УДК 519.624.2

М. В. Кутнів

ТОЧНІ ТРИТОЧКОВІ РІЗНИЦЕВІ СХЕМИ НА НЕРІВНОМІРНІЙ СІТЦІ ДЛЯ МОНОТОННИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Для нелінійної монотонної крайової задачі доведено існування точної триточкової різницевої схеми на нерівномірній сітці, а також існування і єдиність її розв'язку. Встановлено достатні умови збіжності методу простої ітерації розв'язування нелінійної точної триточкової різницевої схеми.

У роботі [4] для задачі

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \qquad x \in (0,1), \qquad u(0) = \mu_1, \qquad u(1) = \mu_2, \tag{1}$$

з кусково-гладкими $k(x)$, $f(x,u)$ вперше запропоновано точну триточкову різницеву схему (ТТРС) на рівномірній сітці та вказані шляхи її реалізації через триточкові різницеві схеми (ТРС) m-го порядку точності. Подальший розвиток ідеї, викладені в [4], одержали в [3], а у випадку нелінійних монотонних звичайних диференціальних рівнянь – у [2]. У цій роботі доведемо існування ТТРС на нерівномірній сітці за умов [1]

$$0 < c_1 \le k(x) \le c_2 \qquad \forall x \in [0,1], \qquad k(x) \in Q^1[0,1], \tag{2}$$

$$f_u(x) \equiv f(x,u) \in Q^0[0,1] \qquad \forall u \in \mathbb{R}^1,$$

$$f_x(u) \equiv f(x,u) \in C(\mathbb{R}^1) \qquad \forall x \in [0,1], \tag{3}$$

$$|f(x,u)| \le g(x) + c|u| \qquad \forall x \in [0,1], \quad u \in \mathbb{R}^1, \quad c \ge 0, \tag{4}$$

$$[f(x,u) - f(x,v)](u-v) \le c_3 |u-v|^2 \qquad \forall x \in [0,1],$$

$$u,\ v \in \mathbb{R}^1, \qquad 0 \le c_3 < \pi^2 c_1, \tag{5}$$

де $g(x) \in L_2(0,1)$; c, c_1, c_2, c_3 – константи; $Q^p[0,1]$ – клас функцій з кусково-неперервними похідними до p-го порядку включно зі скінченною кількістю точок розриву першого роду. Зазначимо, що умови (2)–(5) гарантують існування і єдиність розв'язку задачі (1).

Введемо нерівномірну сітку $\hat{\omega}_h = \{x_j \in (0,1),\ j = 1,2,\ldots,N-1,\ h_j = x_j - x_{j-1} > 0,\ h_1 + h_2 + \ldots + h_N = 1\}$ так, щоб точки розриву функцій $k(x)$, $f(x,u)$ збігалися з вузлами сітки $\hat{\omega}_h$. Множину всіх точок розриву позначимо через ρ і будемо вважати N таким, що $\rho \subseteq \hat{\omega}_h$. У точках розриву зв'яжемо розв'язок задачі (1) умовами неперервності

$$u(x_i - 0) = u(x_i + 0), \qquad k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x = x_i - 0} = k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x = x_i + 0} \qquad \forall x_i \in \rho.$$

Введемо функцію

$$Y_\alpha^j(x,u) = \hat{u}(x) + w_\alpha^j(x,u) - \frac{V_\alpha^j(x)}{V_\alpha^j(x_j)} w_\alpha^j(x_j,u),$$

$$x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \qquad \alpha = 1,2, \qquad j = 1,2,\ldots,N-1,$$

де

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2003. – 46, № 2. – С. 42-50.

$$\hat{u}(x) = \left[u(x_j) V_1^j(x) + u(x_{j-1}) V_2^{j-1}(x) \right] \left[V_1^j(x_j) \right]^{-1}, \qquad x \in [x_{j-1}, x_j],$$

$$V_1^j(x) = \int\limits_{x_{j-1}}^{x} \frac{dt}{k(t)}, \qquad\qquad V_2^j(x) = \int\limits_{x}^{x_{j+1}} \frac{dt}{k(t)},$$

