УДК 539.3

А. Ф. Улітко

УЗАГАЛЬНЕНА КРАЙОВА ЗАДАЧА РІМАНА, ЩО ВИНИКАЄ ПРИ РОЗГЛЯДІ СТОКСОВОЇ ТЕЧІЇ В ОКОЛІ ПІВСФЕРИ, ТА ЇЇ РОЗВ'ЯЗОК

Отримано точний розв'язок задачі стоксової течії в околі півсфери. Показано, що розв'язок цієї задачі зводиться до побудови розв'язку узагальненої задачі Рімана теорії аналітичних функцій. Розв'язок задачі знайдено у замкненому вигляді. Це дозволило записати у явному вигляді функції тиску та функції вихору, які задовольняють систему узагальнених рівнянь типу Коші – Рімана.

Вступ. Розглянемо осесиметричну задачу Стокса про обтікання жорсткої півсфери (рис. 1) рівномірним потоком в'язкої рідини у від'ємному напрямку осі Oz зі швидкістю $v_z^\infty = -V_0,\ V_0 > 0$. Задача зводиться до інтегрування рівнянь Стокса [11]

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} = -\frac{1}{\mu}\operatorname{grad} p, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\,, \tag{1}$$

при граничній умові на повній поверхні півсфери S (умові «прилипання»)

$$\mathbf{v}\big|_S = V_0\,, \tag{2}$$

де $\mathbf{v}$ – швидкість руху частинок рідини; μ – зсувна в'язкість; p – локальний тиск у рідині. Таким чином, мова йде про розв'язання досить складної зовнішньої векторної задачі Діріхле для півсфери. Автору невідомі точні розв'язки такого типу зовнішніх векторних задач.

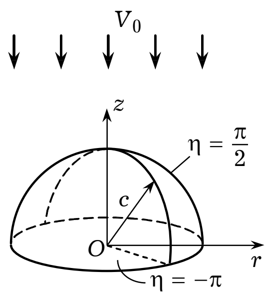

Рис. 1

У роботах ряду авторів [12, 14, 15] розглядається спрощена постановка задачі (1), (2), де вилучено з розв'язку функцію тиску p.

Позначаючи через $\mathbf{e}_\varphi$ одиничний вектор колової координати φ (у циліндричних координатах r, z, φ) та використовуючи підстановку

$$\mathbf{v} = -\operatorname{rot}(\mathbf{e}_\varphi \Psi)\,, \tag{3}$$

тотожно задовольняють друге з рівнянь (1). Застосувавши потім операцію $\operatorname{rot}(\cdot)$ до першого з рівнянь (1), з урахуванням (3) для функції Ψ отримують рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{\Psi}{r^2}\right) = 0\,. \tag{4}$$

Введена тут функція Ψ відрізняється від загальноприйнятої функції течії Стокса $\Psi^{(c)}$ множником $1/r$ ($\Psi = \frac{1}{r}\Psi^{(c)}$). Граничні умови для функції Ψ згідно з (2) запишуться так:

$$v_r\big|_S = \frac{\partial\Psi}{\partial z}\bigg|_S = 0, \qquad v_z\big|_S = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi)\bigg|_S = V_0\,. \tag{5}$$

У такій постановці в роботі [15] подано точний завершений розв'язок задачі для сферичної лінзи, частковим випадком якого є, звичайно, і задача для півсфери. При цьому використовувались тороїдальні координати ξ, η [3]

$$r = c\frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}, \quad z = c\frac{\sin\eta}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}, \quad 0 \le \xi < \infty, \ \ -\pi \le \eta \le \pi, \tag{6}$$

де c − метричний параметр системи координат, який співпадає з радіусом сфери. Доцільність використання циклідних координат у задачах механіки випливає з робіт ряду авторів [4, 9]. Функцію течії $\Psi(\xi, \eta)$ визначали за допомогою класичного інтегрального перетворення Мелера − Фока [9, 10, 13]. Було знайдено розподіл швидкості частинок $\mathbf{v}(\xi, \eta)$ в околі лінзи, силу опору F і вихрову складову течії ω:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_\varphi \omega = \operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\Psi}{r^2} \right). \tag{7}$$

Питання про визначення розподілу тиску p у рідині та компонент тензора напружень не розглядалось.

Нижче наведено точний розв'язок граничної задачі (1), (2) для півсферичної лінзи. Як і вище, тотожно задовольняємо друге рівняння (1) за допомогою представлення (3), а загальний розв'язок рівняння (4) подаємо через дві гармонічні функції Φ, P:

$$\Psi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + z\frac{\partial P}{\partial r}, \qquad \nabla^2 \Phi = 0, \qquad \nabla^2 P = 0. \tag{8}$$

При цьому вихор швидкості течії ω обчислюємо за формулою (7) і визначаємо лише через гармонічну функцію P:

$$\omega = 2\frac{\partial^2 P}{\partial r \partial z}. \tag{9}$$

Вводячи тимчасово функцію тиску $\theta = p/\mu$, з першого рівняння (1) отримуємо

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega) = -\frac{\partial \theta}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial r}. \tag{10}$$

Цією системою рівнянь типу Коші − Рімана визначаються узагальнені аналітичні функції [5, 6]. Оскільки функція ω є відомою з розв'язання спрощеної задачі (4), (5), то відомою буде згідно з (9) і друга мішана похідна від функції P. Ліві частини в системі (10) є відомими. Необхідно відшукати функцію тиску θ, тобто побудувати інтеграл Шварца для узагальненої аналітичної функції $\theta + i\omega$. По суті, наступний виклад присвячено цій проблемі. Перш за все, легко пересвідчитись, що рівняння (10) виконуються тотожно, якщо θ подати через другу похідну від гармонічної функції P:

$$\theta = \frac{p}{\mu} = 2\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}. \tag{11}$$

Таким чином, з рівняння (9) необхідно відшукати $\partial P/\partial z$ і потім за формулою (11) визначити розподіл тиску p у рідині.

