УДК 532.5 + 536.24

В. Л. Рвачев, К. В. Максименко-Шейко

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО СКРУЧЕННЫМ ТРУБАМ

Построены математические модели движения вязкой несжимаемой жидкости по скрученным трубам. Получены уравнения Навье – Стокса и неразрывности движения в криволинейных неортогональных координатах. Для определения распределения давления в жидкости по известному распределению скоростей сформулирована задача Неймана для уравнения Пуассона. Для скрученных труб бесконечной длины с постоянным сечением трехмерная задача сведена к плоской.

В 1939 году А. И. Лурье и Г. Ю. Джанелидзе [3] сформулировали задачу Сен-Венана для скрученных стержней и вывели уравнения теории упругости в криволинейных неортогональных координатах. Большой вклад в эту область механики внесли отечественные ученые П. М. Риз [11], С. А. Тумаркин [12] и другие.

Скрученные трубы (рис. 1) являются простым и удобным средством, позволяющим придать потоку жидкости вращательное движение и тем самым способствовать процессам интенсификации тепло- и массообмена. Постановка задачи инициирована исследованиями, выполняемыми в отделе высокотемпературной термогазодинамики Института технической теплофизики НАН Украины под руководством члена-корреспондента НАН Украины А. А. Халатова. В работе [13] приведены некоторые образцы указанных труб.

Во многих работах (например, в [2]) рассматриваются математические модели механики жидкости и газа в декартовых, цилиндрических и сферических координатах. Однако в ряде случаев [4–6] оказывается удобной формулировка задачи в криволинейных неортогональных координатах.

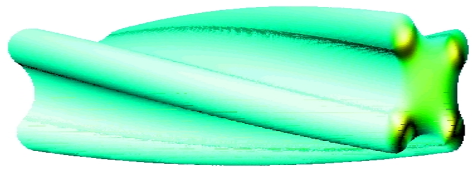

Рис. 1

Рассмотрим бесконечный цилиндр с образующими, параллельными оси Oz, и направляющей $\partial\Omega$, нормализованное уравнение $\omega(x,y)=0$, $\left.\dfrac{\partial\omega}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=1$ которой для $\partial\Omega$ практически произвольной формы в плоскости xOy может быть построено с помощью R-функций. Здесь n – внутренняя, перпендикулярная оси Oz, нормаль к $\partial\Omega$ [9].

После подстановки $\begin{cases} x \Leftarrow x\cos\alpha z + y\sin\alpha z, \\ y \Leftarrow -x\sin\alpha z + y\cos\alpha z \end{cases}$ в уравнение $\omega(x,y)=0$ получим уравнение $\omega(x\cos\alpha z + y\sin\alpha z, -x\sin\alpha z + y\cos\alpha z)=0$ бесконечной винтовой поверхности (рис. 1) с шагом $H=\dfrac{2\pi}{\alpha}$ и направляющей $\partial\Omega$ [9, 10].

Легко убедиться, что уравнение $\omega_1(x,y,z)\equiv\dfrac{\omega(\hat{x},\hat{y})}{\sqrt{1+\alpha^2\left(\hat{y}\dfrac{\partial\omega}{\partial\hat{x}}-\hat{x}\dfrac{\partial\omega}{\partial\hat{y}}\right)^2}}=0$ является нормализованным в трехмерном пространстве, т.е. $\left.\dfrac{\partial\omega_1}{\partial n_1}\right|_{\partial\Omega_b}=1$, где n_1 – внутренняя нормаль к $\partial\Omega_b$, а

$$\hat{x} = x\cos\alpha z + y\sin\alpha z,$$

$$\hat{y} = -x\sin\alpha z + y\cos\alpha z\,.$$

Рассмотрим неортогональные криволинейные координаты, связанные с декартовыми соотношениями [5]:

$$x = \hat{x}\cos\alpha z - \hat{y}\sin\alpha z\,,$$

$$y = \hat{x}\sin\alpha z + \hat{y}\cos\alpha z\,,$$

$$z = \hat{z}\,, \tag{1}$$

и выпишем ковариантные $g_{ik} = \sum_{\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial x_i}\frac{\partial x_\ell}{\partial x_k}$ и контравариантные $g^{ik} = \frac{G^{ik}}{g}$ составляющие метрического тензора, где G^{ik} − алгебраическое дополнение g_{ik} в определителе $g = \det(g_{ik})$:

