}^{1}_{s}\bar{G}_k^{(1)}(x_3, 0) \left[\bar{\sigma}^*_{310} + 2\mu_2 \eta_1 \bar{\Phi}'(0) \right] - {}^{1}_{s}\bar{G}_k^{(2)}(x_3, 0) \left[\bar{\sigma}^*_{320} + \right.
$$

$$
\left. + 2\mu_2 \eta_2 \bar{\Phi}'(0) \right] + {}^{1}_{s}\bar{G}_k^{(3)}(x_3, 0) \left[\bar{\sigma}^*_{330} - 2\mu_2 \beta^2 \bar{\Phi}(0) \right],
$$

$$
{}^{2}_{s}\bar{B}_k(x_3) = - {}^{2}_{s}\bar{G}_1^{(k)\prime}(0, x_3)\mu_2 \left[\bar{u}^*_{10} + \eta_1 \bar{\Phi}(0) \right] - {}^{2}_{s}\bar{G}_2^{(k)\prime}(0, x_3)\mu_2 \left[\bar{u}^*_{20} + \right.
$$

$$
\left. + \eta_2 \bar{\Phi}(0) \right] - {}^{2}_{s}\bar{G}_3^{(k)'}(0, x_3)\Lambda_2 \left[\bar{u}^*_{30} - \bar{\Phi}'(0) \right],
$$

$$
{}^{5}_{s}\bar{B}_k(x_3) = {}^{5}_{s}\bar{G}_k^{(1)}(x_3, 0) \left[\bar{\sigma}^*_{310} + 2\mu_2 \eta_1 \bar{\Phi}'(0) \right] - {}^{5}_{s}\bar{G}_k^{(2)}(x_3, 0) \left[\bar{\sigma}^*_{320} + \right.
$$

$$
\left. + 2\mu_2 \eta_2 \bar{\Phi}'(0) \right] - {}^{2}_{s}\bar{G}_3^{(k)'}(0, x_3)\Lambda_2 \left[\bar{u}^*_{30} - \bar{\Phi}'(0) \right],
$$

$$
{}^{6}_{s}\bar{B}_k(x_3) = - {}^{6}_{s}\bar{G}_1^{(k)}(0, x_3)\mu_2 \left[\bar{u}^*_{10} + \eta_1 \bar{\Phi}(0) \right] - {}^{6}_{s}\bar{G}_2^{(k)}(0, x_3)\mu_2 \left[\bar{u}^*_{20} + \right.
$$

$$
\left. + \eta_2 \bar{\Phi}(0) \right] + {}^{6}_{s}\bar{G}_k^{(3)}(x_3, 0) \left[\bar{\sigma}^*_{330} - 2\mu_2 \beta^2 \bar{\Phi}(0) \right].
$$

Тут $\bar{\Phi} = -\dfrac{1}{2\beta} \int\limits_0^{x_{3n}} \gamma(\zeta)\bar{t}(\eta_1, \eta_2, \zeta)e^{-\beta|x_3 - \zeta|}\, d\zeta$; $\bar{u}^*_{i0}$ і $\bar{\sigma}^*_{3i0}$ – трансформанти заданих переміщень і напружень на поверхні $x_3 = 0$.

Напруження σ_{ij}^* визначаємо за формулами $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}^t$, де

$$\sigma_{11} =$$

$$= \frac{4\mu(x_3)g_2(x_3)}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[g_3(x_3)\eta_1\bar{u}_1 - \nu(x_3)(\eta_2\bar{u}_2 - \bar{u}_3')\right] \cos(\eta_1 x_1)\cos(\eta_2 x_2)\, d\eta_1\, d\eta_2 ,$$

$$\sigma_{22} =$$

$$= \frac{4\mu(x_3)g_2(x_3)}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[- g_3(x_3)\eta_2\bar{u}_2 + \nu(x_3)(\eta_1\bar{u}_1 + \bar{u}_3')\right] \cos(\eta_1 x_1)\cos(\eta_2 x_2)\, d\eta_1\, d\eta_2 ,$$

$$\sigma_{33} =$$

$$= \frac{4\mu(x_3)g_2(x_3)}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[g_3(x_3)\bar{u}_3' + \nu(x_3)(\eta_1\bar{u}_1 - \eta_2\bar{u}_2)\right] \cos(\eta_1 x_1)\cos(\eta_2 x_2)\, d\eta_1\, d\eta_2 ,$$

$$\sigma_{12} = \frac{2\mu(x_3)}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty (\eta_1\bar{u}_2 - \eta_2\bar{u}_1) \sin(\eta_1 x_1)\sin(\eta_2 x_2)\, d\eta_1\, d\eta_2 ,$$

$$\sigma_{13} = \frac{2\mu(x_3)}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty (\bar{u}_1' - \eta_1\bar{u}_3) \sin(\eta_1 x_1)\cos(\eta_2 x_2)\, d\eta_1\, d\eta_2 ,$$

$$\sigma_{23} = -\frac{2\mu(x_3)}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty (\bar{u}_2' + \eta_2\bar{u}_3) \cos(\eta_1 x_1)\sin(\eta_2 x_2)\, d\eta_1\, d\eta_2 .$$