1. Побудова спрощеного розв'язку. Явний вираз для функції течії Ψ знаходимо за формулою (8), використовуючи для цього виведені автором формули комплексного перетворення Мелера − Фока [8, § 7]. Для похідних за r від гармонічних функцій Φ і P беремо зображення

$$c\frac{\partial P}{\partial r} = \sqrt{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta} \cdot \frac{1}{\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mu\left[a(\mu)\cos\mu\eta + b(\mu)\sin\mu\eta\right] Q^{(1)}_{-\frac{1}{2}+\mu}(\operatorname{ch}\xi)\, d\mu,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \sqrt{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta} \cdot \frac{1}{\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mu\left[c(\mu)\cos\mu\eta + d(\mu)\sin\mu\eta\right] Q^{(1)}_{-\frac{1}{2}+\mu}(\operatorname{ch}\xi)\, d\mu. \tag{12}$$

Аналітичні функції $a(\mu)$, $b(\mu)$, $c(\mu)$ і $d(\mu)$ у деякій смузі, що включає уявну вісь площини μ, $|\operatorname{Re}\mu| < c$, повинні задовольняти умови парності

$$a(-\mu) = a(\mu), \quad b(-\mu) = -\,b(\mu), \quad c(-\mu) = c(\mu), \quad d(-\mu) = -\,d(\mu).$$

При виході на уявну вісь ($\mu = i\tau$), формули (12) перетворюються у формули класичного розвинення Мелера – Фока

$$c\,\frac{\partial P}{\partial r} = \sqrt{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}\int_0^\infty \tau\,\operatorname{th}\pi\tau\left[\hat{a}(\tau)\operatorname{ch}\tau\eta + \hat{b}(\tau)\operatorname{sh}\tau\eta\right]P^{(1)}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\xi)\,d\tau,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \sqrt{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}\int_0^\infty \tau\,\operatorname{th}\pi\tau\left[\hat{c}(\tau)\operatorname{ch}\tau\eta + \hat{d}(\tau)\operatorname{sh}\tau\eta\right]P^{(1)}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\xi)\,d\tau, \qquad (13)$$

де позначено

$$\hat{a}(\tau) = a(i\tau), \quad \hat{b}(\tau) = ib(i\tau), \quad \hat{c}(\tau) = c(i\tau), \quad \hat{d}(\tau) = id(i\tau). \qquad (14)$$

Функції $\hat{a}(\tau)$ і $\hat{c}(\tau)$ – дійсні та парні за τ, а дійсні функції $\hat{b}(\tau)$ і $\hat{d}(\tau)$ – непарні за τ.

Після підстановки розвинень (12) у формулу (8) і перетворення контурів інтегрування у смузі регулярності підінтегральних аналітичних функцій отримуємо вираз

$$\Psi(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\,\frac{\Psi^*(\xi,\eta)}{\sqrt{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}}, \qquad (15)$$

де

$$\Psi^*(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\Big[\,A(\mu)\sin(\mu-1)\eta + B(\mu)\cos(\mu-1)\eta +$$

$$+\,C(\mu)\sin(\mu+1)\eta + D(\mu)\cos(\mu+1)\eta\,\Big]Q^{(1)}_{-\frac{1}{2}+\mu}(\operatorname{ch}\xi)\,d\mu. \qquad (16)$$

Нові аналітичні функції $A(\mu)$, $B(\mu)$, $C(\mu)$ і $D(\mu)$ введено за формулами

$$A(\mu) = \left(\mu - \frac{3}{2}\right)d(\mu-1) - \mu\,d(\mu) - \mu\,a(\mu),$$

$$B(\mu) = \left(\mu - \frac{3}{2}\right)c(\mu-1) - \mu\,c(\mu) + \mu\,b(\mu),$$

$$C(\mu) = \left(\mu + \frac{3}{2}\right)\,d(\mu+1) - \mu\,d(\mu) + \mu\,a(\mu),$$

$$D(\mu) = \left(\mu - \frac{3}{2}\right)c(\mu+1) - \mu\,c(\mu) - \mu\,b(\mu). \qquad (17)$$

Класичний інтеграл Мелера – Фока ($\mu = i\tau$) для Ψ^* записується так:

$$\Psi^*(\xi,\eta) = \int_0^\infty \operatorname{th}\pi\tau\Big[\,\hat{A}(\tau)\operatorname{sh}\tau\eta\cos\eta + \hat{B}(\tau)\operatorname{ch}\tau\eta\cos\eta +$$

$$+\,\hat{C}(\tau)\operatorname{ch}\tau\eta\sin\eta + \hat{D}(\tau)\operatorname{sh}\tau\eta\sin\eta\,\Big]P^{(1)}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\xi)\,d\tau. \qquad (18)$$

Тут позначено

$$\hat{A}(\tau) = A(i\tau) + C(i\tau) = A(i\tau) + A(-i\tau) = 2\operatorname{Re}A(i\tau),$$

$$\hat{B}(\tau) = -\,i\left[B(i\tau) + D(i\tau)\right] = -\,i\left[B(i\tau) - B(-i\tau)\right] = 2\operatorname{Im}B(i\tau),$$

$$\widehat{C}(\tau) = i\big[A(i\tau) - C(i\tau)\big] = i\big[A(i\tau) - A(-i\tau)\big] = -\,2\,\mathrm{Im}\,A(i\tau)\,,$$

$$\widehat{D}(\tau) = B(i\tau) - D(i\tau) = B(i\tau) + B(-i\tau) = 2\,\mathrm{Re}\,B(i\tau)\,. \tag{19}$$

