УДК 517.95+511.2

М. М. Симотюк

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Досліджено коректність задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною та умовами періодичності за іншими координатами для псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку задачі, доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі.

Багатоточкові задачі для гіперболічних, параболічних і безтипних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними вивчались багатьма авторами (див., наприклад, [1–18, 20, 22–24] та бібліографію у них). Зокрема, в роботах [3, 6] встановлено класи єдиності та класи коректної розв'язності задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною t та умовами росту на нескінченності за іншими координатами для систем диференціальних рівнянь. До цих робіт примикають праці [12–14], у яких застосовано узагальнений метод відокремлення змінних для побудови в різних функціональних просторах розв'язків багатоточкових задач у необмежених областях. У працях [1, 2, 7, 8, 11] вивчено розв'язність багатоточкових задач у гільбертових просторах для диференціально-операторних рівнянь. Багатоточкові задачі для рівнянь із частинними похідними в обмежених областях, розв'язність яких пов'язана з проблемою малих знаменників досліджено в працях [9, 10, 15–18, 20, 22–24].

Пропонована праця є розвитком робіт [16, 22] на випадок псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними зі змінними за t коефіцієнтами і продовжує дослідження, розпочаті в [24]. У ній встановлено умови коректності задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною t у класі періодичних за $x_1,\ldots,x_p$ функцій. Порівняно з [20, 22] у роботі не лише аксіоматично накладено оцінки знизу на малі знаменники, що забезпечують існування розв'язку задачі, але й вперше для загальних рівнянь зі змінними за t коефіцієнтами доведено метричні теореми про можливість виконання таких оцінок для майже всіх векторів, складених зі значень вузлів інтерполяції. Методика доведення метричних теорем ґрунтується на встановлених твердженнях (леми 3, 4, 5) про оцінки зверху мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху.

1. У роботі використовуємо такі позначення: $\mu_n A$ – міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ вимірної множини $A\subset\mathbb{R}^n$; Ω_p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $Q_p=(0,T)\times\Omega_p$; $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega_p$, $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$, $(k,x)=$ $=k_1x_1+\ldots+k_px_p$; $G(k):\mathbb{Z}^p\to\mathbb{R}_+$ – така додатна функція, що $G(k)\ge 1$, $k\in\mathbb{Z}^p$, і для деяких невід'ємних сталих λ, μ, які одночасно не дорівнюють нулеві, ряд $\sum\limits_{|k|\ge 0} G^{-\lambda}(k)\exp(-\mu G(k))$ є збіжним. Зазначені умови задовольняють, наприклад, такі функції: ***1***) $G(k)=(1+|k|)$ (при $\lambda>p$, $\mu\ge 0$), ***2***) $G(k)=\ln(3+|k|)$ (при $\lambda\ge 0$, $\mu>p$).

За функцією $G(k)$ визначимо простори $W_{\alpha,\beta}(G)$, $\alpha,\beta\ge 0$, які отримуються в результаті поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x)=\sum\varphi_k\exp(ik,x)$ за нормою

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2003. – 46, № 2. – С. 26-41.

$$\left\| \varphi(x); W_{\alpha,\beta}(G) \right\| = \sqrt{\sum_{|k|\geq 0} |\varphi_k|^2 \, w^2(k;\alpha,\beta)}\,, \qquad w(k;\alpha,\beta) \equiv G^{\alpha}(k)\exp(\beta G(k)).$$

Через $C^n([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G))$ позначимо простір n разів неперервно диференційовних за t на $[0,T]$ функцій $u(t,x)$ (зі значеннями з простору $W_{\alpha,\beta}(G)$). Норму в просторі $C^n([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G))$ задамо формулою

$$\left\| u(t,x); C^n([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G)) \right\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}; W_{\alpha,\beta}(G) \right\|.$$

