УДК 539.3

Г. Е. Багдасарян

ПОВЕРХНОСТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В МАГНИТОАКТИВНОЙ СРЕДЕ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ МАГНИТОУПРУГИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

С использованием найденных решений конкретных двумерных задач волновой динамики, полученных на основании нелинейных уравнений и граничных условий теории магнитоупругости ферромагнитных тел и соответствующих линеаризованных уравнений и поверхностных условий, описывающих поведение малых возмущений в непроводящей магнитоактивной упругой среде, исследуются возможности возбуждения и распространения новых типов поверхностных колебаний и волн в указанных средах, обусловленные магнитоактивными (в особенности – магнитострикционными) свойствами среды и ее взаимодействием с внешним магнитным полем.

1. Линеаризованные уравнения и поверхностные условия. Пусть упругая диэлектрическая среда с упорядоченной магнитной структурой находится во внешнем стационарном магнитном поле, которое в отсутствии ферромагнитного тела характеризуется вектором напряженности $\mathbf{H}_0$ и вектором магнитной индукции $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$ ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{Н/А}^2$ – магнитная постоянная). Окружающая тело среда считается вакуумом.

Вопросам математического моделирования возмущенных движений в рассматриваемой магнитоупругой среде при наличии внешнего магнитного поля посвящена работа [3]. В этой работе, используя основные положения нелинейной теории магнитоупругости ферромагнитных тел [1, 9, 12, 13, 17–19] и теории малых возмущений, путем линеаризации [1, 10, 11, 18] получены следующие линейные уравнения и поверхностные условия, описывающие поведение малых возмущений в указанной магнитоактивной деформируемой среде:

– уравнения во внутренней области

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(s_{ik} + s_{im}^{\text{non}} \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right) + \mu_0 M_i^{\text{non}} \frac{\partial h_k}{\partial x_i} + \mu_0 m_i \frac{\partial H_k^{\text{non}}}{\partial x_i} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \qquad \mathbf{b} = \mu_0(\mathbf{h} + \mathbf{m}),$$

$$s_{ij} = \bar{c}_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \mu_0 e_{ijk} m_k,$$

$$h_i = g_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + A_{ik} m_k, \tag{1}$$

где s_{ik} – возмущения компонент тензора магнитоупругих напряжений; s_{ik}^{non} – компоненты тензора напряжений невозмущенного состояния; u_k – компоненты возмущения вектора упругих перемещений; h_k, m_k и b_k – компоненты векторов $\mathbf{h}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{b}$, представляющие возмущения соответственно напряженности $\mathbf{H}^{\text{non}}$, намагниченности $\mathbf{M}^{\text{non}}$ и магнитной индукции $\mathbf{B}^{\text{non}}$ невозмущенного магнитного поля; x_i – декартовые координаты;

– уравнения во внешней области

$$\operatorname{rot} \mathbf{h}^{(e)} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{h}^{(e)} = 0, \qquad \mathbf{b}^{(e)} = \mu_0 \mathbf{h}^{(e)}, \tag{2}$$

индекс « e » здесь и в дальнейшем указывает на принадлежность к внешней среде;

– граничные условия на поверхности S_0 недеформируемого тела:

$$\left[s_{ik} + s_{km}^{\text{non}} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right] n_k^0 = \left[t_{ki}^{(\text{e})} - t_{ki} \right] n_k^0 + \left[T_{km}^{\text{non(e)}} - T_{km}^{\text{non}} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_k^0 ,$$

$$\left[b_k - b_k^{(\text{e})} \right] n_k^0 = \left[B_m^{\text{non}} - B_m^{\text{non(e)}} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_i^0 ,$$

$$\varepsilon_{nmk} \left\{ \left[h_n - h_n^{(\text{e})} \right] n_m^0 - \left[H_n^{\text{non}} - H_n^{\text{non(e)}} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_i^0 \right\} = 0 , \qquad (3)$$

где T_{km}^{non} и $T_{km}^{\text{non(e)}}$ – тензоры напряжений Максвелла невозмущенного состояния соответственно для тела и окружающей среды (см. (9)); n_k^0 – компоненты вектора внешней нормали $\mathbf{n}_0$ к поверхности S_0; ε_{ijk} – тензор Леви-Чивита,

$$t_{ki} = b_k H_i^{\text{non}} + h_i H_k^{\text{non}} - \mu_0 \delta_{ki} \mathbf{H}^{\text{non}} \mathbf{h} ,$$

$$t_{ki}^{(\text{e})} = \mu_0 \left[h_i^{(\text{e})} H_k^{\text{non(e)}} + h_k^{(\text{e})} H_i^{\text{non(e)}} - \delta_{ki} \mathbf{H}^{\text{non(e)}} \mathbf{h}^{(\text{e})} \right]. \qquad (4)$$

В уравнениях (1) использованы следующие обозначения:

$$\bar{c}_{ijkl} = c_{ijkl} + \mu_0 A_{pq} M_r^{\text{non}} M_j^{\text{non}} (\delta_{ik}\delta_{pl}\delta_{rq} + \delta_{kl}\delta_{iq}\delta_{ir} + \delta_{lp}\delta_{iq}\delta_{kr}) +$$

$$+ \frac{\mu_0}{2} B_{pqrs} (\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kl} + \delta_{iq}\delta_{jk}\delta_{pl} + \delta_{ik}\delta_{jq}\delta_{pl}) M_r^{\text{non}} M_s^{\text{non}} +$$

$$+ \mu_0 B_{pqrs} (\delta_{pk}\delta_{ql}\delta_{is} M_j^{\text{non}} + \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{is} M_k^{\text{non}}) M_r^{\text{non}} ,$$

$$e_{ijk} = B_{ijkl} M_l^{\text{non}} + A_{mi} (\delta_{kj} M_m^{\text{non}} + \delta_{mkj}^{\text{non}}) ,$$

$$g_{ijk} = B_{jkpi} M_p^{\text{non}} + A_{rs} (\delta_{is}\delta_{jk} M_r^{\text{non}} + \delta_{rk}\delta_{is} M_j^{\text{non}} + \delta_{ij}\delta_{sk} M_r^{\text{non}}) , \qquad (5)$$

где c_{ijkl}, A_{kl}^{-1} и B_{ijkl} – соответственно тензоры упругих постоянных, магнитных восприимчивостей и магнитострикционных коэффициентов.