а функції $w_\alpha^j(x,u)$, $\alpha = 1,2$, – розв'язки таких двох задач Коші:

$$\frac{dw_\alpha^j(x,u)}{dx} = \frac{\ell_\alpha^j(x,u)}{k(x)}, \qquad \frac{d\ell_\alpha^j(x,u)}{dx} = -f(x, Y_\alpha^j(x,u)), \qquad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha},$$

$$w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u) = \ell_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u) = 0, \qquad \alpha = 1,2, \qquad j = 1,2,\ldots, N-1. \tag{6}$$

Лема 1. *Нехай виконуються умови* (2)–(5). *Тоді задача* (6) *має єдиний розв'язок, причому для розв'язку крайової задачі* (1) *буде справджуватися зображення*

$$u(x) = Y_\alpha^j(x,u) = \hat{u}(x) + w_\alpha^j(x,u) - \frac{V_\alpha^j(x)}{V_\alpha^j(x_j)} w_\alpha^j(x_j,u),$$

$$x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \qquad \alpha = 1,2, \qquad j = 1,2,\ldots, N-1. \tag{7}$$

Д о в е д е н н я. Легко показати, що функція $Y_\alpha^j(x,u)$ є розв'язком крайової задачі

$$\frac{d}{dx}\left(k(x) \frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx} \right) = -\, f(x, Y_\alpha^j(x,u)), \qquad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha},$$

$$Y_\alpha^j(x_{j-2+\alpha}, u) = u(x_{j-2+\alpha}), \quad Y_\alpha^j(x_{j-1+\alpha}, u) = u(x_{j-1+\alpha}), \quad \alpha = 1,2. \tag{8}$$

Враховуючи, що $f(x,u)$ задовольняє умови Каратеодорі та є елементом простору $L_2[0,1]$ (див. [1]), введемо нелінійний оператор $A_\alpha^j(x, Y_\alpha^j)$ за допомогою співвідношення

$$\left(A_\alpha^j(x, Y_\alpha^j),\ v\right) = \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} k(x) \frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx} \frac{dv}{dx}\, dx - \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} f(x, Y_\alpha^j(x,u)) v(x)\, dx,$$

яке справджується для $\forall\, Y_\alpha^j(x,u) \in W_2^1(e_\alpha)$, $\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(e_\alpha)$, де $e_\alpha = (x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha})$, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(e_\alpha) = \left\{ v(x) \mid v(x) \in W_2^1(e),\ v(x_{j-2+\alpha}) = 0,\ v(x_{j-1+\alpha}) = 0,\ \alpha = 1,2 \right\}$. Функція $Y_\alpha^j(x,u)$ є слабким розв'язком задачі (8), якщо $\left(A_\alpha^j(x, Y_\alpha^j),\ v\right) = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(e_\alpha)$. Покажемо, що оператор $A_\alpha^j(x, Y_\alpha^j)$ обмежений. Використовуючи нерівність Коші – Буняковського та враховуючи (2), (4), отримаємо

$$\left| \left(A_\alpha^j(x, Y_\alpha^j),\ v\right) \right| \le \left\{ \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left[k(x) \frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx} \right]^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left[\frac{dv(x)}{dx} \right]^2 dx \right\}^{1/2} +$$

$$+ \left\{ \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} f^2(x, Y_\alpha^j(x,u))\, dx \right\}^{1/2} \left\{ \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} [\, v(x)]^2\, dx \right\}^{1/2} \le$$

$$\le \left[c_2 \left\| Y_\alpha^j \right\|_{1,2,e_\alpha} + \| f \|_{0,2,e_\alpha} \right] \| v \|_{1,2,e_\alpha} \le$$

$$\le \left[(c_2 + c) \left\| Y_\alpha^j \right\|_{1,2,e_\alpha} + \| g \|_{0,2,e_\alpha} \right] \| v \|_{1,2,e_\alpha} .$$