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha\hat{y} \\ 0 & 1 & \alpha\hat{x} \\ -\alpha\hat{y} & \alpha\hat{x} & \alpha^2\hat{x}^2 + \alpha^2\hat{y}^2 + 1 \end{bmatrix},$$

$$g^{ik} = \frac{G^{ik}}{g} = \begin{bmatrix} 1+\alpha^2\hat{y}^2 & -\alpha^2\hat{x}\hat{y} & \alpha\hat{y} \\ -\alpha^2\hat{x}\hat{y} & 1+\alpha^2\hat{x}^2 & -\alpha\hat{x} \\ \alpha\hat{y} & -\alpha\hat{x} & 1 \end{bmatrix},$$

$$g = |\,g_{ik}\,| = \alpha^2\hat{x}^2 + \alpha^2\hat{y}^2 + 1 - \alpha^2\hat{y}^2 - \alpha^2\hat{x}^2 = 1\,. \tag{2}$$

Отличные от нуля символы Кристоффеля первого $\Gamma_{i,jk} = \Gamma_{i,kj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i}\right)$ и второго $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} = g^{i\ell}\Gamma_{\ell,jk}$ родов имеют такой вид:

$$\Gamma_{1,23} = \Gamma_{1,32} = -\alpha, \qquad \Gamma_{1,33} = -\alpha^2\hat{x}, \qquad \Gamma_{2,13} = \Gamma_{2,31} = \alpha, \qquad \Gamma_{2,33} = -\alpha^2\hat{y}\,,$$

$$\Gamma_{3,13} = \Gamma_{3,31} = \alpha^2\hat{x}, \qquad \Gamma_{3,23} = \Gamma_{3,32} = \alpha^2\hat{y}\,,$$

$$\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = -\alpha\,, \qquad \Gamma^1_{33} = -\alpha^2\hat{x}, \qquad \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = \alpha\,, \qquad \Gamma^2_{33} = -\alpha^2\hat{y}\,.$$

Уравнение Навье − Стокса в обобщенных координатах имеет вид [1]:

$$\rho\frac{\partial V^i}{\partial t} + \rho V^k V^i_{,k} = -\,g^{ik}\frac{\partial p}{\partial x^k} + \mu g^{km}(V^i_{,m})_{,k}\,. \tag{3}$$

Вычислим первые $V^i_{,k} = \frac{\partial V^i}{\partial x^k} + V^j\Gamma^i_{jk}$ и вторые $(V^i_{,m})_{,k} = \frac{\partial V^i_{,m}}{\partial x^k} + V^j_{,m}\Gamma^i_{jk} - V^i_{,j}\Gamma^j_{mk}$ производные:

$$V^1_{,1} = \frac{\partial V^1}{\partial\hat{x}}, \qquad V^1_{,2} = \frac{\partial V^1}{\partial\hat{y}} - \alpha V^3, \qquad V^1_{,3} = \frac{\partial V^1}{\partial z} - \alpha V^2 - \alpha^2\hat{x}V^3\,,$$

$$V^2_{,1} = \frac{\partial V^2}{\partial\hat{x}} + \alpha V^3, \qquad V^2_{,2} = \frac{\partial V^2}{\partial\hat{y}}, \qquad V^2_{,3} = \frac{\partial V^2}{\partial z} + \alpha V^1 - \alpha^2\hat{y}V^3\,,$$

$$V^3_{,1} = \frac{\partial V^3}{\partial\hat{x}}, \qquad V^3_{,2} = \frac{\partial V^3}{\partial\hat{y}}, \qquad V^3_{,3} = \frac{\partial V^3}{\partial z}\,;$$

$$(V^1_{,1})_{,1}=\frac{\partial^2 V^1}{\partial\hat{x}^2},\qquad (V^1_{,2})_{,1}=(V^1_{,1})_{,2}=\frac{\partial^2 V^1}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}-\alpha\frac{\partial V^3}{\partial\hat{x}},\qquad (V^1_{,2})_{,2}=\frac{\partial^2 V^1}{\partial\hat{y}^2}-2\alpha\frac{\partial V^3}{\partial\hat{y}},$$

$$(V^1_{,3})_{,1}=(V^1_{,1})_{,3}=\frac{\partial^2 V^1}{\partial\hat{x}\partial z}-\alpha\frac{\partial V^2}{\partial\hat{x}}-\alpha^2\hat{x}\frac{\partial V^3}{\partial\hat{x}}-\alpha\frac{\partial V^1}{\partial\hat{y}},$$

$$(V^2_{,2})_{,1}=(V^2_{,1})_{,2}=\frac{\partial^2 V^2}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+\alpha\frac{\partial V^3}{\partial\hat{y}},$$