Вираз для введеної нами функції течії (15) з урахуванням (18) співпадає (з точністю до множника $1/r$) з функцією течії Стокса, яка наведена в роботі [15]. На жаль, за допомогою цієї функції не можна задовольнити граничні умови (5), оскільки стала V_0 не може бути подана у вигляді інтеграла Мелера – Фока. Тому в роботі [15] була введена додатково функція течії від «зосередженої сили», яка розміщена на осі обертання у деякій внутрішній точці лінзи і напрямлена вздовж осі Oz. Так побудований сумарний розв'язок дозволив авторам роботи [15] подати завершений розв'язок спрощеної задачі Стокса (4), (5) для довільної лінзи. Спроба автора використати особливий розв'язок для «зосередженої сили» при побудові точного розв'язку повної задачі Стокса (1), (2) виявилась невдалою. Справа в тому, що вже для функції вихору $\omega(\xi,\eta)$ неможливо записати інтеграл Мелера – Фока типу (18) зі значеннями аналітичних щільностей на уявній осі. У розв'язок, як видно з подальшого, входять і значення щільностей при $\mathrm{Re}\,\mu = \pm 1$. А як відомо з теорії комплексного перетворення Мелера – Фока [8], розширення смуги регулярності вимагає більш швидкого спадання функцій у граничних умовах (для смуги $|\,\mathrm{Re}\,\mu\,| \le 1$ – як $e^{-2\xi}$ при $\xi \to \infty$, тобто в околі кутових точок границі $r = c$, $z = 0$). Цій умові не відповідає особливий розв'язок для «зосередженої сили». У роботі за особливий розв'язок вибрано розв'язок для жорсткого диска радіуса $r = c$.

На підставі формули (7) для функції вихору $\omega(\xi,\eta)$ і з урахуванням рівностей (15), (16) знаходимо

$$\omega(\xi,\eta) = \frac{1}{c^2}\sqrt{\mathrm{ch}\xi - \cos\eta}\cdot\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\left\{\left[\left(\mu + \frac{3}{2}\right)A(\mu+1) - (\mu-1)A(\mu) + \right.\right.$$
$$+ (\mu+1)C(\mu) - \left(\mu - \frac{3}{2}\right)C(\mu-1)\Bigg]\sin\mu\eta + \left[\left(\mu + \frac{3}{2}\right)B(\mu+1) - (\mu-1)B(\mu) + \right.$$
$$\left.\left. + (\mu+1)D(\mu) - \left(\mu - \frac{3}{2}\right)D(\mu-1)\right]\cos\mu\eta\right\}Q^{(1)}_{-\frac{1}{2}+\mu}(\mathrm{ch}\xi)\,d\mu\,. \tag{20}$$

Підстановкою $\mu = i\tau$ цей розклад перетворюємо до класичного інтеграла Мелера – Фока

$$\omega(\xi,\eta) = \frac{1}{c^2}\sqrt{\mathrm{ch}\xi - \cos\eta}\int\limits_0^{\infty}\mathrm{th}\pi\tau\left\{\left[\frac{3}{2}\widehat{A}(1,\tau) + \right.\right.$$
$$+ \widehat{A}(\tau) - \tau\,\widehat{C}(\tau) + \tau\,\widehat{C}(1,\tau)\Bigg]\mathrm{sh}\tau\eta + \left[\frac{3}{2}\widehat{B}(1,\tau) + \widehat{B}(\tau) - \right.$$
$$\left.\left. - \tau\widehat{D}(\tau) + \tau\widehat{D}(1,\tau)\right]\mathrm{ch}\tau\eta\right\}P^{(1)}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\mathrm{ch}\xi)\,d\tau\,. \tag{21}$$

Підінтегральні щільності на прямій $\mathrm{Re}\,\mu = 1$ за аналогією з (19) обчислюються так:

$$\widehat{A}(1,\tau) = 2\,\mathrm{Re}\,A(1+i\tau), \qquad \widehat{B}(1,\tau) = 2\,\mathrm{Im}\,B(1+i\tau)\,,$$

$$\widehat{C}(1,\tau) = -2\,\mathrm{Im}\,A(1+i\tau), \qquad \widehat{D}(1,\tau) = 2\,\mathrm{Re}\,B(1+i\tau)\,. \tag{22}$$

Зазначимо, що в роботі [15] наведено явний вираз лише для щільностей на уявній осі, тобто для $\widehat{A}(\tau)$, $\widehat{B}(\tau)$, $\widehat{C}(\tau)$ і $\widehat{D}(\tau)$.

2. Точний розв'язок спрощеної задачі Стокса для півсфери. Доповнимо загальний розв'язок для функції течії (15), (16) особливим розв'язком для кругового диска радіуса $r = c$. Розв'язок для кругового диска визначаємо, використовуючи зображення (8) і покладаючи

$$\Phi = \Phi_0, \qquad P = -\,\partial\Phi_0/\partial r\,. \tag{23}$$

Проводячи обчислення у тороїдальних координатах, отримуємо

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial r} = -\frac{1}{\pi}cV_0\left\{\frac{\sin\eta}{\mathrm{sh}\xi}\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\xi-\cos\eta}{1-\cos\eta}}\left[1-\sqrt{\frac{1-\cos\eta}{\mathrm{ch}\xi-\cos\eta}}\,\right]^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{sh}\xi}{\mathrm{ch}\xi-\cos\eta}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\xi-\cos\eta}{1+\cos\eta}}\right\}. \tag{24}$$