Через $S^n(G)$, $n = 0,1,\ldots$, позначатимемо множину псевдодиференціальних операцій $A(t,D)$, $D = (-i\partial/\partial x_1,\ldots,-i\partial/\partial x_p)$, дія яких на функцію $u(t,x) = \sum\limits_{|k|\geq 0} u_k(t)\exp(ik,x)$ задається формулою

$$A(t,D)u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} A(t,k)u_k(t)\exp(ik,x),$$

де $A(t,k) \in C^n([0,T]; \mathbb{R}(\mathbb{C}))$, $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \left\{ \sum\limits_{j=0}^{n} \max\limits_{t\in[0,T]} \frac{|A^{(j)}(t,k)|}{G(k)} \right\} < \infty$. Зауважимо, що операція $A(t,D) \in S^n(G)$ неперервно відображає простір $C^n([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G))$ у простір $C^n([0,T]; W_{\alpha_1,\beta}(G))$, де $\alpha_1 \leq \alpha - 1$.

2. Розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u(t,x) \equiv \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t,D)\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j} = F(t,x), \quad (t,x) \in Q_p, \quad (1)$$

$$u(t_j,x) = \varphi_j(x), \quad j = 1,\ldots,n, \quad 0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq T, \quad x \in \Omega_p, \quad (2)$$

де $A_j(t,D)$, $j = 0,1,\ldots,n-1$, − псевдодиференціальні операції з класу $S^0(G)$. Нехай $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Дотримуючись [20], задачу (1), (2) будемо називати $(\alpha, \beta, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$-коректною, якщо для довільних $F(t,x) \in C([0,T]; W_{\alpha_0,\beta_0}(G))$, $\varphi_j(x) \in W_{\alpha_j,\beta_j}(G)$, $j = 1,\ldots,n$, існує єдиний розв'язок $u(t,x)$ задачі (1), (2), який належить до простору $C^n([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G))$ і неперервно залежить від функцій $F(t,x)$, $\varphi_j(x)$, $j = 1,\ldots,n$, тобто

$$\left\| u; C^n([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G)) \right\| \leq C\left(\sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_j; W_{\alpha_j,\beta_j}(G) \right\| + \left\| F; C([0,T]; W_{\alpha_0,\beta_0}(G)) \right\| \right),$$

де стала $C > 0$ не залежить від $F(t,x)$, $\varphi_j(x)$, $j = 1,\ldots,n$.

3. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} u_k(t)\exp(ik,x). \quad (3)$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком такої багатоточкової задачі:

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t,k)\frac{d^j u_k(t)}{dt^j} = F_k(t), \; A_j(t,k) \in C[0,T], \quad j = 0,1,\ldots,n-1, \quad (4)$$

$$u_k(t_j) = \varphi_{jk}, \qquad j = 1,\ldots,n, \qquad 0 \le t_1 < \ldots < t_n \le T, \tag{5}$$

де $F_k(t)$, φ_{jk}, $k \in \mathbb{Z}^p$, – коефіцієнти розвинень функцій $F(t,x)$, $\varphi_j(x)$, $j = 1,\ldots,n$, у ряди Фур'є за змінними $x_1,\ldots,x_p$. Позначимо через $\{f_q(t,k)$, $q = 1,\ldots,n\}$ таку фундаментальну систему розв'язків однорідного диференціального рівняння, яке відповідає (4), що $f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{jq}$, $j = 1,\ldots,n$, де δ_{jq} – символ Кронекера. Нехай $W(t,k)$ – вронскіан системи функцій $\{f_q(t,k),\ q = 1,\ldots,n\}$; $W_q(t,k)$, $q = 1,\ldots,n$, – алгебричне доповнення елемента $f_q^{(n-1)}(t,k)$ у визначнику $W(t,k)$; $H(t,\tau,k) = \sum\limits_{q=1}^{n} f_q(t,k)\dfrac{W_q(\tau,k)}{W(\tau,k)}$; $\Delta(k) = \det\| f_q(t_j,k)\|_{j,q=1}^{n}$; $\Delta_{jq}(k)$, $j,q = 1,\ldots,n$, – алгебричне доповнення елемента $f_q(t_j,k)$ у визначнику $\Delta(k)$.