Для магнитоупругих сред, которые в размагниченном состоянии изотропны относительно как магнитных, так и упругих свойств, справедливы равенства [6, 8, 9, 14]

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \qquad A_{kl} = \chi^{-1}\delta_{kl} ,$$

$$B_{ijkl} = e_2 \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}(e_1 - e_2)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) , \qquad (6)$$

где λ и μ – постоянные Ляме; χ – магнитная восприимчивость; e_1 и e_2 – магнитострикционные постоянные среды.

К уравнениям (2) необходимо присоединить условия затухания возмущений магнитных величин на бесконечности.

Рассматривая линеаризованные уравнения и соотношения (1)–(5), замечаем, что в коэффициенты этих выражений входят величины с индексом « non », определяемые из уравнений и граничных условий невозмущенного состояния, которые, в свою очередь, также нелинейны и должны быть линеаризованы. Указанный процесс линеаризации подробно исследован в статье [18]. Здесь (как и в работе [3]) принимаем упрощенный вариант, основанный на отождествлении геометрии тела в невозмущенном состоянии с его геометрией в первоначальном недеформированном состоянии. Этим предположением, по существу, принимаем, что: ***а***) магнитное поле в невозмущенном состоянии совпадает с магнитным полем в недеформируемом теле; **б**) напряжения и деформации в невозмущенном состоянии можно определять на основе решения статической задачи теории упругости, описываемой уравнениями равновесия

$$\frac{\partial s_{ik}^{\text{non}}}{\partial x_k} + \mu_0 M_n^{\text{non}} \frac{\partial H_k^{\text{non}}}{\partial x_n} = 0 \,,$$

$$s_{ij}^{\text{non}} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{\text{non}} + \mu_0 A_{ik} M_j^{\text{non}} M_k^{\text{non}} + \frac{1}{2}\mu_0 B_{ijkl} M_k^{\text{non}} M_l^{\text{non}} \,, \tag{7}$$

при условиях на поверхности S_0 недеформируемого тела

$$s_{ik}^{\text{non}} N_k^0 = \left[T_{ki}^{\text{non(e)}} - T_{ki}^{\text{non}} \right] n_k^0 \,, \tag{8}$$

где

$$T_{ki}^{\text{non(e)}} = H_i^{\text{non}} B_k^{\text{non}} - \frac{1}{2}\mu_0 \delta_{ik} \left[\mathbf{H}^{\text{non}} \right]^2 ,$$

$$T_{ki}^{\text{non(e)}} = \mu_0 H_i^{\text{non(e)}} H_k^{\text{non(e)}} - \frac{1}{2}\mu_0 \delta_{ik} \left[\mathbf{H}^{\text{non(e)}} \right]^2 . \tag{9}$$

Входящие в (7)–(9) характеристики невозмущенного магнитного поля, согласно принятому предположению, определяются из задачи магнитостатики для недеформируемого тела, описываемой:

– уравнениями магнитостатики во внутренней области

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^{\text{non}} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{B}^{\text{non}} = 0 \,,$$

$$\mathbf{B}^{\text{non}} = \mu_0 (\mathbf{H}^{\text{non}} + \mathbf{M}_{\text{non}}), \qquad H_k^{\text{non}} = A_{kl} M_l^{\text{non}} \,; \tag{10}$$

– уравнениями во внешней области

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_{\text{non}}^{(\text{e})} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{H}_{\text{non}}^{(\text{e})} = 0 \,,$$

$$\mathbf{M}_{\text{non}}^{(\text{e})} = 0, \qquad \mathbf{B}^{\text{non}} = \mu_0 \mathbf{H}_{\text{non}}^{(\text{e})} \,; \tag{11}$$

– условиями сопряжения на поверхности S_0

$$(\mathbf{B}_{\text{non}} - \mathbf{B}_{\text{non}}^{(\text{e})}) \cdot \mathbf{n}_0 = 0, \qquad (\mathbf{H}_{\text{non}} - \mathbf{H}_{\text{non}}^{(\text{e})}) \times \mathbf{n}_0 = 0 \,; \tag{12}$$

– условиями на бесконечности

$$\mathbf{H}_{\text{non}}^{(\text{e})} \to \mathbf{H}^{(\text{e})} \qquad \text{при} \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \infty \,. \tag{13}$$

Таким образом, вопрос об исследовании поведения возмущений магнитоупругих величин некоторого состояния сводится к поэтапному решению следующих трех задач:

1) определение характеристик магнитного поля недеформируемого тела на основе соотношений (10)–(13);

2) определение магнитоупругих параметров невозмущенного состояния на основе (7)–(9) с использованием решения первой задачи;

3) исследование поведения магнитоупругих возмущений на основе (1)–(6) с использованием решения первых двух задач.

На основе сформулированных выше краевых задач и результатов работ [2–7, 15, 16] рассмотрим конкретные двумерные задачи о распространении магнитоупругих возмущений в магнитоактивных средах.