Демінеперервність оператора $A_\alpha^j(x, Y_\alpha^j)$ випливає з умови (4). Дійсно (див. [1, с. 113]), якщо $Y_{\alpha n}^j(x,u) \to Y_{\alpha 0}^j(x,u)$ у просторі $W_2^1(e_\alpha)$, то $f(x, Y_{\alpha n}^j(x,u)) \to f(x, Y_{\alpha 0}^j(x,u))$, $k(x)\dfrac{dY_{\alpha n}^j(x,u)}{dx} \to k(x)\dfrac{dY_{\alpha 0}^j(x,u)}{dx}$ у просторі $L_2(e_\alpha)$. Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty} \left(A_\alpha^j(x, Y_{\alpha n}^j),\ v \right) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} k(x) \frac{dY_{\alpha n}^j(x,u)}{dx} \frac{dv}{dx}\, dx - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} f(x, Y_{\alpha n}^j(x,u))\, v(x)\, dx \right\} = \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} k(x) \frac{dY_{\alpha 0}^j(x,u)}{dx} \frac{dv}{dx}\, dx -$$

$$- \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} f(x, Y_{\alpha 0}^j(x,u))\, v(x)\, dx = \left(A_\alpha^j(x, Y_{\alpha 0}^j),\ v \right) \quad \forall v(x) \in \mathring{W}_2^1(e_\alpha),$$

тобто оператор $A_\alpha^j(x, Y_\alpha^j)$ демінеперервний.

Покажемо, що оператор $A_\alpha^j(x, Y_\alpha^j)$ сильно монотонний. Враховуючи умови (2), (5) і нерівність $\| v \|_{0,2,e_\alpha} \le \dfrac{1}{\pi} \left\| \dfrac{dv}{dx} \right\|_{0,2,e_\alpha}$, де $v(x) \in \mathring{W}_2^1(e_\alpha)$, маємо

$$\left(A_\alpha^j(x, Y_\alpha^j) - A_\alpha^j(x, \tilde{Y}_\alpha^j),\ Y_\alpha^j - \tilde{Y}_\alpha^j \right) =$$

$$= \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} k(x) \left(\frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx} - \frac{d\tilde{Y}_\alpha^j(x,u)}{dx} \right)^2 dx -$$

$$- \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left[f(x, Y_\alpha^j(x,u)) - f(x, \tilde{Y}_\alpha^j(x,u)) \right] \cdot \left[Y_\alpha^j(x,u) - \tilde{Y}_\alpha^j(x,u) \right] dx \ge$$

$$\ge c_1 \left\| \frac{dY_\alpha^j}{dx} - \frac{d\tilde{Y}_\alpha^j}{dx} \right\|_{0,2,e_\alpha}^2 - c_3 \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left[Y_\alpha^j(x,u) - \tilde{Y}_\alpha^j(x,u) \right]^2 dx \ge$$

$$\ge c_4 \left\| Y_\alpha^j - \tilde{Y}_\alpha^j \right\|_{0,2,e_\alpha}^2 ,$$

де згідно з (5) $c_4 = \pi^2 c_1 - c_3 > 0$. Із сильної монотонності випливає коерцитивність оператора $A_\alpha^j(x, Y_\alpha^j)$.

Отже, на підставі теореми Браудера [1, с. 204] існує єдиний розв’язок задачі (8). З того, що функція $Y_\alpha^j(x,u)$ є розв’язком задачі (8), випливає, що вона є розв’язком задачі (1), який згідно з умовами леми єдиний. ◊

За допомогою леми доводиться

Теорема 1. *Нехай виконуються умови леми* 1. *Тоді для задачі* (1)–(5) *існує ТТРС*

$$(au_{\bar{x}})_{\hat{x}} = -\ \hat{T}^{x}(f(\xi,u)), \qquad x \in \hat{\omega}_h, \qquad u(0) = \mu_1, \qquad u(1) = \mu_2, \tag{9}$$

яка має єдиний розв'язок $u(x)$ $\forall x \in \hat{\omega}_h$, *який є також розв'язком задачі* (1) *у вузлах сітки* $\hat{\omega}_h$, *де*

$$u_{\bar{x},j} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j}, \qquad u_{\hat{x},j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\hbar_j}, \qquad \hbar_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2},$$

$$a(x_j) = \left[\frac{1}{h_j} V_1^j(x_j)\right]^{-1},$$

$$\hat{T}^{x_j}(w(\xi)) = \left[\hbar_j V_1^j(x_j)\right]^{-1} \int_{x_{j-1}}^{x_j} V_1^j(\xi) w(\xi) d\xi +$$

$$+ \left[\hbar_j V_2^j(x_j)\right]^{-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} V_2^j(\xi) w(\xi) d\xi. \tag{10}$$

Функція $u(\xi)$ *у правій частині* (9) *визначається згідно з формулою* (7) *і залежить тільки від* $u(x_j)$, $j = 0,1,\ldots,N$.