$$(V^1_{,2})_{,3}=(V^1_{,3})_{,2}=\frac{\partial^2 V^1}{\partial\hat{y}\partial z}-\alpha\frac{\partial V^3}{\partial z}-\alpha\frac{\partial V^2}{\partial\hat{y}}-\alpha^2\hat{x}\frac{\partial V^3}{\partial\hat{y}}+\alpha\frac{\partial V^1}{\partial\hat{x}},$$

$$(V^3_{,2})_{,1}=(V^3_{,1})_{,2}=\frac{\partial^2 V^3}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}},$$

$$(V^2_{,3})_{,1}=(V^2_{,1})_{,3}=\frac{\partial^2 V^2}{\partial\hat{x}\partial z}+\alpha\frac{\partial V^1}{\partial\hat{x}}-\alpha^2\hat{y}\frac{\partial V^3}{\partial\hat{x}}+\alpha\frac{\partial V^3}{\partial z}-\alpha\frac{\partial V^2}{\partial\hat{y}},$$

$$(V^1_{,3})_{,3}=\frac{\partial^2 V^1}{\partial z^2}-2\alpha\frac{\partial V^2}{\partial z}-2\alpha^2\hat{x}\frac{\partial V^3}{\partial z}+\alpha^2\hat{x}\frac{\partial V^1}{\partial\hat{x}}+\alpha^2\hat{y}\frac{\partial V^1}{\partial\hat{y}}-\alpha^2V^1,$$

$$(V^2_{,1})_{,1}=\frac{\partial^2 V^2}{\partial\hat{x}^2}+2\alpha\frac{\partial V^3}{\partial\hat{x}},\qquad (V^2_{,2})_{,2}=\frac{\partial^2 V^2}{\partial\hat{y}^2},$$

$$(V^2_{,2})_{,3}=(V^2_{,3})_{,2}=\frac{\partial^2 V^2}{\partial\hat{y}\partial z}+\alpha\frac{\partial V^1}{\partial\hat{y}}-\alpha^2\hat{y}\frac{\partial V^3}{\partial\hat{y}}+\alpha\frac{\partial V^2}{\partial\hat{x}},$$

$$(V^2_{,3})_{,3}=\frac{\partial^2 V^2}{\partial z^2}+2\alpha\frac{\partial V^1}{\partial z}-2\alpha^2\hat{y}\frac{\partial V^3}{\partial z}+\alpha^2\hat{x}\frac{\partial V^2}{\partial\hat{x}}+\alpha^2\hat{y}\frac{\partial V^2}{\partial\hat{y}}-\alpha^2V^2,$$

$$(V^3_{,1})_{,1}=\frac{\partial^2 V^3}{\partial\hat{x}^2},\qquad (V^3_{,2})_{,2}=\frac{\partial^2 V^3}{\partial\hat{y}^2},\qquad (V^3_{,2})_{,3}=(V^3_{,3})_{,2}=\frac{\partial^2 V^3}{\partial\hat{y}\partial z}+\alpha\frac{\partial V^3}{\partial\hat{x}},$$

$$(V^3_{,3})_{,1}=(V^3_{,1})_{,3}=\frac{\partial^2 V^3}{\partial\hat{x}\partial z}-\alpha\frac{\partial V^3}{\partial\hat{y}},\qquad (V^3_{,3})_{,3}=\frac{\partial^2 V^3}{\partial z^2}+\alpha^2\hat{x}\frac{\partial V^3}{\partial\hat{x}}+\alpha^2\hat{y}\frac{\partial V^3}{\partial\hat{y}}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение Навье − Стокса приводится к виду

$$\rho\left(\frac{\partial V^1}{\partial t}+V^1\frac{\partial V^1}{\partial\hat{x}}+V^2\frac{\partial V^1}{\partial\hat{y}}+V^3\frac{\partial V^1}{\partial z}-2\alpha V^2V^3-\alpha^2\hat{x}(V^3)^2\right)=$$
$$=-(1+\alpha^2\hat{y}^2)\frac{\partial p}{\partial\hat{x}}+\alpha^2\hat{x}\hat{y}\frac{\partial p}{\partial\hat{y}}-\alpha\hat{y}\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\Bigg[(1+\alpha^2\hat{y}^2)\frac{\partial^2 V^1}{\partial\hat{x}^2}+$$
$$+(1+\alpha^2\hat{x}^2)\frac{\partial^2 V^1}{\partial\hat{y}^2}+\frac{\partial^2 V^1}{\partial z^2}-2\alpha\left(\alpha\hat{x}\hat{y}\frac{\partial^2 V^1}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}-\hat{y}\frac{\partial^2 V^1}{\partial\hat{x}\partial z}+\hat{x}\frac{\partial^2 V^1}{\partial\hat{y}\partial z}\right)-$$
$$-\alpha^2\left(\hat{x}\frac{\partial V^1}{\partial\hat{x}}+\hat{y}\frac{\partial V^1}{\partial\hat{y}}+2\hat{y}\frac{\partial V^2}{\partial\hat{x}}-2\hat{x}\frac{\partial V^2}{\partial\hat{y}}\right)-2\alpha\left(\frac{\partial V^3}{\partial\hat{y}}+\frac{\partial V^2}{\partial z}\right)-\alpha^2V^1\Bigg],$$