2. Возбуждение сдвиговых поверхностных волн в полупространстве волной Рэлея. Исследуем характер распространения магнитоупругой волны Рэлея в магнитомягкой ферромагнитной среде. Пусть упругая изотропная магнитомягкая ферромагнитная среда, не обладающая магнитострикционными свойствами $(B_{ijkl} = 0)$, занимает полубесконечную область $x_2 < 0$ и находится во внешнем постоянном магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}_0(B_{01}, 0, B_{03})$. Следуя работе [18], для рассматриваемого случая принимаем, что $\left| M_j^{\text{non}} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll | m_i |$. Тогда из (10)–(13) и (7)–(9) легко найти следующие выражения для компонент невозмущенного магнитного поля и упругих напряжений невозмущенного состояния:

$$\mathbf{B}_{\text{non}}^{(\text{e})} = \mathbf{B}_0, \qquad \mathbf{B}_{\text{non}} = \mu_r \mathbf{B}_0, \qquad \mathbf{M}_{\text{non}} = \chi \mathbf{H}_{\text{non}},$$

$$\mathbf{H}_{\text{non}}^{(\text{e})} = \mathbf{H}_{\text{non}} = \mu_0^{-1} \mathbf{B}_0, \qquad \sigma_{ik}^0 = 0. \tag{14}$$

Задачу будем решать в двумерной постановке, предполагая, что все искомые величины не зависят от координаты x_3. При этих условиях из уравнений $\operatorname{rot} \mathbf{h} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{h}^{(\text{e})} = 0$ и граничного условия (3) получаем, что $h_3 = h_3^{(\text{e})} \equiv 0$. Учитывая это, из (1)–(3) в силу (14) и принятого предположения о двумерности движения запишем следующие уравнения и поверхностные условия, описывающие распространение двумерных магнитоупругих волн в рассматриваемой среде:

– уравнения в области полупространства $(x_2 < 0)$

$$c_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (c_1^2 - c_2^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{2\chi B_{01}}{\rho_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

$$c_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + c_1^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (c_1^2 - c_2^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{2\chi B_{01}}{\rho_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},$$

$$\Delta \varphi = 0, \tag{15}$$

$$c_2^2 \Delta u_3 = \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \tag{16}$$

– уравнение в области вакуума $(x_2 > 0)$

$$\Delta \varphi^{(\text{e})} = 0; \tag{17}$$

– условия на поверхности раздела $(x_2 = 0)$

$$c_2^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\chi B_{01}^2}{\mu_0 \rho_0} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\chi B_{01}}{\rho_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0,$$

$$(c_1^2 - 2c_2^2) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_1^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \qquad \varphi = \varphi^{(\text{e})},$$

$$\frac{\partial \varphi^{(\text{e})}}{\partial x_2} = \mu_r \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\chi B_{01}}{\mu_0} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \tag{18}$$

$$c_2^2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\chi B_{01}}{\rho_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\chi B_{01} B_{03}}{\rho_0 \mu_0} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0. \tag{19}$$

В соотношениях (15)–(19) $\varphi^{(\text{e})}$ и φ – соответственно потенциалы индуцированного магнитного поля в области вакуума ($x_2 > 0$) и в среде (полупространстве $x_2 < 0$); Δ – двумерный оператор Лапласа;

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}, \qquad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho_0}, \qquad h_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \qquad h_k^{(\text{e})} = \frac{\partial \varphi^{(\text{e})}}{\partial x_k}.$$

Из (15)–(19) следует, что: ***а***) разделены задача (15), (18) (плоская задача для определения u_1, u_2, φ, $\varphi^{(e)}$ или задача распространения магнитоупругих волн Рэлея) и задача (16), (19) (антиплоская задача для определения u_3 или задача распространения сдвиговых поверхностных волн); ***б***) для исследования сдвиговых поверхностных волн необходимо иметь граничные значения величин u_2 и h_2, возникающих вследствие распространения магнитоупругой волны Рэлея; ***в***) волны Рэлея в магнитомягкой среде при своем распространении генерируют сдвиговые поверхностные волны (вспомним, что при отсутствии магнитного поля чисто упругая сдвиговая поверхностная волна не существует); ***г***) существование сдвиговой поверхностной волны обусловлено также тем, что внешнее магнитное поле направлено наклонно $(B_{01} \neq 0, B_{03} \neq 0)$ к плоскости распространения рэлеевской волны.

2.1. ***Магнитоупругие волны Рэлея.*** Рассмотрим задачу о магнитоупругих поверхностных волнах Рэлея, описываемую уравнениями (15) и граничными условиями (18). Решение этой задачи будем искать в виде

$$u_r = \left[\sum_{j=1}^{3} A_j^{(r)} \exp(\beta_j x_2) \right] \exp\left[i(kx_1 - \omega t) \right], \qquad r = 1, 2\,,$$

$$\varphi = \varphi_0 \exp\left[\beta x_2 + i(kx_1 - \omega t) \right],$$

$$\varphi^{(e)} = \varphi_0^{(e)} \exp\left[\beta_e x_2 + i(kx_1 - \omega t) \right], \tag{20}$$

соответствующим распространению вдоль оси Ox_1 поверхностной волны с частотой ω, волновым числом k, фазовой скоростью $c = \omega / k$ и амплитудой, зависящей от координаты x_2. Решение (20) соответствует волне, затухающей внутри тела, если $\beta_i > 0$, $\beta > 0$ и $\beta_e < 0$.