При цьому функцію тиску $p^{(\text{ос})}$ і вихрову функція $\omega^{(\text{ос})}$ розраховуємо за формулами

$$\frac{p^{(\text{ос})}}{\mu} = \frac{2}{\pi}\frac{V_0}{c}\sqrt{1-\cos\eta}\cdot\sqrt{\mathrm{ch}\xi-\cos\eta}\,,$$

$$\omega^{(\text{ос})} = \frac{2}{\pi}\frac{V_0}{c}\frac{\sin\eta}{\mathrm{sh}\xi}(\mathrm{ch}\xi-1)\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\xi-\cos\eta}{1-\cos\eta}}\,. \tag{25}$$

Функцію течії $\Psi^{(\text{ос})}$ записуємо так:

$$\Psi^{(\text{ос})} = -\frac{1}{\pi}cV_0\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\xi-\cos\eta}}\left[\sqrt{2}\,\mathrm{th}\frac{\xi}{2}\cos\frac{\eta}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{sh}\xi}{\sqrt{\mathrm{ch}\xi-\cos\eta}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\xi-\cos\eta}{1+\cos\eta}}\,\right]. \tag{26}$$

Повний розв'язок для функції течії $\Psi^{(\text{пов})}$ подається рівністю

$$\Psi^{(\text{пов})} = \Psi + \Psi^{(\text{ос})} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\xi-\cos\eta}}\left\{\Psi^*(\xi,\eta)-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}cV_0\left[\sqrt{2}\,\mathrm{th}\frac{\xi}{2}\cos\frac{\eta}{2}+\frac{\mathrm{sh}\xi}{\sqrt{\mathrm{ch}\xi-\cos\eta}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\xi-\cos\eta}{1+\cos\eta}}\,\right]\right\}. \tag{27}$$

Граничні умови для функції $\Psi^*(\xi,\eta)$, поданої формулою (16), виводимо з граничних умов для перетворених до тороїдальних координат рівностей (5) відносно повної функції течії $\Psi^{(\text{пов})}$. Після відповідних перетворень граничні умови для Ψ^* у випадку півсферичної лінзи ($\eta_1 = \pi/2,\ \eta_2 = -\pi$,) записуються так:

$$\Psi^*\Big|_{\eta=-\pi} = 0, \qquad \frac{\partial\Psi^*}{\partial\eta}\Big|_{\eta=-\pi} = 0\,,$$

$$\Psi^*\Big|_{\eta=\frac{\pi}{2}} = F(\xi), \qquad \frac{\partial\Psi^*}{\partial\eta}\Big|_{\eta=\frac{\pi}{2}} = 2G(\xi)\,, \tag{28}$$

де позначено

$$F(\xi) = \frac{2}{\pi}cV_0\left[\mathrm{th}\frac{\xi}{2}-\frac{\mathrm{sh}\xi}{\sqrt{\mathrm{ch}\xi}}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\xi}}\right],$$

$$G(\xi) = \frac{1}{\pi}cV_0\left[\frac{1}{\mathrm{ch}\xi}\,\mathrm{th}\frac{\xi}{2}+\frac{\mathrm{th}\xi}{\sqrt{\mathrm{ch}\xi}}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\xi}}\right]. \tag{29}$$

Швидкість спадання цих функцій на нескінченності ($\xi \to \infty$) буде $\sim e^{-\xi}$ (для особливого розв'язку «зосередженої сили» $\sim e^{-\xi/2}$), що визначає смугу регулярності підінтегральних функцій в (18) у проміжку $|\operatorname{Re}\mu| < 1/2$. Щоб розширити смугу регулярності до значень $\operatorname{Re}\mu = \pm 1$, поступаємо наступним чином. Після підстановки в граничні рівності (28) для вказаних значень η виразу для Ψ^* із (16) отримуємо систему чотирьох функціональних рівнянь відносно $A(\mu)$, $B(\mu)$, $C(\mu)$ і $D(\mu)$. До лівих і правих частин цих рівнянь застосовуємо оператор $\dfrac{1}{\operatorname{sh}\xi}\dfrac{d}{d\xi}\operatorname{sh}\xi\,(\cdot)$ і використовуємо рівняння для функцій Лежандра [1]

$$\frac{1}{\operatorname{sh}\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\operatorname{sh}\xi\, Q^{(1)}_{-\frac{1}{2}+\mu}(\operatorname{ch}\xi)\right] = \left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right) Q_{-\frac{1}{2}+\mu}(\operatorname{ch}\xi)\,. \tag{30}$$

Функції у правих частинах рівностей (28) допускають таке перетворення. Виконавши обернене перетворення Мелера – Фока отриманих функціональних рівностей, маємо систему алгебричних рівнянь

$$-\tilde{C}(\mu) + \tilde{D}(\mu)\operatorname{tg}\frac{\pi\mu}{2} = \frac{f(\mu)}{\cos\frac{\pi\mu}{2}}\,,$$

$$\left[\mu\tilde{C}(\mu) - \tilde{A}(\mu)\right]\operatorname{tg}\frac{\pi\mu}{2} + \mu\tilde{D}(\mu) - \tilde{B}(\mu) = \frac{g(\mu)}{\cos\frac{\pi\mu}{2}}\,,$$

$$\tilde{A}(\mu)\operatorname{tg}\pi\mu - \tilde{B}(\mu) = 0, \qquad \mu\tilde{A}(\mu) - \tilde{C}(\mu) + \left[\mu\tilde{B}(\mu) - \tilde{D}(\mu)\right]\operatorname{tg}\pi\mu = 0\,, \tag{31}$$