$$\rho\left(\frac{\partial V^2}{\partial t}+V^1\frac{\partial V^2}{\partial\hat{x}}+V^2\frac{\partial V^2}{\partial\hat{y}}+V^3\frac{\partial V^2}{\partial z}+2\alpha V^1V^3-\alpha^2\hat{y}(V^3)^2\right)=$$
$$=\alpha^2\hat{x}\hat{y}\frac{\partial p}{\partial\hat{x}}-(1+\alpha^2\hat{x}^2)\frac{\partial p}{\partial\hat{y}}+\alpha\hat{x}\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\Bigg[(1+\alpha^2\hat{y}^2)\frac{\partial^2 V^2}{\partial\hat{x}^2}+$$

$$+(1+\alpha^2\hat{x}^2)\frac{\partial^2 V^2}{\partial\hat{y}^2}+\frac{\partial^2 V^2}{\partial z^2}-2\alpha\left(\alpha\hat{x}\hat{y}\frac{\partial^2 V^2}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}-\hat{y}\frac{\partial^2 V^2}{\partial\hat{x}\partial z}+\hat{x}\frac{\partial^2 V^2}{\partial\hat{y}\partial z}\right)-$$

$$-\alpha^2\left(\hat{x}\frac{\partial V^2}{\partial\hat{x}}+\hat{y}\frac{\partial V^2}{\partial\hat{y}}-2\hat{y}\frac{\partial V^1}{\partial\hat{x}}+2\hat{x}\frac{\partial V^1}{\partial\hat{y}}\right)+2\alpha\left(\frac{\partial V^1}{\partial z}+\frac{\partial V^3}{\partial\hat{x}}\right)-\alpha^2 V^2\Bigg],$$

$$\rho\left(\frac{\partial V^3}{\partial t}+V^1\frac{\partial V^3}{\partial\hat{x}}+V^2\frac{\partial V^3}{\partial\hat{y}}+V^3\frac{\partial V^3}{\partial z}\right)=$$

$$=-\alpha\hat{y}\frac{\partial p}{\partial\hat{x}}+\alpha\hat{x}\frac{\partial p}{\partial\hat{y}}-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\Bigg[(1+\alpha^2\hat{y}^2)\frac{\partial^2 V^3}{\partial\hat{x}^2}+(1+\alpha^2\hat{x}^2)\frac{\partial^2 V^3}{\partial\hat{y}^2}+\frac{\partial^2 V^3}{\partial z^2}-$$

$$-2\alpha\left(\alpha\hat{x}\hat{y}\frac{\partial^2 V^3}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}-\hat{y}\frac{\partial^2 V^3}{\partial\hat{x}\partial z}+\hat{x}\frac{\partial^2 V^3}{\partial\hat{y}\partial z}\right)-\alpha^2\left(\hat{x}\frac{\partial V^3}{\partial\hat{x}}+\hat{y}\frac{\partial V^3}{\partial\hat{y}}\right)\Bigg]. \qquad (4)$$

Подставляя физические [1] компоненты вектора $\tilde{V}_1=V^1$, $\tilde{V}_2=V^2$, $\tilde{V}_3=\sqrt{1+\alpha^2\hat{x}^2+\alpha^2\hat{y}^2}\,V^3$ в (4) и переходя к безразмерному виду, в стационарном случае получим (тильду опускаем):

$$(\mathbf{V}\nabla)V^1-2\alpha V^2\frac{V^3}{\sqrt{f}}-\alpha^2\hat{x}\frac{(V^3)^2}{f}=\mathrm{Eu}\left(-(1+\alpha^2\hat{y}^2)\frac{\partial p}{\partial\hat{x}}+\right.$$