Д о в е д е н н я. Подіявши оператором T^{x_j} на рівняння (1), одержимо різницеву схему (9), (10), що з урахуванням (7) доводить існування ТТРС.

Для доведення єдиності розв'язку ТТРС (9), (10) розглянемо оператор

$$A_h(x,u) = -\ (au_{\bar{x}})_{\hat{x}} - \hat{T}^{x}(f(\xi,u)),$$

визначений у скінченновимірному гільбертовому просторі $L_2(\hat{\omega}_h)$ зі скалярними добутками

$$(u,v)_{\hat{\omega}_h} = \sum_{\xi \in \hat{\omega}_h} \hbar(\xi) u(\xi) v(\xi), \qquad (u,v)_{\hat{\omega}_h^+} = \sum_{\xi \in \hat{\omega}_h^+} h(\xi) u(\xi) v(\xi)$$

і нормами $\| u \|_{0,2,\hat{\omega}_h} = (u,u)_{\hat{\omega}_h}^{1/2}$, $\| u \|_{0,2,\hat{\omega}_h^+} = (u,u)_{\hat{\omega}_h^+}^{1/2}$. Згідно з умовою (3) оператор $A_h(x,u)$ неперервний. Покажемо, що оператор $A_h(x,u)$ сильно монотонний. Дійсно, враховуючи рівність

$$\sum_{\xi \in \hat{\omega}_h} \hbar(\xi)\, \hat{T}^{\xi}(w(\eta))\, g(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \hat{g}(\eta) w(\eta)\, d\eta = \int_0^1 \hat{g}(\eta) w(\eta)\, d\eta,$$

$$\hat{g}(\eta) = g(x_j) \frac{V_1^j(\eta)}{V_1^j(x_j)} + g(x_{j-1}) \frac{V_2^{j-1}(\eta)}{V_1^j(x_j)}, \qquad x_{j-1} \le \eta \le x_j,$$

маємо

$$(\hat{T}^{x}(f(\eta,u) - f(\eta,v)),\ u - v)_{\hat{\omega}_h} = \sum_{\xi \in \hat{\omega}_h} \hbar(\xi)\, \hat{T}^{\xi}(f(x,u) - f(x,v))\left[u(\xi) - v(\xi)\right] =$$

$$= \int_0^1 \left[\hat{u}(\eta) - \hat{v}(\eta)\right] \cdot \left[f(\eta,u(\eta)) - f(\eta,v(\eta))\right] d\eta,$$

де функції $u(x)$, $v(x)$ визначаються за формулами вигляду (7). Тоді, використовуючи (5), маємо

$$\left(\hat{T}^x(f(\eta,u)-f(\eta,v)),\ u-v\right)_{\hat{\omega}_h}=\int_0^1\left[u(\eta)-v(\eta)\right]\cdot\left[f(\eta,u(\eta))-f(\eta,v(\eta))\right]d\eta+$$

$$+\int_0^1\left[\hat{u}(\eta)-\hat{v}(\eta)-u(\eta)+v(\eta)\right]\cdot\left[f(\eta,u(\eta))-f(\eta,v(\eta))\right]d\eta\le$$

$$\le-\int_0^1\left[\hat{u}(\eta)-\hat{v}(\eta)\right]\frac{d}{d\eta}\left\{k(\eta)\frac{d}{d\eta}\left[u(\eta)-v(\eta)\right]\right\}d\eta+$$