Подставляя (20) в уравнения (15) и требуя, чтобы уравнение (20) описывало поверхностную волну, получим

$$\beta = \beta_1 = -\beta_e = k, \qquad \beta_2 = k\sqrt{1-\theta}, \qquad \beta_3 = k\sqrt{1-\gamma\theta}\,,$$

$$A_1^{(1)} = iA_1^{(2)}, \qquad A_2^{(1)} = \sqrt{1-\theta}\, A_2^{(2)}, \qquad iA_3^{(2)} = \sqrt{1-\gamma\theta}\, A_3^{(1)},$$

$$2\chi B_{01}\varphi_0 = \rho_0 c^2 A_1^{(1)}, \qquad \theta = c^2 c_2^{-2}, \qquad \gamma = c_1^{-2} c_2^2\,. \tag{21}$$

Удовлетворяя граничным условиям (18), для оставшихся неизвестных A_i и $\varphi_0^{(e)}$ получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений. Из условия совместности этой системы получим следующее характеристическое уравнение:

$$\left[1 + (\chi+1)\alpha \right]\left[(1-\theta)(1-\gamma\theta) \right]^{1/2} + \chi\alpha(1-\gamma\theta)^{1/2} =$$

$$= \left(1 - \frac{\theta}{2} \right)\left[1 - \frac{\theta}{2} + (2\chi+1)\alpha \right], \qquad \alpha = \frac{\chi B_{01}^2}{\mu_0 \mu(\chi+2)}\,, \tag{22}$$

определяющее безразмерную фазовую скорость θ поверхностной волны.

В уравнении (22) параметр α характеризует напряженность внешнего магнитного поля и при $\alpha = 0$ из (22) получаем известное уравнение Рэлея для чисто упругих поверхностных волн. Анализ уравнения (22) в зависимости от параметров α и γ показывает, что: ***а***) для каждого α и γ уравнение (22) имеет единственный действительный положительный корень, удовлетворяющий условию $\theta < 1$, т.е. в любой упругой магнитомягкой среде для любого значения напряженности магнитного поля могут распространяться поверхностные волны рассматриваемого типа с единственной скоростью; ***б***) скорости поверхностных магнитоупругих волн не зависят от частоты колебаний и поэтому эти волны, как и чисто упругие рэлеевские волны, распространяются без дисперсии; ***в***) скорость распространения поверхностной волны для каждой среды (для каждого γ) с увеличением напряженности магнитного поля увеличивается, оставаясь меньше скорости поперечной упругой объемной волны.

2.2. ***Сдвиговая поверхностная магнитоупругая волна.*** На основе уравнения (16) и граничного условия (19) рассмотрим вопрос о существовании и распространении сдвиговых поверхностных волн. Для этого, как следует из (19), необходимо иметь значения величин u_2 и h_2 при $x_2 = 0$. Используя (20)–(22) и (18), получим

$$u_2(x_1, \theta, t) = \theta D \cos(kx_1 - \omega t),$$

$$h_2(x_1, \theta, t) = \frac{\chi B_{01}\, k\, \theta}{\mu_0(\chi + 2)} D \sin(kx_1 - \omega t), \tag{23}$$

где D – произвольная постоянная.

В силу (23) решение задачи (16), (19), представляющее поверхностную волну, имеет вид

$$u_3 = \frac{2\chi(\chi + 1)B_{01}B_{03}}{\mu_0\mu(\chi + 2)} \frac{\theta}{\sqrt{1 - \theta}} D\, e^{\beta_2 x_2} \sin(kx_1 - \omega t). \tag{24}$$

Из (24) вытекает, что, если в магнитомягкой ферромагнитной среде распространяется рэлеевская волна $(D \neq 0)$, то при $B_{01}B_{03} \neq 0$ она генерирует сдвиговые поверхностные магнитоупругие волны $(u_{03} \neq 0)$. Амплитуда этих сдвиговых волн прямо пропорциональна величине $B_{01}B_{03}$. При значении магнитной индукции порядка 1 Тл указанная амплитуда может превышать амплитуду рэлеевской волны.

3. Возможность бесконтактного распространения магнитоупругой волны из одной среды в другую. С использованием линеаризованных уравнений и граничных условий магнитоупругости магнитострикционных сред, приведенных в **п. 1,** исследуем возможность (обусловленную магнитострикционным эффектом) просачивания сдвиговой магнитоупругой волны через зазор между двумя магнитострикционными полупространствами. С этой целью предварительно рассмотрим вопрос отражения сдвиговой волны от свободной поверхности полупространства. Аналогично, как в [4, 5, 15, 16], покажем, что благодаря магнитострикционным свойствам среды в ней при отражении возникают поверхностные колебания (сопутствующие поверхностные магнитоупругие колебания – СПМК).

3.1. ***Отражение сдвиговой волны от свободной поверхности магнитострикционного полупространства. Возникновение сопутствующих (процессу отражения) поверхностных магнитоупругих колебаний.*** Пусть магнитострикционная среда, занимающая полупространство $x_2 > h$, граничит с областью вакуума – полупространством $x_2 < h$. Пусть, далее, в полупространстве $x_2 > h$ распространяется падающая сдвиговая объемная волна с частотой ω, амплитудой u_0 и углом падения θ. Величины, отнесенные к области вакуума $x_2 < h$, будем отмечать индексом « e ». Допустим также, что напряженность начального магнитного поля направлена по оси Ox_3, т.е. $\mathbf{H}_0 = (0, 0, H_0)$. Учитывая изложенное, на основе (1)–(5) исследование магнитоупругих возмущений в случае антиплоской задачи приводится к решению уравнений

$$\nu\Delta u + \tau\Delta\varphi = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\tau\Delta u - \mu_0\mu_r\Delta\varphi = 0 \qquad \text{при} \qquad x_2 > h \tag{25}$$