$$\left.+\alpha^2\hat{x}\hat{y}\frac{\partial p}{\partial\hat{y}}-\alpha\hat{y}\frac{\partial p}{\partial z}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\Bigg[\Delta V^1-2\alpha^2\left(\hat{y}\frac{\partial V^2}{\partial\hat{x}}-\hat{x}\frac{\partial V^2}{\partial\hat{y}}\right)-$$

$$-2\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial V^3}{\partial y}+\frac{\partial V^2}{\partial z}\right)-\alpha^2V^1+2\frac{\alpha^3 yV^3}{f^{3/2}}\Bigg],$$

$$(\mathbf{V}\nabla)V^2+2\alpha V^1\frac{V^3}{\sqrt{f}}-\alpha^2\hat{y}\frac{(V^3)^2}{f}=\mathrm{Eu}\left(\alpha^2\hat{x}\hat{y}\frac{\partial p}{\partial\hat{x}}-\right.$$

$$\left.-(1+\alpha^2\hat{x}^2)\frac{\partial p}{\partial\hat{y}}+\alpha\hat{x}\frac{\partial p}{\partial z}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\Bigg[\Delta V^2+2\alpha^2\left(\hat{y}\frac{\partial V^1}{\partial\hat{x}}-\hat{x}\frac{\partial V^1}{\partial\hat{y}}\right)+$$

$$+2\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial V^3}{\partial x}+\frac{\partial V^1}{\partial z}\right)-\alpha^2V^2-2\frac{\alpha^3 xV^3}{f^{3/2}}\Bigg],$$

$$(\mathbf{V}\nabla)V^3-\frac{\alpha^2V^3}{f}(xV^1+yV^2)=\mathrm{Eu}\sqrt{f}\left(-\alpha\hat{y}\frac{\partial p}{\partial\hat{x}}+\alpha\hat{x}\frac{\partial p}{\partial\hat{y}}-\frac{\partial p}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\Delta V^3-\frac{2\alpha^2}{f}\left(x\frac{\partial V^3}{\partial x}+y\frac{\partial V^3}{\partial y}\right)-\frac{\alpha^2(2-\alpha^2x^2-\alpha^2y^2)}{f^2}V^3\right], \quad (5)$$

где

$$f=1+\alpha^2x^2+\alpha^2y^2,$$

$$(\mathbf{V}\nabla)u=V^1\frac{\partial u}{\partial\hat{x}}+V^2\frac{\partial u}{\partial\hat{y}}+\frac{V^3}{\sqrt{f}}\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\Delta u=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ik}\sqrt{|g|}\frac{\partial u}{\partial x^k}\right)=(1+\alpha^2\hat{y}^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\hat{x}^2}+(1+\alpha^2\hat{x}^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\hat{y}^2}+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-2\alpha^2\hat{x}\hat{y}\frac{\partial^2 u}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+2\alpha\hat{y}\frac{\partial^2 u}{\partial\hat{x}\partial z}-2\alpha\hat{x}\frac{\partial^2 u}{\partial\hat{y}\partial z}-\alpha^2\left(\hat{x}\frac{\partial u}{\partial\hat{x}}+\hat{y}\frac{\partial u}{\partial\hat{y}}\right).$$

Заметим, что при $\alpha = 0$ получаем уравнения Навье – Стокса в декартовой системе координат.

Граничные условия формулируются как условия прилипания частиц жидкости к твердой стенке:

$$\mathbf{V}\,|_{\partial\Omega} = 0\,. \tag{6}$$

Уравнение неразрывности движения имеет вид

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}V^i\right) = \frac{\partial V^1}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial V^2}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial V^3}{\partial z} = 0\,. \tag{7}$$

По известному распределению скоростей распределение давления в жидкости можно найти путем решения уравнения типа Пуассона, которое получается применением к уравнению Навье – Стокса операции div:

$$-\Delta p = \operatorname{div}(\rho(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}) - \operatorname{div}(\mu\Delta\mathbf{V})\,.$$

Так как $\Delta\mathbf{V} = \nabla\operatorname{div}\mathbf{V} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V}$, $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0$, то $\operatorname{div}\Delta\mathbf{V} = 0$ и

$$-\Delta p = \rho\operatorname{div}((\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}) = \rho\operatorname{div}(V^k V^i_{,k}) = \rho\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{g}\,(V^k V^i_{,k})\right] =$$

$$= \rho\frac{1}{\sqrt{g}}\left\{(V^k V^i_{,k})\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i} + \sqrt{g}V^k_{,i}V^i_{,k} + \sqrt{g}V^k(V^i_{,k})_{,i}\right\}.$$