$$+\int_0^1\left[u(\eta)-v(\eta)\right]\frac{d}{d\eta}\left\{k(\eta)\frac{d}{d\eta}\left[u(\eta)-v(\eta)\right]\right\}d\eta+c_3\,\|u-v\|^2_{0,2,(0,1)}=$$

$$=-\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left[\hat{u}(\eta)-\hat{v}(\eta)\right]\frac{d}{d\eta}\left\{k(\eta)\frac{d}{d\eta}\left[u(\eta)-v(\eta)\right]\right\}d\eta+c_3\,\|u-v\|^2_{0,2,(0,1)}-$$

$$-\int_0^1 k(\eta)\left\{\frac{d}{d\eta}\left[u(\eta)-v(\eta)\right]\right\}^2d\eta\le\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}k(\eta)\left[\frac{d\hat{u}}{d\eta}-\frac{d\hat{v}}{d\eta}\right]\cdot\left[\frac{du}{d\eta}-\frac{dv}{d\eta}\right]d\eta-$$

$$-c_1\left\|\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}\right\|^2_{0,2,(0,1)}+c_3\,\|u-v\|^2_{0,2,(0,1)}.$$

Отже,

$$\left(\hat{T}^x(f(\eta,u(\eta))-f(\eta,v(\eta))),\ u-v\right)_{\hat{\omega}_h}\le\left(a(u_{\bar{x}}-v_{\bar{x}}),\ u_{\bar{x}}-v_{\bar{x}}\right)_{\hat{\omega}_h^+}-$$

$$-c_1\left\|\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}\right\|^2_{0,2,(0,1)}+c_3\,\|u-v\|^2_{0,2,(0,1)}.$$

З урахуванням нерівності $\|v\|_{0,2,(0,1)}\le\frac{1}{\pi}\left\|\frac{dv}{dx}\right\|_{0,2,(0,1)}$, де $v\in\mathring{W}_2^1(0,1)$, а також умови (5) отримуємо

$$\left(A_h(x,u)-A_h(x,v),\ u-v\right)_{\hat{\omega}_h}=\left(a(u_{\bar{x}}-v_{\bar{x}}),\ u_{\bar{x}}-v_{\bar{x}}\right)_{\hat{\omega}_h^+}-$$

$$-\left(\hat{T}^x(f(\eta,u)-f(\eta,v)),\ u-v\right)_{\hat{\omega}_h}\ge c_1\left\|\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}\right\|^2_{0,2,(0,1)}-$$

$$-c_3\,\|u-v\|^2_{1,2,(0,1)}\ge\frac{c_4}{\pi^2}\left\|\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}\right\|^2_{0,2,(0,1)},$$

де $c_4=\pi^2c_1-c_3>0$. Оскільки

$$\int_0^1 k(\eta)\left\{\frac{d}{d\eta}\left[\hat{u}(\eta)-\hat{v}(\eta)-u(\eta)+v(\eta)\right]\right\}^2d\eta=$$

$$=-\sum_{j=1}^{N}h_ja(x_j)(u_{\bar{x},j}-v_{\bar{x},j})^2+\int_0^1 k(\eta)\left\{\frac{d}{d\eta}\left[u(\eta)-v(\eta)\right]\right\}^2d\eta=$$

$$=-\left(a(u_{\bar{x}}-v_{\bar{x}}),\ u_{\bar{x}}-v_{\bar{x}}\right)_{\hat{\omega}_h^+}+\left(k\left(\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}\right),\ \frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}\right)\ge 0,$$

то

$$\left\| \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \right\|^2_{0,2,(0,1)} \ge \frac{1}{c_2} \left(a(u_{\bar{x}} - v_{\bar{x}}),\ u_{\bar{x}} - v_{\bar{x}} \right)_{\hat{\omega}_h^+}.$$

Отже,

$$\left(A_h(x,u) - A_h(x,v),\ u - v \right)_{\hat{\omega}_h} \ge \frac{c_4}{\pi^2 c_2} \left(a(u_{\bar{x}} - v_{\bar{x}}),\ u_{\bar{x}} - v_{\bar{x}} \right)_{\hat{\omega}_h^+} \ge$$

$$\ge \frac{c_4 c_1}{\pi^2 c_2} \| u_{\bar{x}} - v_{\bar{x}} \|_{\hat{\omega}_h^+} \ \ge\ 8 \frac{c_4 c_1}{\pi^2 c_2} \| u - v \|^2_{0,2,\hat{\omega}_h}, \tag{11}$$