де через $\tilde{A}(\mu)$, $\tilde{B}(\mu)$, $\tilde{C}(\mu)$, $\tilde{D}(\mu)$ позначено вирази

$$\tilde{A}(\mu) = A(\mu) + C(\mu), \qquad \tilde{B}(\mu) = B(\mu) + D(\mu)\,,$$

$$\tilde{C}(\mu) = A(\mu) - C(\mu), \qquad \tilde{D}(\mu) = B(\mu) - D(\mu)\,, \tag{32}$$

а через $f(\mu)$ і $g(\mu)$ – аналітичні функції

$$f(\mu) = \frac{\mu}{\mu^2 - \frac{1}{4}}\int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{sh}\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\operatorname{sh}\xi\, F(\xi)\right] P_{-\frac{1}{2}+\mu}(\operatorname{ch}\xi)\operatorname{sh}\xi\, d\xi\,,$$

$$g(\mu) = \frac{\mu}{\mu^2 - \frac{1}{4}}\int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{sh}\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\operatorname{sh}\xi\, G(\xi)\right] P_{-\frac{1}{2}+\mu}(\operatorname{ch}\xi)\operatorname{sh}\xi\, d\xi \tag{33}$$

з простими полюсами в точках $\mu = \pm 1/2$.

Розв'язок алгебричних рівнянь (31) подається формулами

$$\tilde{A}(\mu) = \frac{1}{2}\frac{\cos\pi\mu}{\Delta(\mu)}\left[\frac{\mu f(\mu)}{\cos\frac{\pi\mu}{2}}(\cos 2\pi\mu + \cos\pi\mu) + \frac{g(\mu)}{\sin\frac{\pi\mu}{2}}(\cos 2\pi\mu - \cos\pi\mu)\right],$$

$$\tilde{D}(\mu) = \frac{1}{\Delta(\mu)}\left[f(\mu)\left(\sin\frac{3\pi\mu}{2}\cos\pi\mu - \mu^2\sin\frac{\pi\mu}{2}\right) - \mu g(\mu)\cos\frac{\pi\mu}{2}\right],$$

$$\tilde{B}(\mu) = \operatorname{tg}\pi\mu\,\tilde{A}(\mu), \qquad \tilde{C}(\mu) = \operatorname{tg}\frac{\pi\mu}{2}\tilde{D}(\mu) - \frac{f(\mu)}{\cos\frac{\pi\mu}{2}}\,,$$

$$\Delta(\mu) = \sin^2\frac{3\pi\mu}{2} - \mu^2\,. \tag{34}$$

Інтеграли в правих частинах (33) обчислюються у замкненому вигляді, якщо скористатися розвиненнями

$$\frac{1}{\operatorname{sh}\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\operatorname{sh}\xi\, F(\xi)\right] = \frac{2}{\pi}cV_0\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{(\operatorname{ch}\xi)^{n+1}},$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh}\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\operatorname{sh}\xi\, G(\xi)\right] = \frac{1}{\pi}cV_0\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{1}{(\operatorname{ch}\xi)^{n+1}} \qquad (35)$$

і значеннями відповідних інтегралів від добутку елементарних функцій на функції Лежандра $P_{-\frac{1}{2}+\mu}(\operatorname{ch}\xi)$ [7].

В результаті отримуємо такі значення аналітичних функцій $f(\mu)$ і $g(\mu)$ на контурі $\mu = 1 + i\tau,\ -\infty < \tau < \infty$:

$$f(1+i\tau) = -\sqrt{2}\,cV_0\cdot\frac{1+i\tau}{2+i\tau}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\tau}{2}}{\tau\operatorname{ch}\pi\tau},\quad g(1+i\tau) = \sqrt{2}\,cV_0\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi\tau}{2}}{\operatorname{ch}\pi\tau}, \qquad (36)$$

і на уявній осі $\mu = i\tau,\ -\infty < \tau < \infty$:

$$f(i\tau) = i\sqrt{2}\,cV_0\cdot\frac{\tau}{\tau^2+1}\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi\tau}{2}}{\operatorname{ch}\pi\tau},\qquad g(i\tau) = -i\sqrt{2}\,cV_0\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\tau}{2}}{\operatorname{ch}\pi\tau}. \qquad (37)$$

Комплексні значення щільностей $\tilde{A}(\mu),\ldots,\tilde{D}(\mu)$ на прямій $\mu = 1 + i\tau$ і на уявній осі $\mu = i\tau$ знаходимо, підставивши наведені вище функції у рівності (34). Елементарними перетвореннями отримуємо

$$\tilde{A}(i\tau) = \hat{A}(\tau),\qquad \tilde{B}(i\tau) = i\hat{B}(\tau),\qquad \tilde{C}(i\tau) = -i\hat{C}(\tau),\qquad \tilde{D}(i\tau) = \hat{D}(\tau);$$

$$\operatorname{Re}\left[\tilde{A}(1+i\tau)+\tilde{C}(1+i\tau)\right] = \hat{A}(1,\tau),\qquad \operatorname{Im}\left[\tilde{B}(1+i\tau)+\tilde{D}(1+i\tau)\right] = \hat{B}(1,\tau),$$

$$\operatorname{Im}\left[\tilde{A}(1+i\tau)+\tilde{C}(1+i\tau)\right] = -\hat{C}(1,\tau),\quad \operatorname{Re}\left[\tilde{B}(1+i\tau)+\tilde{D}(1+i\tau)\right] = \hat{D}(1,\tau). \quad (38)$$

В результаті маємо завершений розв'язок спрощеної задачі Стокса для півсфери. Функція течії $\Psi^*(\xi,\eta)$ і вихрова функція $\omega(\xi,\eta)$ подаються формулами (18) і (21), до яких необхідно додати особливі складові загального розв'язку (25) і (26).