Поскольку $(V^i_{,k})_{,i} = (V^i_{,i})_{,k}$, а $(V^i_{,i})_{,k} = 0$, то

$$-\Delta p = \rho\left\{\frac{1}{\sqrt{g}}(V^k V^i_{,k})\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i} + V^k_{,i}V^i_{,k}\right\}.$$

В нашем случае $g = 1$, поэтому

$$-\Delta p = \rho V^k_{,i}V^i_{,k} = 2\rho(V^2_{,1}V^1_{,2} + V^3_{,1}V^1_{,3} + V^3_{,2}V^2_{,3} - V^1_{,1}V^2_{,2} - V^2_{,2}V^3_{,3} - V^1_{,1}V^3_{,3})\,,$$

$$-\frac{1}{2\rho}\Delta p = \left(\frac{\partial V^2}{\partial\hat{x}} + \alpha V^3\right)\left(\frac{\partial V^1}{\partial\hat{y}} - \alpha V^3\right) + \frac{\partial V^3}{\partial\hat{x}}\left(\frac{\partial V^1}{\partial z} - \alpha V^2 - \alpha^2\hat{x}V^3\right) +$$

$$+\frac{\partial V^3}{\partial\hat{y}}\left(\frac{\partial V^2}{\partial z} + \alpha V^1 - \alpha^2\hat{y}V^3\right) - \frac{\partial V^1}{\partial\hat{x}}\frac{\partial V^2}{\partial\hat{y}} - \frac{\partial V^2}{\partial\hat{y}}\frac{\partial V^3}{\partial z} - \frac{\partial V^1}{\partial\hat{x}}\frac{\partial V^3}{\partial z}\,. \tag{8}$$

Подставляя физические компоненты, получим уравнение

$$-\frac{1}{2\rho}\Delta p = \left(\frac{\partial V^2}{\partial\hat{x}} + \alpha\frac{V^3}{\sqrt{f}}\right)\left(\frac{\partial V^1}{\partial\hat{y}} - \alpha\frac{V^3}{\sqrt{f}}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial V^3}{\partial x} - \frac{\alpha^2 x V^3}{f^{3/2}}\right)\left(\frac{\partial V^1}{\partial z} - \alpha V^2 - \alpha^2\hat{x}\frac{V^3}{\sqrt{f}}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial V^3}{\partial y} - \frac{\alpha^2 y V^3}{f^{3/2}}\right)\left(\frac{\partial V^2}{\partial z} + \alpha V^1 - \alpha^2\hat{y}\frac{V^3}{\sqrt{f}}\right) -$$

$$-\frac{\partial V^1}{\partial\hat{x}}\frac{\partial V^2}{\partial\hat{y}} - \frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial V^2}{\partial\hat{y}}\frac{\partial V^3}{\partial z} - \frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial V^1}{\partial\hat{x}}\frac{\partial V^3}{\partial z} \tag{9}$$

и граничное условие

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = (\nabla p\cdot\nabla\omega)\,|_{\partial\Omega} = g_{ik}g^{ij}g^{km}\left.\frac{\partial p}{\partial x^j}\frac{\partial\omega}{\partial x^m}\right|_{\partial\Omega} =$$

$$= (1 + \alpha^2\hat{y}^2)\frac{\partial p}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\omega}{\partial\hat{x}} - \alpha^2\hat{x}\hat{y}\left(\frac{\partial p}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\omega}{\partial\hat{y}} + \frac{\partial p}{\partial\hat{y}}\frac{\partial\omega}{\partial\hat{x}}\right) + \alpha\hat{y}\left(\frac{\partial p}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\omega}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial\hat{x}}\right) +$$

$$+(1+\alpha^2\hat{x}^2)\frac{\partial p}{\partial \hat{y}}\frac{\partial \omega}{\partial \hat{y}} - \alpha\hat{x}\left(\frac{\partial p}{\partial \hat{y}}\frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \omega}{\partial \hat{y}}\right) + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \omega}{\partial z}\bigg|_{\partial\Omega} =$$

$$= \mu\left[\Delta V^1 - 2\alpha^2\left(\hat{y}\frac{\partial V^2}{\partial \hat{x}} - \hat{x}\frac{\partial V^2}{\partial \hat{y}}\right) - 2\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial V^3}{\partial y} + \frac{\partial V^2}{\partial z}\right)\right]\frac{\partial \omega}{\partial \hat{x}} +$$

$$+ \mu\left[\Delta V^2 + 2\alpha^2\left(\hat{y}\frac{\partial V^1}{\partial \hat{x}} - \hat{x}\frac{\partial V^1}{\partial \hat{y}}\right) + 2\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial V^3}{\partial x} + \frac{\partial V^1}{\partial z}\right)\right]\frac{\partial \omega}{\partial \hat{y}} +$$

$$+ \mu\left[\Delta V^3 - \frac{2\alpha^2}{f}\left(x\frac{\partial V^3}{\partial x} + y\frac{\partial V^3}{\partial y}\right)\right]\frac{\partial \omega}{\partial z}. \tag{10}$$