тобто оператор $A_h(x,u)$ сильно монотонний. Звідси випливає (див. [5, с. 461]), що рівняння $A_h(x,u) = 0$ має єдиний розв’язок. ◊

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми 1 та умова Ліпшиця*

$$| f(x,u) - f(x,v) | \le L | u - v | \qquad \forall x \in [0,1], \qquad u, v \in \mathbb{R}^1.$$

Тоді ітераційний метод

$$B_h \frac{u^{(n)} - u^{(n-1)}}{\tau} + A_h(x, u^{(n-1)}) = 0, \qquad x \in \hat{\omega}_h,$$

$$u^{(n)}(0) = \mu_1, \qquad u^{(n)}(1) = \mu_2, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$u^{(0)}(x) = \frac{V_2(x)}{V_1(1)} \mu_1 + \frac{V_1(x)}{V_1(1)} \mu_2, \qquad B_h u = -(a u_{\bar{x}})_{\hat{x}},$$

$$A_h(x,u) = B_h u - \hat{T}^x (f(\xi, u(\xi))), \qquad \tau = \tau_0 = \frac{c_4}{\pi^2 c_2} \left(1 + \frac{L}{2c_1} + \frac{L^2}{2 c_1 c_4} \right)^{-2}, \tag{12}$$

збігається в енергетичному просторі H_{B_h} *і для похибки виконується оцінка*

$$\left\| u^{(n)} - u \right\|_{B_h} \le q^n \left\| u^{(0)} - u \right\|_{B_h}, \tag{13}$$

де

$$q = \sqrt{1 - \frac{c_4}{\pi^2 c_2} \tau_0}, \qquad c_4 = \pi^2 c_1 - c_3 > 0, \qquad \| u \|_{B_h} = (B_h u,\ u)^{1/2}_{\hat{\omega}_h}.$$

Д о в е д е н н я. Із нерівності (11) випливає

$$\left(A_h(x,u) - A_h(x,v),\ u - v \right)_{\hat{\omega}_h} \ge \frac{c_4}{\pi^2 c_2} \| u - v \|^2_{B_h}. \tag{14}$$

Використовуючи нерівність Коші − Буняковського, послідовно знаходимо

$$\left(A_h(x,u) - A_h(x,v),\ z \right)_{\hat{\omega}_h} = \left(B_h u - B_h v,\ z \right)_{\hat{\omega}_h} -$$

$$- \int_0^1 \left[f(\eta, u(\eta)) - f(\eta, v(\eta)) \right] \hat{z}(\eta)\, d\eta \le \| u - v \|_{B_h} \| z \|_{B_h} +$$

$$+ \left\{ \int_0^1 \left[f(\eta, u(\eta)) - f(\eta, v(\eta)) \right]^2 d\eta \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^1 \left[\hat{z}(\eta) \right]^2 d\eta \right\}^{1/2} \le$$

$$\le \| u - v \|_{B_h} \| z \|_{B_h} + L \| u - v \|_{0,2,(0,1)} \| \hat{z} \|_{0,2,(0,1)}.$$

Оскільки $V_1^j(x) \le V_1^j(x_j)$, $V_2^{j-1}(x) \le V_1^j(x_j)$ $\forall x \in [\, x_{j-1}, x_j \,]$, то

$$\| \hat{z} \|^2_{0,2,(0,1)} = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \left[z_j \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)} + z_{j-1} \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)} \right]^2 dx \le$$

$$\le 2 \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \left\{ z_j^2 \left[\frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)} \right]^2 + z_{j-1}^2 \left[\frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)} \right]^2 \right\} dx \le 4 \| z \|^2_{0,2,\hat{\omega}_h} . \qquad (15)$$

Покажемо, що

$$\| u - v \|_{0,2,(0,1)} \le 2 \left(1 + \frac{L}{c_4} \right) \| u - v \|_{0,2,\hat{\omega}_h} . \qquad (16)$$