3. Проблема Рімана, яка виникає при визначенні функції тиску *p*. Як зазначалось вище, визначення функції тиску $\theta(\xi,\eta)$ $(p = \mu\theta)$ базується на розв'язанні системи рівнянь типу Коші – Рімана (10). Загальний розв'язок цих рівнянь згідно з (9) і (11) записуємо через гармонічну функцію P. Причому функція локального тиску в рідині p може бути подана у вигляді

$$\frac{p}{2\mu} = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right). \qquad (39)$$

Щоб скористатися цією формулою, необхідно знайти або похідну $\partial P/\partial z$, або похідну $\partial P/\partial r$. Оскільки першою з формул (12) подано загальний розв'язок для $\partial P/\partial r$ з невідомими щільностями $a(\mu)$ і $b(\mu)$, то задача зводиться до знаходження цих аналітичних функцій. Для визначення аналітичних функцій використовуємо формулу (9) з відомим значенням вихрової функції $\omega(\xi,\eta)$. Простими обчисленнями знаходимо

$$c^2\omega(\xi,\eta) = 2c^2\frac{\partial^2 P}{\partial r\partial z} =$$

$$= -\sqrt{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta} \cdot \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \left\{ \left[(\mu+1)\left(\mu+\frac{3}{2}\right)a(\mu+1) - 2\mu^2 a(\mu) + \right.\right.$$

$$\left. + (\mu-1)\left(\mu-\frac{3}{2}\right)a(\mu-1)\right]\sin\mu\eta - \left[(\mu+1)\left(\mu+\frac{3}{2}\right)b(\mu+1) - 2\mu^2 b(\mu) + \right.$$

$$\left.\left. + (\mu-1)\left(\mu-\frac{3}{2}\right)b(\mu-1)\right]\cos\mu\eta \right\} Q^{(1)}_{-\frac{1}{2}+\mu}(\operatorname{ch}\xi)\, d\mu \,. \qquad (40)$$

Прирівнюючи цей вираз до раніше знайденого значення $\omega(\xi,\eta)$ за формулою (20), отримуємо систему функціональних рівнянь відносно аналітичних функцій $a(\mu)$ і $b(\mu)$:

$$(\mu+1)\left(\mu+\frac{3}{2}\right)a(\mu+1) - 2\,\mu^2 a(\mu) + (\mu-1)\left(\mu-\frac{3}{2}\right)a(\mu-1) = \alpha(\mu)\,,$$

$$(\mu+1)\left(\mu+\frac{3}{2}\right)b(\mu+1) - 2\,\mu^2 b(\mu) + (\mu-1)\left(\mu-\frac{3}{2}\right)b(\mu-1) = \beta(\mu)\,, \qquad (41)$$

де

$$\alpha(\mu) = -\left[\left(\mu+\frac{3}{2}\right)A(\mu+1) - (\mu-1)A(\mu) + (\mu+1)C(\mu) - \left(\mu-\frac{3}{2}\right)C(\mu-1)\right],$$

$$\beta(\mu) = \left(\mu+\frac{3}{2}\right)B(\mu+1) - (\mu-1)B(\mu) + (\mu+1)D(\mu) - \left(\mu-\frac{3}{2}\right)D(\mu-1) \qquad (42)$$

– відомі аналітичні функції з умовами парності $\alpha(-\mu) = \alpha(\mu)$, $\beta(-\mu) = -\beta(\mu)$. Однотипні функціональні рівняння (41) автор роботи вважає за доцільне назвати *узагальненою крайовою задачею Рімана.* Своєрідність цієї задачі полягає у тому, що аналітична функція визначається з рівняння, у якому пов’язані її значення на трьох контурах в області регулярності (в нашому випадку на уявній осі $\mu = i\tau$ та на прямих $\operatorname{Re}\mu = \pm 1$). Напевне, в загальному випадку ця крайова задача не має розв’язку, але з урахуванням умов парності для шуканих функцій $a(\mu)$ і $b(\mu)$ при відповідних умовах парності для правих частин має єдиний обмежений на нескінченності ($|\mu| \to \infty$, $|\operatorname{Re}\mu| \le 1$) розв’язок. Тому, мабуть, недоцільно перетворювати сформульовану крайову задачу до відомої крайової задачі Карлемана зі зсувом [2].

Докладно розпишемо розв’язок першого рівняння (41). Введемо нову аналітичну функцію $\tilde a(\mu) = \mu a(\mu)$ і відносно неї запишемо рівняння Рімана у вигляді

$$\left(\mu+\frac{3}{2}\right)\left(\, \tilde a(\mu+1) - \tilde a(\mu)\,\right) - \left(\mu-\frac{3}{2}\right)\left(\, \tilde a(\mu) - \tilde a(\mu-1)\right) = \alpha(\mu). \qquad (43)$$

Різниці аналітичних функцій на різних контурах (фактично − на уявній осі та границі смуги аналітичності) також є аналітичними функціями. Подамо їх через аналітичну функцію $\varphi(\mu)$, яка змінюється у смузі $-1/2 \le \operatorname{Re}\mu \le$ $\le -1/2$, згідно з рівностями

$$\tilde a(\mu+1) - \tilde a(\mu) = \varphi\left(\mu+\frac{1}{2}\right), \qquad \tilde a(\mu) - \tilde a(\mu-1) = \varphi\left(\mu-\frac{1}{2}\right). \qquad (44)$$

Функція $\alpha(\mu)$ у правій частині (43) є парною функцією аргументу, а функція $\tilde a(\mu) = \mu a(\mu)$ − непарною функцією за μ. Тоді з (44) випливає умова парності функції $\varphi(\mu)$:

$$\varphi\left(\mu-\frac{1}{2}\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}-\mu\right). \qquad (45)$$