Для разрешимости задачи (9) при условии (10), т. е. неоднородной задачи Неймана для уравнения Пуассона $-\Delta p = F(r,\varphi,z)$, $\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = f(r,\varphi,z)$, необходимо выполнение условия [7, 8]:

$$\int_{\Omega} F\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} f\, d\partial\Omega .$$

Но так как $\mathbf{F} = \operatorname{div}(\rho(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} + \mu\Delta\mathbf{V})$, а $f = ((\rho(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} + \mu\,\Delta\mathbf{V})\times\mathbf{n})$, то получим

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}\left((\mathbf{V}\times\nabla)\mathbf{V} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{V}\right)d\Omega = \int_{\partial\Omega}\left(\left((\mathbf{V}\times\nabla)\mathbf{V} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{V}\right)\times\mathbf{n}\right)d\partial\Omega ,$$

то есть формулу Остроградского:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}\boldsymbol{\Psi}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\Psi}\times\mathbf{n})\, d\partial\Omega ,$$

которая справедлива для любого $\boldsymbol{\Psi}$, а, следовательно, и для любого вектора скорости, т. е. условие выполняется автоматически.

Рассмотрим один из наиболее простых случаев движения несжимаемой вязкой жидкости – ламинарное движение. Тогда для скрученного цилиндра постоянного поперечного сечения в криволинейных неортогональных координатах (1) положим $V^1 = 0$, $V^2 = 0$. Из уравнения неразрывности движения получаем $\frac{\partial V^3}{\partial z} = 0$. Следовательно, $V^3 = V^3(\hat{x},\hat{y})$. В этом случае соотношения (5) преобразуются к виду

$$\frac{1}{\mathrm{ReEu}}\left[2\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial V^3}{\partial y}\right) - 2\frac{\alpha^3 y V^3}{f^{3/2}}\right] - \alpha^2\hat{x}\frac{(V^3)^2}{f} + \alpha\hat{y}\frac{\partial p}{\partial z} =$$
$$= -(1+\alpha^2\hat{y}^2)\frac{\partial p}{\partial \hat{x}} + \alpha^2\hat{x}\hat{y}\frac{\partial p}{\partial \hat{y}} ,$$

$$\frac{1}{\mathrm{ReEu}}\left[-2\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial V^3}{\partial x}\right) + 2\frac{\alpha^3 x V^3}{f^{3/2}}\right] - \alpha^2\hat{y}\frac{(V^3)^2}{f} - \alpha\hat{x}\frac{\partial p}{\partial z} =$$
$$= \alpha^2\hat{x}\hat{y}\frac{\partial p}{\partial \hat{x}} - (1+\alpha^2\hat{x}^2)\frac{\partial p}{\partial \hat{y}} ,$$

$$\frac{1}{\mathrm{ReEu}}\left[\Delta V^3 - \frac{2\alpha^2}{f}\left(x\frac{\partial V^3}{\partial x} + y\frac{\partial V^3}{\partial y}\right) - \frac{\alpha^2(2-\alpha^2x^2-\alpha^2y^2)}{f^2}V^3\right] =$$
$$= \sqrt{f}\left(-\alpha\hat{y}\frac{\partial p}{\partial \hat{x}} + \alpha\hat{x}\frac{\partial p}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial p}{\partial z}\right). \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что

$$-\alpha\hat{y}\frac{\partial p}{\partial \hat{x}}+\alpha\hat{x}\frac{\partial p}{\partial \hat{y}}-\frac{\partial p}{\partial z}=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{ReEu}}\left[\frac{2\alpha^2}{f^{3/2}}\left(x\frac{\partial V^3}{\partial x}+y\frac{\partial V^3}{\partial y}\right)-\frac{2\alpha^4V^3}{f^{5/2}}(x^2+y^2)\right]-\frac{1}{f}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Тогда

$$\Delta V^3-\frac{\alpha^2(2+\alpha^2x^2+\alpha^2y^2)}{f^2}V^3=\frac{1}{\mu\sqrt{f}}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{12}$$