Для цього за допомогою заміни $u(x) = \tilde{u}(x) + \hat{u}(x)$, $x_{j-2+\alpha} \le x \le x_{j-1+\alpha}$, зведемо задачу

$$\frac{d}{dx}\left[k(x) \frac{du}{dx} \right] = -f(x, u(x)), \qquad x \in (x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha})$$

$$u(x_{j-2+\alpha}) = u_{j-2+\alpha}, \qquad u(x_{j-1+\alpha}) = u_{j-1+\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2 ,$$

до вигляду

$$\frac{d}{dx}\left[k(x) \frac{d\tilde{u}}{dx} \right] = - f(x, \tilde{u}(x) + \hat{u}(x)), \qquad x \in (x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}) ,$$

$$\tilde{u}(x_{j-2+\alpha}) = 0, \qquad \tilde{u}(x_{j-1+\alpha}) = 0, \qquad \alpha = 1, 2 .$$

Тоді згідно з умовами (2), (5) та умовою Ліпшиця $\forall\ \tilde{u}(x), \tilde{v}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(e_\alpha)$ матимемо

$$c_1 \pi^2 \| \tilde{u} - \tilde{v} \|^2_{0,2,e_\alpha} \le \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} k(x) \left[\frac{d\tilde{u}}{dx} - \frac{d\tilde{v}}{dx} \right]^2 dx =$$

$$= \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left[f(x, \tilde{u} + \hat{u}) - f(x, \tilde{v} + \hat{v}) \right] \left[\tilde{u}(x) - \tilde{v}(x) \right] dx =$$

$$= \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left[f(x, \tilde{u} + \hat{u}) - f(x, \tilde{v} + \hat{u}) \right] \left[\tilde{u}(x) - \tilde{v}(x) \right] dx +$$

$$+ \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left[f(x, \tilde{v} + \hat{u}) - f(x, \tilde{v} + \hat{v}) \right] \left[\tilde{u}(x) - \tilde{v}(x) \right] dx \ \le\ c_3 \| \tilde{u} - \tilde{v} \|^2_{0,2,e_\alpha} +$$

$$+ \left\{ \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left[f(x, \tilde{v} + \hat{u}) - f(x, \tilde{v} + \hat{v}) \right]^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left[\tilde{u}(x) - \tilde{v}(x) \right]^2 dx \right\}^{1/2} \le$$

$$\le L \| \hat{u} - \hat{v} \|_{0,2,e_\alpha} \| \tilde{u} - \tilde{v} \|_{0,2,e_\alpha} + c_3 \| \tilde{u} - \tilde{v} \|^2_{0,2,e_\alpha} .$$

Звідси випливає

$$\| \tilde{u} - \tilde{v} \|_{1,2,e_\alpha} \le \frac{L}{c_4} \| \hat{u} - \hat{v} \|_{0,2,e_\alpha} .$$

Отже,

$$\| u - v \|_{0,2,(0,1)} \le \| \tilde{u} - \tilde{v} \|_{0,2,(0,1)} + \| \hat{u} - \hat{v} \|_{0,2,(0,1)} \le$$

$$\le \left(1 + \frac{L}{c_4}\right) \| \hat{u} - \hat{v} \|_{0,2,(0,1)} \le 2\left(1 + \frac{L}{c_4}\right) \| u - v \|_{0,2,\hat{\omega}_h} .$$

Враховуючи нерівності (15), (16), отримуємо

$$\left(A_h(x,u) - A_h(x,v),\ z\right)_{\hat{\omega}_h} \le$$

$$\le \| u - v \|_{B_h} \| z \|_{B_h} + 4L\left(1 + \frac{L}{c_4}\right) \| u - v \|_{0,2,\hat{\omega}_h} \| z \|_{0,2,\hat{\omega}_h} \le$$

$$\le \| u - v \|_{B_h} \| z \|_{B_h} + \frac{L}{2}\left(1 + \frac{L}{c_4}\right) \| u_{\bar{x}} - v_{\bar{x}} \|_{0,2,\hat{\omega}_h^+} \| z_{\bar{x}} \|_{0,2,\hat{\omega}_h^+} \le$$

$$\le \left(1 + \frac{L}{2c_1} + \frac{L^2}{2c_1 c_4}\right) \| u - v \|_{B_h} \| z \|_{B_h} .$$