Теорема 1. *Нехай* $A_j(t,D) \in S^0(G)$, $j = 0,1,\ldots,n-1$. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^n([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$ *необхідно й достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \qquad \Delta(k) \ne 0. \tag{6}$$

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення теореми 5.3 з [15, розд. 2] з урахуванням того, що задача (4), (5) для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ не може мати двох різних розв'язків тоді й тільки тоді, коли справджується умова (6). ◊

Зауваження 1. Якщо у рівнянні (1) $L(\partial/\partial t, D) \equiv \partial^2/\partial t^2 + A_0(t,D)$, де $A_0(t,k) \le 0$ $\forall t \in [0,T]$, $\forall k \in \mathbb{Z}^p$, то умова (6) виконується для довільних $0 \le t_1 < t_2 \le T$ з огляду на теорему з [28].

Лема 1 [21]. *Нехай* $\varphi(t) \in C^n([a,b];\mathbb{R})$ *і* $\varphi(t)$ *відмінна від тотожного нуля. Якщо* $|\varphi^{(n)}(t)| \le \alpha$ *і* $\varphi(t)$ *має на* $[a,b]$ *принаймні* n *різних нулів, то*

$$\int\limits_a^b |\varphi(t)|\,dt < \alpha\,\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Лема 2. *Нехай у диференціальному рівнянні*

$$y^{(n)}(t) + p_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + p_{n-1}(t)y'(t) + p_n(t)y(t) = 0, \quad n \ge 2, \tag{7}$$

коефіцієнти $p_j(t)$ *є комплекснозначними функціями вигляду* $p_j(t) = q_j(t) + ir_j(t)$, *де* $q_j(t)$, $r_j(t)$ – *дійснозначні неперервні на* $[a,b]$ *функції, і нехай* $L_j = \max\limits_{t\in[a,b]}|p_j(t)|$, $j = 1,\ldots,n$. *Якщо* h_0 – *додатний корінь рівняння*

$$L_n\,\frac{h^n}{n!} + L_{n-1}\,\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + L_1\,\frac{h}{1!} - 1 = 0,$$

то для довільних n *точок* $a_1,\ldots,a_n$ *таких, що* $a \le a_1 < \ldots < a_n \le b$, $a_n - a_1 = h \le h_0$, *існує єдиний (нульовий) розв'язок рівняння* (7), *який проходить через ці точки.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що існує ненульовий розв'язок $u(t)$ рівняння (7), який перетворюється у нуль в точках $a_1,\ldots,a_n$, такий, що

$u(t) = v(t) + iw(t),\ v(t), w(t) \in C^n([a,b];\mathbb{R})$. Легко перевірити наступні співвідношення:

$$v^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{n} q_j(t) v^{(n-j)}(t) - \sum_{j=1}^{n} r_j(t) w^{(n-j)}(t) = 0 ,$$

$$w^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{n} q_j(t) w^{(n-j)}(t) + \sum_{j=1}^{n} r_j(t) v^{(n-j)}(t) = 0 . \qquad (8)$$

Обидві функції $v(t)$ і $w(t)$ мають n нулів у точках $a_1, \ldots, a_n$. Тому функції $v'(t)$ і $w'(t)$ мають на $[a_1, a_n]$ принаймні $n-1$ нулів, $v''(t)$ і $w''(t)$ – принаймні $n-2$ нулі, ..., $v^{(n-2)}(t)$ і $w^{(n-2)}(t)$ – принаймні два нулі. Нехай $\lambda = \max\limits_{t\in[a_1,a_n]} \left| v^{(n-1)}(t) \right|,\ \eta = \max\limits_{t\in[a_1,a_n]} \left| w^{(n-1)}(t) \right|$. За лемою 1 маємо

$$\int_{a_1}^{a_n} \left| v^{(n-j)}(t) \right| dt < \lambda \frac{h^j}{j!}, \qquad \int_{a_1}^{a_n} \left| w^{(n-j)}(t) \right| dt < \eta \frac{h^j}{j!}, \qquad j = 2, \ldots, n. \qquad (9)$$