и

$$\Delta\varphi^{(e)} = 0 \qquad \text{при} \qquad x_2 < h \tag{26}$$

со следующими условиями на поверхности $x_2 = h$:

$$\nu \frac{\partial u}{\partial x_2} + \tau \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0,$$

$$-\tau \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\mu_0 \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x_2} - \mu_0 \mu_r \frac{\partial \varphi}{\partial x_2},$$

$$\varphi = \varphi^{(e)}. \tag{27}$$

В уравнениях (25) и поверхностных условиях (27) использованы обозначения:

$$\nu = \mu + \mu_0 \chi H_0^2 \left[1 + 5\chi \frac{e_1 - e_2}{4} + \left(1 + \chi \frac{e_1 - e_2}{2}\right)^2 \right],$$

$$\tau = -\mu_0 \chi H_0 \left(1 + \chi \frac{e_1 - e_2}{2}\right), \qquad \mathbf{h} = -\operatorname{grad}\varphi, \qquad \mathbf{h}^{(e)} = -\operatorname{grad}\varphi^{(e)},$$

где e_1 и e_2 – магнитострикционные постоянные среды.

Решение задачи (25)–(27) ищем в виде представления для

– сдвиговой волны в магнитострикционной среде ($x_2 > h$):

$$u = U \exp i(px_2 + qx_1 - \omega t),$$

$$\varphi = \Phi \exp i(px_2 + qx_1 - \omega t) \tag{28}$$

– магнитных колебаний в вакууме ($x_2 < h$):

$$\varphi^{(e)} = \Phi^{(e)} \exp i(px_2 + qx_1 - \omega t), \tag{29}$$

где p – неизвестный параметр, q – действительная положительная величина. Подставляя (28) в (25), получаем дисперсионное уравнение

$$(q^2 + p^2)(q^2 + p^2 - \omega^2 s^{-2}) = 0, \tag{30}$$

где

$$s^2 = \bar{\mu}\left[\frac{(1 + r^2)}{\rho_0}\right]^{1/2}, \qquad r^2 = \frac{\tau^2}{\mu_0\mu_r\nu},$$

s – скорость сдвиговой объемной магнитоупругой волны.

Характеристическое уравнение (30) – уравнение четвертой степени относительно p, тогда как в немагнитоактивных средах сдвиговым волнам соответствует уравнение второй степени

$$q^2 + p^2 - \omega^2 s_0^{-2} = 0, \qquad s_0^2 = \frac{\rho_0}{\mu}.$$

Повышение порядка характеристического уравнения обусловлено магнитострикционным свойством среды (происходит взаимодействие упругих волн с магнитостатическими колебаниями) и свидетельствует о новых типах колебаний, возникающих благодаря внешнему магнитному полю и указанному свойству среды.

Уравнение (30) имеет вещественные и мнимые корни

$$p_{1,2} = \pm\left(\frac{\omega^2}{s^2} - q^2\right)^{1/2} = \pm p_0, \qquad p_0 > 0, \qquad p_{3,4} = \pm iq.$$

Корень $p_1 = -p_0$ соответствует падающей волне, $p_2 = +p_0$ – отраженной волне, причем обычное отражение (в чисто упругом случае) сдвиговых волн характеризуется только этими волнами. Корень $p_3 = iq$ соответствует новым колебаниям (обусловленным магнитострикционным эффектом), локализованным у поверхности полупространства. Эти колебания не являются собственными колебаниями системы, а сопутствуют процессу отражения и возникают исключительно благодаря присутствию падающей на границу раздела магнитоупругой объемной волны, когда среда имеет магнитострикционное свойство. Поскольку они локализованы у поверхности и сопутствуют процессу отражения, то, естественно, назовем их сопутствующими поверхностными магнитоупругими колебаниями (СПМК).

Корень $p_4 = -iq$ соответствует решению, возрастающему с глубиной, и поэтому отбрасываем.

Подставляя (29) в (26), получаем значения p для вакуума

$$p_{1,2} = \pm iq,$$

из которых корень $p_2 = iq$ отбрасываем (т.к. соответствующее решение возрастает при $x_2 \to -\infty$).

Учитывая сказанное, решение системы (25), (26) получим в следующем виде:

$$u = u_0 e^{i(-p_0 x_2 + q x_1 - \omega t)} + u_1 e^{i(p_0 x_2 + q x_1 - \omega t)},$$

$$\varphi = \frac{\tau}{\mu_0 \mu_r} u + \Phi e^{-q x_2 + i(q x_1 - \omega t)},$$

$$\varphi^{(e)} = \Phi^{(e)} e^{q x_2 + i(q x_1 - \omega t)}, \tag{31}$$

где u_0 (u_1) – амплитуда смещения падающей (отраженной) волны; Φ, $\Phi^{(e)}$ – амплитуды потенциалов СПМК и магнитного поля в вакууме. Неизвестные амплитуды u_1, Φ, $\Phi^{(e)}$ определяем, требуя, чтобы решение (31) удовлетворяло граничным условиям (27). Решая полученную систему трех линейных неоднородных уравнений, находим

$$u_1 = \frac{(1+\mu_r)\operatorname{tg}\theta + i\bar{r}^2}{(1+\mu_r)\operatorname{tg}\theta - i\bar{r}^2} u_0 e^{-2ip_0 h}, \qquad \bar{r}^2 = \frac{r^2}{1+r^2},$$

$$\Phi = -\frac{2\tau\operatorname{tg}\theta}{\mu_0\mu_r\left[(1+\mu_r)\operatorname{tg}\theta - i\bar{r}^2\right]} u_0 e^{-ip_0 h} e^{qh} = \Phi' e^{-ip_0 h} e^{qh},$$

$$\Phi^{(e)} = -\frac{2\tau\operatorname{tg}\theta}{\mu_0\left[(1+\mu_r)\operatorname{tg}\theta - i\bar{r}^2\right]} u_0 e^{-ip_0 h} e^{-qh} = -\mu_r e^{-2qh}\Phi, \tag{32}$$

где θ, $0 \le \theta \le \pi/2$, – угол скольжения волны, введенный посредством $q = k\cos\theta$, $p_0 = k\sin\theta$ (где k – волновое число), т.е. угол между волновым вектором $\mathbf{k}(q, -p_0, 0)$ и положительным направлением оси x_1.