Поклавши $z = B_h^{-1}\left(A_h(x,u) - A_h(x,v)\right)$, будемо мати

$$\left\| B_h^{-1}\left(A_h(x,u) - A_h(x,v)\right) \right\|_{B_h} \le \left(1 + \frac{L}{2c_1} + \frac{L^2}{2c_1 c_4}\right) \| u - v \|_{B_h} . \qquad (17)$$

Із оцінок (17), (14) випливає

$$\left(A_h(x,u) - A_h(x,v),\ B_h^{-1}\left(A_h(x,u) - A_h(x,v)\right)\right)_{\hat{\omega}_h} \le$$

$$\le \left(1 + \frac{L}{2c_1} + \frac{L^2}{2c_1 c_4}\right)^2 \| u - v \|_{B_h}^2 \le$$

$$\le \frac{\pi^2 c_2}{c_4}\left(1 + \frac{L}{2c_1} + \frac{L^2}{2c_1 c_4}\right)^2 \left(A_h(x,u) - A_h(x,v),\ u - v\right)_{\hat{\omega}_h} .$$

Тоді (див. [6, с. 502]) ітераційний метод (12) збігається в H_{B_h} і для похибки справджується оцінка (13). ◊

Лема 3. *Нехай виконуються умови леми* 2. *Тоді метод послідовних наближень* (12) *збігається і*, *крім оцінки* (13), *буде виконуватися оцінка*

$$\left\| k\frac{du^{(n)}}{dx} - k\frac{du}{dx} \right\|_{0,2,\hat{\omega}_h} \le M \left\| u^{(n)} - u \right\|_{1,2,\hat{\omega}_h} \le M q^n ,$$

де $\| u \|_{1,2,\hat{\omega}_h} = \left(\| u \|_{0,2,\hat{\omega}_h}^2 + \| u_{\bar{x}} \|_{0,2,\hat{\omega}_h^+}^2 \right)^{1/2}$.

Д о в е д е н н я є аналогічним до доведення, наведеного у роботі [2]. ◊

Отже, в роботі доведено існування і єдиність розв’язку ТТРС за слабших умов (2)–(5), ніж у [2]. Обґрунтування збіжності методу простої ітерації для розв’язування ТТРС наведено за умов, що $f(x,u)$ задовольняє додатково умову Ліпшиця, однак на константу Ліпшиця L не накладаються ніякі обмеження. Надалі потрібно розробити та обґрунтувати алгоритмічну реалізацію ТТРС на нерівномірній сітці через ТРС довільного порядку точності. У випадку рівномірної сітки та монотонних крайових задач це було зроблено в роботі [2].

1. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
2. *Кутнив М. В.* Точные трехточечные разностные схемы для монотонных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2001. – **41**, № 6. – С. 909–921.
3. *Кутнив М. В., Макаров В. Л., Самарский А. А.* Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1999. – **39**, № 1. – С. 45–60.
4. *Макаров В. Л., Самарский А. А.* Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация // Докл. АН СССР. – 1990. – **312**, № 4. – С. 795–800.
5. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
6. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

ТОЧНЫЕ ТРЕХТОЧЕЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ ДЛЯ МОНОТОННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для нелинейной монотонной краевой задачи доказано существование точной трехточечной разностной схемы на неравномерной сетке, а также существование и единственность ее решения. Получены достаточные условия сходимости метода простой итерации решения нелинейной точной трехточечной разностной схемы.

EXACT THREE-POINT DIFFERENCE SCHEMES ON IRREGULAR GRID FOR SECOND-ORDER MONOTONE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

For nonlinear monotone boundary-value problem, the existence of exact three-point difference scheme on the irregular grids and the existence and uniqueness of its solution is proved. The sufficient conditions for convergence of the method of simple iteration to solve the nonlinear exact three-point difference scheme are established.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
21.05.03