Якщо температурне поле нестаціонарне, то у формулах із трансформантами температури та термопружного потенціалу замінюємо $\bar{t}(\eta_1, \eta_2, x_3)$, $\bar{\Phi}(\eta_1, \eta_2, x_3)$ відповідно на $\bar{t}(\eta_1, \eta_2, x_3, \tau)$, $\bar{\Phi}(\eta_1, \eta_2, x_3, \tau)$, де τ – час.

Для визначення температурних полів можна використати, як і в осесиметричному випадку, результати робіт [2, 3].

Отже, побудовано симетричні функції Гріна крайових задач для системи трьох звичайних диференціальних рівнянь для шаруватих необмеженої області, напівбезмежної та обмеженої областей з чотирма варіантами граничних умов на кожній із границь. Оскільки формули для функцій Гріна є однотипними, то розв'язки відповідних задач термопружності за відомих факторів збурення записано з використанням одних і тих самих ключових співвідношень. Крім того, незалежно від кількості шарів, структура цих формул є такою, що в них виділено доданки або легко виділити в разі необхідності додатково доданки, які є або можуть бути співмножниками в «повільно збіжних» частинах подвійних невласних інтегралів. Причому останні, як правило, обчислюються точно.

Побудовані функції Гріна можуть бути також використані для побудови функцій переміщень Гріна для відповідних шаруватих областей, тобто для відшукання розв'язків тривимірних задач пружності за дії зосереджених сил у напрямках, паралельних до осей координат. Коли точки прикладання зосереджених сил і спостереження знаходяться всередині підобласті, то функції переміщень Гріна для цих областей отримаємо відразу з виділеними сингулярностями. Якщо ж ці точки виходять на поверхню підобласті, то сингулярності, які при цьому появляються, виділяються елементарно. Зауважимо, що інші підходи до побудови сингулярних розв'язків наведені в [4–9].

1. *Процюк Б. В.* Статичні та квазістатичні осесиметричні задачі термопружності для шаруватих тіл з плоскопаралельними границями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 103–112.
2. *Процюк Б. В.* Функції Гріна стаціонарних задач теплопровідності для трансверсально-ізотропних багатошарових тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 3. – С. 80–88.
3. *Процюк Б. В., Синюта В. М.* Функції Гріна тривимірних нестаціонарних задач теплопровідності для багатошарових пластин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 3. – С. 144–148.
4. *Benitez F. G., Lu L., Rosakis A. J.* A boundary element formulation based on the three-dimensional elastostatic fundamental solution for the infinite layer // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1993. – **36.** – Part I. Theoretical and numerical development. – P. 3097–3130; Part II. Three-dimensional examples. – P. 3131–3159.
5. *Benitez F. G., Rosakis A. J.* Three-dimensional elastostatics of a layer and a layered medium // J. Elasticity. – 1987. – **18**. – P. 3–50.
6. *Benitez F. G., Wideberg F. G.* The boundary element method based on the three-dimensional elastostatic fundamentsl solution for the orthotropic multilayered space: Application to composite materials // Comput. Mech. – 1996. – **18**. – P. 24–45.
7. *Linkov A., Filippov N.* Difference equations approach to the analysis of layered systems // Meccanica. – 1991. – **26**. – P. 195–209.
8. *Linkov A. M., Linkova A. A., Savitski A. A.* An effective method for multi-layered media with cracks and cavities // Int. J. Damage Mech. – 1994. – **3**. – P. 338–356.
9. *Yue Z. Q.* On generalized Kelvin solutions in a multilayered elastic medium // J. Elasticity. – 1995. – **40**. – P. 1–43.

ТРЕХМЕРНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ И КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ТЕЛ С ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ГРАНИЦАМИ

С использованием функций Грина краевых задач для системы трех обыкновенных частично вырожденных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами получены при известных возмущающих факторах решения трехмерных статических и квазистатических задач термоупругости для слоистых пространства, полупространства и слоя с четырьмя вариантами граничных условий на каждой из ограничивающих поверхностей на основании одних и тех же ключевых соотношений.

THREE-DIMENSIONAL STATIC AND QUASI-STATIC THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR LAYERED BODIES WITH PLANE-PARALLEL BOUNDARIES

Using Green's functions of the problems for a system of three ordinary partially degenerate differential equations with discontinuous coefficients, the solutions are obtained (when perturbation factors are known) to three-dimensional static and quasi-static thermoelasticity problems for a layered space, half-space and a layer with four variants of boundary conditions on each limiting surface on the basis of the same key relations.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
25.03.01