Учитывая (31) и (32), решение задачи отражения в магнитострикционной среде запишем в следующем виде:

$$u = u_0\left[e^{-ip_0 x_2} + \frac{(1+\mu_r)\operatorname{tg}\theta + i\bar{r}^2}{(1+\mu_r)\operatorname{tg}\theta - i\bar{r}^2} e^{ip_0(x_2 - 2h)}\right] e^{i(q x_1 - \omega t)},$$

$$\varphi = \frac{u_0 \tau}{\mu_0 \mu_r}\left[e^{-ip_0 x_2} + \frac{(1+\mu_r)\operatorname{tg}\theta + i\,\overline{r}^2}{(1+\mu_r)\operatorname{tg}\theta - i\,\overline{r}^2} e^{ip_0(x_2-2h)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\operatorname{tg}\theta\, e^{-ip_0 h}\, e^{q(h-x_2)}}{(1+\mu_r)\operatorname{tg}\theta - i\,\overline{r}^2} \right] e^{i(qx_1-\omega t)},$$

$$\varphi^{(e)} = \frac{2\tau \operatorname{tg}\theta\, u_0 e^{-ip_0 h} e^{q(x_2-h)}}{\mu_0\left[(1+\mu_r)\operatorname{tg}\theta - i\,\overline{r}^2\right]} e^{i(qx_1-\omega t)}. \qquad (33)$$

Выражения для коэффициента отражения R и его модуля $|R|$ получаем из (32):

$$R = \frac{u_1}{u_0} = \frac{(1+\mu_r)\operatorname{tg}\theta + i\,\overline{r}^2}{(1+\mu_r)\operatorname{tg}\theta - i\,\overline{r}^2} e^{-2ip_0 h},$$

$$|R| = 1. \qquad (34)$$

Из (32) и (33), в частности, следует, что СПМК существуют при любом угле падения, за исключением случаев нормального падения ($\theta = \pi/2$) и скольжения параллельно границе ($\theta = 0$). Заметим, что случай $\theta = 0$ в задаче отражения не рассматривается, т.к. при этом коэффициент отражения $R = -1$. Поскольку коэффициент отражения R всегда комплексный и по модулю равен единице (см. (34)), то отражение магнитоупругой волны в магнитострикционных средах имеет характер полного внутреннего отражения при любом угле падения. Таким образом, наличие магнитострикционного эффекта приводит к возникновению СПМК и, как следствие, отражение магнитоупругой волны имеет характер полного внутреннего отражения.

В задачах отражения сдвиговых волн в магнитострикционных средах представляет интерес оценка величины

$$K = \left| \frac{\varphi_{\text{СПМК}}}{\varphi_{\text{ПВ}}} \right|_{S_0}, \qquad (35)$$

характеризующей усиление магнитного поля вблизи поверхности S_0 полупространства вследствие возникновения СПМК ($\varphi_{\text{СПМК}}$, $\varphi_{\text{ПВ}}$ – потенциалы СПМК и падающей волны).

В рассматриваемом случае при любых $H_0 \neq 0$ и θ ($\tau \neq 0$) справедливо соотношение

$$K = 2\left[(1+\mu_r)^2 + \frac{\overline{r}^4}{\operatorname{tg}^2\theta} \right]^{-1/2} < 1. \qquad (36)$$

Следовательно, в изотропных магнитострикционных средах вблизи поверхности не происходит усиление магнитного поля, т.е. амплитуда СПМК всегда меньше амплитуды потенциала падающей волны.

Отметим, что сопутствующие поверхностные колебания наблюдаются также у пьезомагнитных и пьезоэлектрических материалов [4, 7]. Но, в отличие от рассматриваемого случая, у некоторых кристаллов определенной магнитной структуры поле вблизи поверхности может существенно превосходить поле в объеме [4, 7].

3.2. ***Тоннелирование сдвиговой магнитоупругой волны через зазор между двумя магнитострикционными полупространствами.*** Используя результаты, полученные в **п. 3.1**, рассмотрим вопрос о возможности просачивания чисто сдвиговой объемной магнитоупругой волны через зазор между двумя одинаковыми магнитострикционными полупространствами.

Сохраняя условия предыдущей задачи, на расстоянии $2h$ от поверхности среды $x_2 = h$ поместим такую же среду, занимающую область $x_2 < -h$. Величины, отнесенные к области $x_2 > h$, будем отмечать индексом «α», индексом «e» – отнесенные к щели $-h < x_2 < h$, индексом «δ» – отнесенные к области $x_2 < -h$.

Из изложенного выше следует, что в результате распространения в среде $x_2 > h$ магнитоупругой волны в вакууме, граничащем со средой, образуется возмущенное магнитное поле. При наличии второй среды в ней также возникает переменное магнитное поле, а вследствие магнитострикционного свойства среды – и упругие деформации. Таким образом, может происходить просачивание магнитоупругой волны через вакуумную щель из одной среды в другую.