Нехай функція $v^{(n-1)}$ перетворюється у нуль в точці $t_1 \in [a_1, a_n]$, а $w^{(n-1)}$ – у точці $\xi_1 \in [a_1, a_n]$. Позначимо через $t_0 \in [a_1, a_n]$, $\xi_0 \in [a_1, a_n]$ точки, в яких функції $\left| v^{(n-1)} \right|$, $\left| w^{(n-1)} \right|$ набувають значень λ, η відповідно. Тоді з рівнянь (8) маємо

$$\lambda = \left| \int_{t_0}^{t_1} v^{(n)}(t)\, dt \right| = \left| \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} q_j(t) v^{(n-j)}(t)\, dt - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} r_j(t) w^{(n-j)}(t)\, dt \right|,$$

$$\eta = \left| \int_{\xi_0}^{\xi_1} w^{(n)}(t)\, dt \right| = \left| \int_{\xi_0}^{\xi_1} \sum_{j=1}^{n} q_j(t) w^{(n-j)}(t)\, dt + \int_{\xi_0}^{\xi_1} \sum_{j=1}^{n} r_j(t) v^{(n-j)}(t)\, dt \right|.$$

З урахуванням нерівностей (9) звідси одержимо

$$\lambda \le \int_{a_1}^{a_n} \left[\sum_{j=1}^{n} L_j \left| v^{(n-j)}(t) \right| + \sum_{j=1}^{n} L_j \left| w^{(n-j)}(t) \right| \right] dt < \lambda \sum_{j=1}^{n} L_j \frac{h^j}{j!} + \eta \sum_{j=1}^{n} L_j \frac{h^j}{j!},$$

$$\eta \le \int_{a_1}^{a_n} \left[\sum_{j=1}^{n} L_j \left| w^{(n-j)}(t) \right| + \sum_{j=1}^{n} L_j \left| v^{(n-j)}(t) \right| \right] dt < \eta \sum_{j=1}^{n} L_j \frac{h^j}{j!} + \lambda \sum_{j=1}^{n} L_j \frac{h^j}{j!}.$$

Додаючи останні дві нерівності, дістанемо $(\lambda + \eta) < (\lambda + \eta) \sum\limits_{j=1}^{n} L_j h^j / j!$, або $1 < \sum\limits_{j=1}^{n} L_j h^j / j!$, що суперечить умові леми. ◊

Зауважимо, що лема 2 узагальнює відому теорему Валле Пуссена [21] на випадок диференціальних рівнянь із комплексними коефіцієнтами.

Теорема 2. *Нехай* $A_j(t, D) \in S^0(G)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) векторів* $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [0, T]^n$ *задача* (1), (2) *не може мати більше одного розв'язку в просторі* $C^n([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G))$.

Доведення. Враховуючи теорему 1, досить показати, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ $\quad \mu_n \{ \mathbf{t} \in [0, T]^n : \Delta(k) = 0 \} = 0$.

Нехай $\Delta^j(k; t_1, \ldots, t_{n-j})$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, − визначник, який отримується із визначника $\Delta(k)$ викреслюванням останніх j рядків і останніх j стовпців. Тоді $\{\mathbf{t} \in [0, T]^n : \Delta(k) = 0\} \subset \bigcup_{j=0}^{n-1} E_j$, де $E_{n-1} = \{\mathbf{t} \in [0, T]^n : \Delta^{n-1}(k; t_1) = 0\}$, $E_j = \{\mathbf{t} \in [0, T]^n : \Delta^j(k; t_1, \ldots, t_{n-j}) = 0,\ \Delta^{j+1}(k; t_1, \ldots, t_{n-j-1}) \neq 0\}$, $j = 0, 1, \ldots, n-2$.