Рівняння (43) перетворюється у функціональне рівняння

$$\left(\mu+\frac{3}{2}\right)\,\varphi\left(\mu+\frac{1}{2}\right)-\left(\mu-\frac{3}{2}\right)\varphi\left(\frac{1}{2}-\mu\right)=\alpha(\mu)\,. \tag{46}$$

Щоб уникнути розв'язання крайової задачі Гільберта [2], проведемо регуляризацію рівняння (46), вводячи нову аналітичну функцію $\varphi^*(z)$ за формулою

$$\varphi(z)=\frac{\varphi^*(z)}{z(1+z)(1-z)}\,,\qquad \varphi^*(-z)=-\,\varphi^*(z)\,. \tag{47}$$

Відносно $\varphi^*(z)$ маємо рівняння

$$\varphi^*\left(\mu+\frac{1}{2}\right)+\varphi^*\left(\frac{1}{2}-\mu\right)=-\left(\mu^2-\frac{1}{4}\right)\alpha(\mu)\,, \tag{48}$$

яке на уявній осі $\mu=i\tau$ перетворюється у рівність

$$\varphi^*\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)+\varphi^*\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)=2\,\mathrm{Re}\,\varphi^*\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)=\left(\tau^2+\frac{1}{4}\right)\alpha(i\tau)\,. \tag{49}$$

Це є задача Діріхле для дійсної частини аналітичної функції φ^* у смузі $|\,\mathrm{Re}\,\mu\,|\le 1/2$. Оскільки вона є непарною, то явний вираз для неї подається у вигляді інтегралів Фур'є:

$$\begin{aligned}\varphi^*(z)&=\varphi^*(\sigma+i\tau)=u(\sigma,\tau)+iv(\sigma,\tau)=\\&=\int_0^\infty\gamma(\lambda)\mathrm{sh}\,\lambda\sigma\cdot\cos\lambda\tau\,d\lambda+i\int_0^\infty\gamma(\lambda)\mathrm{ch}\,\lambda\sigma\cdot\sin\lambda\tau\,d\lambda\,,\end{aligned} \tag{50}$$

де

$$\gamma(\lambda)=\frac{1}{\mathrm{sh}\,\frac{\lambda}{2}}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\widehat{\alpha}(x)\cos\lambda x\,dx,\qquad \widehat{\alpha}(\tau)=\alpha(i\tau)\,. \tag{51}$$

Зазначимо, що на межі смуги регулярності $\sigma=1/2$ уявна частина $v(\frac{1}{2},\tau)$ функції φ^* визначається за формулою Гільберта [2] з сингулярним ядром $\mathrm{cth}\,\pi(x-\tau)$. На уявній осі ($\sigma=0$) $u(0,\,\tau)=0$, а уявна частина визначається за формулою

$$v(0,\tau)=\mathrm{sh}\,2\pi\tau\int_0^\infty\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\frac{\widehat{\alpha}(x)\,dx}{\mathrm{ch}\,2\pi x+\mathrm{ch}\,2\pi\tau}\,. \tag{52}$$

Підінтегральну функцію $\widehat{\alpha}(x)=\alpha(ix)$ визначаємо з першої з рівностей (42). Використовуючи позначення (19) і (22), запишемо

$$\widehat{\alpha}(x)=-\left[\frac{3}{2}\widehat{A}(1,x)+\widehat{A}(x)-x\widehat{C}(x)+x\widehat{C}(1,x)\right], \tag{53}$$

тобто отримуємо значення щільності першого доданку в інтегралі Мелера – Фока (21) для вихрової функції $\omega(\xi,\eta)$ з протилежним знаком.

Аналітичну функцію $\tilde{a}(\mu)=\mu a(\mu)$ знаходимо з рівнянь (44). Покладаючи в першому з них $\mu=-\frac{1}{2}+i\tau$, отримуємо

$$\tilde{a}\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)+\tilde{a}\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)=\frac{\varphi^*(i\tau)}{i\tau(\tau^2+1)}=\frac{v(0,\tau)}{\tau(\tau^2+1)}\,. \tag{54}$$

Це рівняння, по суті, тотожне розглянутому вище рівнянню (48). Його розв'язок на уявній осі подається формулою

$$\tilde{a}(i\tau) = i\,\mathrm{sh}\,2\pi\tau \int\limits_0^\infty \frac{v(0,y)}{y(y^2+1)} \frac{dy}{\mathrm{ch}\,2\pi y + \mathrm{ch}\,2\pi\tau}. \tag{55}$$

Підставивши сюди значення для $v(0,y)$ із (52) і обчисливши інтеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{y(y^2+1)} \cdot \frac{\mathrm{sh}\,2\pi y\,dy}{(\mathrm{ch}\,2\pi y + \mathrm{ch}\,2\pi\tau)(\mathrm{ch}\,2\pi y + \mathrm{ch}\,2\pi x)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\tau^2 + \frac{1}{4}\right)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)} \cdot \frac{x^2 - \tau^2}{\mathrm{ch}\,2\pi x - \mathrm{ch}\,2\pi\tau}, \tag{56}$$

остаточно маємо такий розв'язок для шуканої функції $\hat{a}(\tau)$:

$$\tau\,\hat{a}(\tau) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\tau^2 + \frac{1}{4}} \left\{ \int\limits_0^\infty (x^2 - \tau^2)\,\hat{\alpha}(x)\,\mathrm{cth}\,\pi(x+\tau)\,dx - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^\infty \hat{\alpha}(x) \frac{(x^2 - \tau^2)\,\mathrm{sh}\,2\pi x\,dx}{\mathrm{ch}\,2\pi x - \mathrm{ch}\,2\pi\tau} \right\}. \tag{57}$$

Аналогічним способом знаходимо і функцію $\tilde{b}(i\tau)$ з другого рівняння (41). Для $\tilde{b}(\tau)$ маємо розв'язок

$$\tau\,\hat{b}(\tau) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\tau^2 + \frac{1}{4}} \int\limits_0^\infty \hat{\beta}(x) \frac{(x^2 - \tau^2)\,\mathrm{sh}\,2\pi x\,dx}{\mathrm{ch}\,2\pi x - \mathrm{ch}\,2\pi\tau}, \tag{58}$$

де

$$\hat{\beta}(x) = \frac{3}{2}\hat{B}(1,x) + \hat{B}(x) - x\hat{D}(x) + x\hat{D}(1,x). \tag{59}$$

Цей вираз співпадає зі щільністю другого доданку у виразі для вихору (21).