Магнитоупругие волновые процессы в магнитострикционных полупространствах будем описывать уравнениями (25) и поверхностными условиями (27), снабжая их индексом «α» при $x_2 > h$ и индексом «δ» при $x_2 < -h$. Возмущения во второй ($x_2 < -h$) среде, возникающие при просачивании, будем искать в виде сдвиговой преломленной волны

$$u^{(\delta)} = u_2 \exp\left[i(-p_0 x_2 + q x_1 - \omega t)\right],$$

$$\varphi^{(\delta)} = \frac{\tau}{\mu_0 \mu_r} u^{(\delta)} + \Phi^{(\delta)} \exp\left[q x_2 + i(q x_1 - \omega t)\right], \tag{37}$$

где u_2 – амплитуда смещения преломленной волны, $\Phi^{(\delta)}$ – амплитуда потенциала чисто магнитных СПМК. Преломленная волна распространяется под тем же углом θ, что и падающая.

Используя решение (28) для $x_2 > h$, решение (37) – для $x_2 < -h$ и решение (29) – для вакуума ($|x_2| < h$) и удовлетворяя уравнениям (25), (26) и граничным условиям (27) с соответствующими индексами, определяем все искомые величины, выраженные через u_0, p_0 и ω. В результате получаем:

– в области полупространства $x_2 > h$

$$u^{(\alpha)} = u_0\left[e^{-ip_0 x_2} + \mathrm{R} e^{ip_0(x_2 - 2h)}\right] e^{i(qx_1 - \omega t)},$$

$$\varphi^{(\alpha)} = \frac{\tau}{\mu_0 \mu_r} u^{(\alpha)} + i\, u_0 \frac{\beta(R-1)\operatorname{tg}\theta}{\mu_0 \mu_r \bar{r}^2} e^{-qx_2 + h(q - ip_0)}\, e^{i(qx_1 - \omega t)}; \tag{38}$$

– в области вакуумного слоя $|x_2| < h$

$$\varphi^{(e)} = u_0 \frac{\beta \operatorname{tg}\theta}{2\mu_0 \bar{r}^2}\left[\frac{1 - R - T}{\operatorname{sh} qh} \operatorname{ch} q x_2 + \frac{1 - R + T}{\operatorname{ch}(qh)} \operatorname{sh} q x_2 \right] e^{i(qx_1 - \omega t - p_0 h)}; \tag{39}$$

– в области полупространства $x_2 < -h$

$$u^{(\delta)} = u_0 T\, e^{-ip_0(2h + x_2)}\, e^{i(qx_1 - \omega t)},$$

$$\varphi^{(\delta)} = u_0 \frac{\tau T}{\mu_0\, \mu_r}\left[e^{-ip_0(2h + x_2)} + i \frac{\operatorname{tg}\theta}{\bar{r}^2} e^{-ip_0 h}\, e^{q(h + x_2)}\right] e^{i(qx_1 - \omega t)}. \tag{40}$$

В соотношениях (38)–(40) приняты следующие обозначения:

$$R = \frac{u_1}{u_0} e^{2ip_0h} = \frac{\operatorname{tg}^2\theta + \lambda_1\lambda_2}{(\operatorname{tg}\theta - i\lambda_1)(\operatorname{tg}\theta - i\lambda_2)},$$

$$T = \frac{u_2}{u_0} e^{2ip_0h} = \frac{\left[\operatorname{tg}\theta + i\bar{r}^2 - (\operatorname{tg}\theta - i\bar{r}^2)R\right](1 - \operatorname{th}^2 qh)}{\operatorname{tg}\theta\left[2\mu_r \operatorname{th} qh + 1 + \operatorname{th}^2 qh\right] - i\bar{r}^2\left[1 + \operatorname{th}^2 qh\right]}, \tag{41}$$

$$\lambda_1 = \frac{\bar{r}^2}{1 + \mu_r \operatorname{th} qh}, \qquad \lambda_2 = \frac{\bar{r}^2 \operatorname{th} qh}{\mu_r + \operatorname{th} qh}, \tag{42}$$

где R – коэффициент отражения, T – коэффициент преломления магнитоупругой волны.

Из соотношений (41) и (42) для модулей R и T получаем выражения

$$|R| = \frac{\operatorname{tg}^2\theta + \lambda_1\lambda_2}{\left[(\operatorname{tg}^2\theta + \lambda_1^2)(\operatorname{tg}\theta + \lambda_2^2)\right]^{1/2}},$$

$$|T| = \frac{|R|^2(\bar{r}^4 + \operatorname{tg}^2\theta) - 2(\bar{r}^4 - \operatorname{tg}^2\theta)\operatorname{Re}R - 4\bar{r}^2\operatorname{tg}\theta\operatorname{Im}R}{\left[2\mu_r \operatorname{th} qh + 1 + \operatorname{th}^2 qh\right]^2 \operatorname{tg}^2\theta + \bar{r}^4(1 + \operatorname{th}^2 qh)}(1 - \operatorname{th}^2 qh),$$

$$R = \operatorname{Re}R + i\operatorname{Im}R. \tag{43}$$

Из анализа формул (43) следует, что при фиксированной ширине зазора $2h$ минимальное значение $|R|$ и максимальное значение $|T|$ по θ на отрезке $[0, 2\pi]$ достигаются при одном и том же значении $\theta = \theta_0 =$ $= \operatorname{arctg}|\lambda_1\lambda_2|^{1/2}$ и равны

$$\min_{(\theta)}|R| = \frac{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1 + \lambda_2}, \qquad \max_{(\theta)}|T| = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \tag{44}$$

Из (42) получаем, что $\theta_0 < \pi/4$, поэтому хорошее прохождение волны происходит при малых углах падения. Хотя при нормальном падении волны, согласно (38) и (40), в обеих средах существуют СПМК, тем не менее преломленная волна, перпендикулярная к поверхности тела, распространяться не может ($T = 0$, $R = 1$). Объемная волна, распространяющаяся параллельно границе ($\theta = 0$), в рассматриваемом случае не может просачиваться через зазор во вторую среду ($T = 0$).