Оскільки $\left.\dfrac{\partial^{n-j-1}\Delta^j(k; t_1, \ldots, t_{n-j})}{\partial t_{n-j}^{n-j-1}}\right|_{t_{n-j}=0} = \Delta^{j+1}(k; t_1, \ldots, t_{n-j-1}) \neq 0$, коли $\mathbf{t} \in E_j$, $j = 0, 1, \ldots, n-2$, і $\Delta^{n-1}(k; t_1)\big|_{t_1=0} = f_1(0, k) = 1$, то визначник $\Delta^j(k; t_1, \ldots, t_{n-j})$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, як функція змінної t_{n-j} при фіксованих $t_1, \ldots, t_{n-j-1}$ (таких, що $\mathbf{t} \in E_j$) є ненульовим розв'язком рівняння $L\left(\dfrac{d}{dt_{n-j}}, k\right)\Delta^j(k; t_1, \ldots, t_{n-j}) = 0$. Тому за лемою 2 на відрізку $[0, T]$ визначник $\Delta^j(k; t_1, \ldots, t_{n-j})$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, як функція змінної t_{n-j} при фіксованих $t_1, \ldots, t_{n-j-1}$ (таких, що $\mathbf{t} \in E_j$) має скінченну кількість нулів. Отже, $\mu_n E_j = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, а тоді й $\mu_n\{\mathbf{t} \in$ $\in [0, T]^n : \Delta(k) = 0\} = 0$. ◊

4. Надалі вважатимемо, що умова (6) справджується. Нехай $F_k(t) \in$ $\in C[0, T]$. Використовуючи метод варіації довільних сталих, отримуємо, що розв'язок задачі (4), (5) з класу $C^n[0, T]$ зображається формулою

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^{n} C_{kq} f_q(t, k) + \int_0^t H(t, \tau, k) F_k(\tau)\, d\tau, \tag{10}$$

де сталі C_{kq}, $q = 1, \ldots, n$, визначаються із системи лінійних рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n} C_{kq} f_q(t_j, k) = \varphi_{jk} - \int_0^{t_j} H(t_j, \tau, k) F_k(\tau)\, d\tau, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Визначник системи (11) співпадає з $\Delta(k)$. Застосовуючи для знаходження сталих C_{kq}, $q = 1, \ldots, n$, правило Крамера, на підставі (3) та (10) отримуємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} \left\{ \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(k)}{\Delta(k)} f_q(t, k) \left[\varphi_{jk} - \int_0^{t_j} H(t_j, \tau, k) F_k(\tau)\, d\tau \right] + \right.$$
$$\left. + \int_0^t H(t, \tau, k) F_k(\tau)\, d\tau \right\} \exp(ik, x). \tag{12}$$

Збіжність ряду (12), взагалі кажучи, пов'язана із проблемою малих знаменників, оскільки $\Delta(k)$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Зауваження 2. Якщо справджується умова (6), а $\varphi_j(x) \in \mathcal{T}(\mathcal{T}')$, $j = 1, \ldots, n$, $F(t, x) \in C([0, T]; \mathcal{T})(C([0, T]; \mathcal{T}'))$, то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), який належить до класу $C^n([0, T]; \mathcal{T})(C^n([0, T]; \mathcal{T}'))$, де $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ − простори тригонометричних поліномів і формальних тригонометричних рядів відповідно [11, розд. 2, § 6.2].

Позначимо $A = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\left\{\left(1+\sum\limits_{j=1}^{n}\max\limits_{t\in[0,T]}|A_j(t,k)|^2\right)^{1/2}G^{-1}(k)\right\}$. Нижче в роботі фігурують додатні сталі C_j, $j=1,\ldots,24$, які не залежать від k.