В результаті функцію $\partial P / \partial r$ визначаємо за першою з формул (13), а розподіл тиску в рідині $p(\xi,\eta)$ обчислюємо за формулою (39), використовуючи операцію $\partial(\cdot)/\partial r$ у тороїдальних координатах.

Остаточно функція тиску подається класичним інтегралом Мелера − Фока

$$c^2 \frac{p(\xi,\eta)}{2\mu} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{ch}\xi - \cos\eta} \int\limits_0^\infty \mathrm{th}\pi\tau \left\{ \left[\tau\,\hat{\alpha}(\tau) - \right.\right.$$

$$\left. - \mathrm{sh}2\pi\tau \int\limits_0^\infty \frac{\hat{\alpha}(x)\,dx}{\mathrm{ch}2\pi x - \mathrm{ch}2\pi\tau} \right] \mathrm{ch}\tau\eta -$$

$$\left. - \left[\tau\,\hat{\beta}(\tau) - \int\limits_0^\infty \frac{\hat{\beta}(x)\,\mathrm{sh}2\pi x\;dx}{\mathrm{ch}2\pi x - \mathrm{ch}2\pi\tau} \right] \mathrm{sh}\tau\eta \right\} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\mathrm{ch}\xi)\,d\tau. \tag{60}$$

Функції $\hat{\alpha}(x)$ і $\hat{\beta}(x)$ подаються формулами (53) і (59). Їх асимптотика на нескінченності ($x \to \infty$)

$$\hat{\alpha}(x) \sim \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{cV_0}{\mathrm{ch}\,\pi x}, \qquad \hat{\beta}(x) \sim -\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{cV_0}{\mathrm{ch}\,\pi x} \tag{61}$$

забезпечує збіжність інтегралів у розв'язках узагальнених задач Рімана (57), (58) і сингулярних інтегралів у виразі для функції тиску (60). Функція вихору $\omega(\xi,\eta)$ із (21) та отриманий вираз (60) для функції тиску $p = \mu\theta(\xi,\eta)$ є шуканим розв'язком узагальнених рівнянь Коші − Рімана для зовнішньої області поза півсферою у тороїдальних координатах.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Т. 1. – Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1973. – 294 с.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 639 с.
3. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. – М.: Наука, 1968. – 618 с.
4. *Подстригач Я. С.* Напряжения около двух неравных отверстий в плоском поле // Вопросы машиноведения и прочности в машиностроении. – 1955. – **4**, вып. 3. – С. 60–71.
5. *Положий Г. Н.* Теория и применение p-аналитических и (p,q)-аналитических функций. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. – Киев: Наук. думка, 1973. – 424 с.
6. *Положий Г. Н., Улитко А. Ф.* О формулах обращения основного интегрального представления p-аналитических функций с характеристикой $p = x^k$ // Прикл. механика. – 1965. – **1**, № 1. – С. 39–51.
7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 800 с.
8. *Улитко А. Ф.* Векторные разложения в пространственной теории упругости. – К.: Академпериодика, 2002. – 342 с.
9. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
10. *Фок В. А.* О разложении произвольной функции в интеграл по функциям Лежандра с комплексным значком // Докл. АН СССР. – 1943. – **39**, № 7.
11. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинаника при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
12. *Collins W. D.* A Note on the axisymmetric Stokes flow of viscous fluid past a spherical cap // Mathematica. – 1963. – **10**.
13. *Mehler F. G.* Zur Theorie der Vertheilung der Elekricität in leitenden Körpern // Math. Ann. – 1881. – **18**, No. 1.
14. *Mishael D. H., O'Neill M. E.* The separation of Stokes flows // J. Fluid Mech. – 1977. – **80**, No. 4.
15. *Payne L. E., Pell W. H.* The Stokes flow problem for a class of axially symmetric bodies // J. Fluid Mech. – 1960. – **7**.

ОБОБЩЕННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА, ВОЗНИКАЮЩАЯ ПРИ РАССМОТРЕНИИ СТОКСОВОГО ТЕЧЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛУСФЕРЫ, И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Получено точное решение задачи стоксового течения в окрестности полусферы. Показано, что решение этой задачи сводится к построению решения обобщенной задачи Римана теории аналитических функций. Решение этой задачи найдено в замкнутом виде. Это позволило записать в явном виде функции давления и функции вихря, удовлетворяющие систему обобщенных уравнений типа Коши – Римана.

GENERALIZED BOUNDARY-VALUE RIEMANN PROBLEM, ARISING UNDER CONSIDERING THE STOKES FLOW NEAR A HALF-SPHERE, AND ITS SOLUTION

The exact solution of the Stokes flow problem near a half-sphere is obtained. It is shown that the solution of this problem is reduced to construction of the solution to the generalized Riemann problem of the theory of analytical functions. The solution of the boundary-value Riemann problem is obtained in a closed form. This allows us to determine the explicit form for the pressure function and the vorticity function satisfying a system of generalized equations of the Cauchy – Riemann type.

Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ

Одержано
27.05.03