Из (44) вытекает, что ни при каком конечном h максимальное значение модуля коэффициента преломления не равно единице ($\max|T| \ne 1$). Следовательно, для магнитострикционных материалов полное просачивание волны невозможно, хотя уменьшением толщины (при $h \to 0$, $\theta_0 \to +0$ и $\max|T| \to 1$) можно получить достаточно хорошее прохождение волны. Расчеты показывают также, что хорошее прохождение волны имеет место при малых частотах и малой толщине щели, причем этот эффект существенно усиливается с увеличением напряженности внешнего магнитного поля.

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
2. *Багдасарян Г. Е.* Возбуждение сдвиговых поверхностных волн в полупространстве волной Рэлея // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1990. – **43**, № 2. – С. 38–43.
3. *Багдасарян Г. Е.* Математическое моделирование поведения возмущений в магнитострикционных средах // Мат. методи та фiз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 3. – С. 70–75.

4. *Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н., Саноян Л. А.* Отражение сдвиговых магнитоупругих волн от свободной границы пьезомагнитного полупространства // Механика: Межвуз. сб. науч. тр. – Ереван, 1986. – Вып. 5. – С. 105–109.
5. *Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н., Саноян Л. А.* Тоннелирование сдвиговых волн через зазор между двумя магнитострикционными полупространствами // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1989. – **42**, № 4. – С. 30–36.
6. *Багдасарян Г. Е., Даноян Э. А.* Математическое моделирование колебаний двухслойных магнитострикционных пластин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 87–94.
7. *Балакирев М. К., Гилинский И. А.* Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982. – 236 с.
8. *Берлинкур Д., Жоффе Г., Керран Д.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физ. акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – С. 204–326.
9. *Власов К. Б.* Некоторые вопросы теории упругих ферромагнитных (магнитострикционных) сред // Изв. АН СССР. Сер. физ. – 1957. – **21**, № 8. – С. 1140–1148.
10. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: В 2 т. – Киев: Наук. думка, 1986. – Т. 1. – 373 с.
11. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. – М.: Гостехтеоретиздат, 1948. – 212 с.
12. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.* Магнитотермоупругость электропроводящих тел. – Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.
13. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды: В 2 т. – М.: Наука, 1983. – Т. 1. – 528 с.
14. *Сыркин Л. Н.* Пьезомагнитная керамика. – Л.: Энергия, 1980. – 205 с.
15. *Bagdasarian G. E., Danoyan Z. N., Sanoyan L. A.* Magnetoelastic waves in piezomagnetic media // Proc. IUTAM Symp. – Tokyo, 1986. – P. 323–328.
16. *Bagdasarian G. E., Danoyan Z. N., Sanoyan L. A.* Surface magnetoelastic waves in the piezomagnetic medium // Proc. Int. Symp. Surface Waves. – Novosibirsk, 1986. – Vol. 2. – P. 273–276.
17. *Brown W. F.* Magnetoelastic interactions. – Berlin: Springer, 1966. – 155 p.
18. *Pao Y.-H., Yeh C.-S.* A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids // Int. J. Eng. Sci. – 1973. – **11**. – P. 415–436.
19. *Tiersten H. F.* Coupled magnetomechanical equations for magnetically saturated insulators // J. Math. Phys. – 1964. – **5**, No. 9. – P. 1298–1318.

ПОВЕРХНЕВІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ В МАГНІТОАКТИВНОМУ СЕРЕДОВИЩІ, ЗУМОВЛЕНІ МАГНІТОПРУЖНИМИ ВЗАЄМОДІЯМИ

З використанням знайдених розв'язків конкретних двовимірних задач хвильової динаміки, отриманих на основі нелінійних рівнянь і граничних умов теорії магнітопружності феромагнітних тіл і відповідних лінеаризованих рівнянь і поверхневих умов, що описують поведінку малих збурень у непровідному магнітоактивному пружному середовищі, досліджуються можливості збурення і поширення нових типів поверхневих коливань і хвиль у вказаних середовищах, які зумовлені магнітоактивними (особливо – *магнітострикційними*) *властивостями середовища та його взаємодією із зовнішнім магнітним полем.*

SURFACE VIBRATIONS AND WAVES IN MAGNETOACTIVE MEDIUM CONDITIONED BY MAGNETOELASTIC INTERACTIONS

The linearized equations and surface conditions characterizing the behavior of disturbances in non-conductive magnetoactive elastic medium are obtained in the work [3] *by the method of linearization* [1, 10, 11, 18], *and using non-linear equations and boundary conditions of the magnetoelasticity theory of ferromagnetic bodies* [1, 9, 12, 13, 17–19]. *Here on the basis of the addressed in the work* [3] *linear boundary-value problem, using the results of the works* [2–7, 15, 16], *and using the solutions to concrete two-dimensional problems of wave dynamics, the possibility of generation and propagation of new type surface vibrations and waves in the above-mentioned medium, conditioned by magnetoactive* (*particularly magnetostrictive*) *properties of the medium and its interaction with the external magnetic fields, are investigated.*

Ереван. гос. ун-т, Ереван, Армения

Получено
24.04.03