$$-\frac{1}{2\rho}\Delta p=-\alpha^2\frac{(V^3)^2}{f}-\alpha^2\hat{x}V^3\left(\frac{1}{f}\frac{\partial V^3}{\partial x}-\frac{\alpha^2xV^3}{f^2}\right)-$$

$$-\alpha^2\hat{y}V^3\left(\frac{1}{f}\frac{\partial V^3}{\partial y}-\frac{\alpha^2yV^3}{f^2}\right), \tag{13}$$

$$\Delta u=(1+\alpha^2\hat{y}^2)\frac{\partial^2u}{\partial\hat{x}^2}+(1+\alpha^2\hat{x}^2)\frac{\partial^2u}{\partial\hat{y}^2}-2\alpha^2\hat{x}\hat{y}\frac{\partial^2u}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}-\alpha^2\left(\hat{x}\frac{\partial u}{\partial\hat{x}}+\hat{y}\frac{\partial u}{\partial\hat{y}}\right).$$

Граничные условия (6), (10) примут вид

$$V^3\big|_{\partial\Omega}=0, \qquad \frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}=\frac{2\alpha\mu}{\sqrt{f}}\left(-\frac{\partial V^3}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial\hat{x}}+\frac{\partial V^3}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\hat{y}}\right). \tag{14}$$

Таким образом, трехмерные краевые задачи (5), (6), (9), (10) приведены к двумерным задачам (12)–(14), для решения которых могут быть применены методы наименьших квадратов, Бубнова – Галеркина или метод Ритца на основе теории R-функций [9]. Положительная определенность операторов задач (12)–(14) доказана в [5].

1. *Борисенко А. И., Тарапов И. Е.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – Харьков: Вища шк., 1978. – 216 с.
2. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
3. *Лурье А. И., Джанелидзе Г. Ю.* Задача Сен-Венана для естественно-скрученных стержней // Докл. АН СССР. – 1939. – **24,** № 1. – С. 23–26.
4. *Максименко-Шейко К. В.* Исследование течения несжимаемой вязкой жидкости в скрученных каналах сложного профиля методом R-функций // Проблемы машиностроения. – 2001. – **4**, № 3-4. – С. 108–116.
5. *Максименко-Шейко К. В., Рвачев В. Л. Шейко Т. И.* Математические модели физических полей в скрученных цилиндрах произвольного сечения // Вісн. Запоріз. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2001. – № 1. – С. 54–60.
6. *Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И.* Математические модели физических полей в змеевиках произвольного сечения // Вісн. Запоріз. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2002. – № 2. – С. 65–74.
7. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
8. *Михлин С. Г.* Прямые методы в математической физике. – М.–Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 428 с.
9. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые её приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
10. *Рвачев В. Л., Толок А. В., Уваров Р. А., Шейко Т. И.* Новые подходы к построению уравнений трехмерных локусов с помощью R-функций // Вісн. Запоріз. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2000. – № 2. – С. 119–130.
11. *Риз П. М.* Деформации естественно закрученных стержней. I, II // Докл. АН СССР. – 1939. – **23**, № 1. – С. 18–21; **23**, № 5. – С. 441–444.
12. *Тумаркин С. А.* Равновесие и колебания закрученных стержней // Тр. Центр. аэрогидродинам. ин-та. – 1937. – Вып. 341. – 42 с.
13. *Халатов А. А., Авраменко А. А., Шевчук И. В.* Закрученные потоки. – К.: Ин-т техн. теплофизики НАН Украины, 2000. – 474 с. – Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных массовых сил: В 4 т. – Т. 3.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РУХУ НЕСТИСЛИВОЇ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ В СКРУЧЕНИХ ТРУБАХ

Побудовано математичні моделі руху в'язкої нестисливої рідини в скручених трубах. Отримано рівняння Нав'є – Стокса й нерозривності руху в криволінійних неортогональних координатах. Для визначення розподілу тиску в рідині за відомим розподілом швидкостей сформульовано задачу Неймана для рівняння Пуассона. Для скручених труб нескінченної довжини сталого перетину тривимірну задачу зведено до двовимірної.

MATHEMATICAL MODELS OF INCOMPRESSIBLE VISCOUS LIQUID MOTION IN TWISTED TUBES

In the paper the mathematical models of incompressible viscous liquid motion in twisted tubes are constructed. The equations of Navier – Stokes and continuity of motion in the curvilinear non-orthogonal coordinates are obtained. For definition of pressure profile in a liquid according to the known velocity distribution the Neumann problem for Poisson equation is formulated. For twisted pipes of infinite length with uniform cross-section the 3D problem is reduced to the 2D one.

Ин-т проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Получено
04.12.02