Теорема 3. *Нехай* $A_j(t,D)\in S^0(G)$, $j=0,1,\ldots,n-1$, *справджується умова* (6) *і нехай для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k)| > G^{-\gamma}(k)\exp(-\delta G(k)), \qquad \gamma,\ \delta\in\mathbb{R}. \tag{13}$$

Якщо $\alpha,\ \beta\ge 0$, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $\boldsymbol{\beta}=(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, *де* $\alpha_j\ge$ $\ge\alpha+\gamma+1$, $\beta_j\ge\beta+\delta+nAT$, $j=1,\ldots,n;$ $\alpha_0\ge\alpha+\gamma+1$, $\beta_0\ge\beta+\delta+(n+1)AT$, *то задача* (1), (2) *є* $(\alpha,\ \beta,\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})$*-коректною і її розв'язок зображається рядом* (12).

Д о в е д е н н я. З теореми про оцінки розв'язку задачі Коші [26] випливає, що

$$\max_{t\in[0,T]}\left|f_q^{(j)}(t,k)\right| \le C_1(1+\delta_{jn}G(k))\exp(ATG(k)), \qquad j=0,1,\ldots,n, \tag{14}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^j}{dt^j}\int_0^t H(t,\tau,k)F_k(\tau)\,d\tau\right| \le C_2\bar{F}_k(1+\delta_{jn}G(k))\exp(ATG(k)),\ \ j=0,1,\ldots,n, \tag{15}$$

$$\left|\Delta_{jq}(k)\right| \le C_3\exp((n-1)ATG(k)), \qquad j,q=1,\ldots,n, \tag{16}$$

де $\bar{F}_k=\left(\int_0^T |F_k(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$, $k\in\mathbb{Z}^p$. Тоді з нерівностей (13)–(16) і формули (12) отримуємо, що при $r=0,1,\ldots,n-1$ виконуються оцінки

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u_k^{(r)}(t)\right|^2 \le C_4\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi_{jk}|^2\,w^2(k;\gamma,\delta+nAT)+\bar{F}_k w^2(k;\gamma,\delta+(n+1)AT)\right), \tag{17}$$

і

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u_k^{(n)}(t)\right|^2 \le C_4\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_{jk}\right|^2 w^2(k;\gamma+1,\delta+nAT)+\bar{F}_k w^2(k;\gamma+1,\delta+(n+1)AT)\right). \tag{18}$$

Враховуючи елементарні співвідношення

$$w(k;\alpha,\beta)w(k;\gamma+1,\delta+nAT)=w(k;\alpha+\gamma+1,\beta+\delta+nAT)\le w(k;\alpha_j,\beta_j),$$

$$w(k;\alpha,\beta)w(k;\gamma+1,\delta+(n+1)AT)=w(k;\alpha+\gamma+1,\beta+\delta+(n+1)AT)\le w(k;\alpha_0,\beta_0)$$

та нерівність трикутника для норм, з формул (3), (17), (18) дістаємо

$$\left\|u(t,x);C^n[0,T];W_{\alpha,\beta}(G)\right\| = \sum_{r=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}\left|u_k^{(r)}(t)\right|^2 w^2(k;\alpha,\beta)} \le$$

$$\le C_5\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}|\varphi_{jk}|^2\,w^2(k;\alpha,\beta)w^2(k;\gamma+1,\delta+nAT)}\,+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}\bar{F}_k^2 w^2(k;\alpha,\beta)w^2(k;\gamma+1,\delta+(n+1)AT)}\right)\le$$

$$\le C_5 \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{|k| \ge 0} |\varphi_{jk}|^2 \, w^2(k; \alpha_j, \beta_j)} + \sqrt{\sum_{|k| \ge 0} \bar{F}_k^2 w^2(k; \alpha_0, \beta_0)} \right) \le$$

$$\le C_6 \left(\sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_j(x); W_{\alpha_j, \beta_j}(G) \right\| + \left\| F(t,x); C([0,T]; W_{\alpha_0,\beta_0}(G)) \right\| \right). \qquad (19)$$

З нерівності (19) випливає доведення теореми. ◊

5. Наступні твердження використаємо для доведення метричних теорем про оцінки знизу малих знаменників задачі (1), (2).

Лема 3. *Нехай функція* $f \in C^n([0,T]; \mathbb{R}(\mathbb{C}))$ *на відрізку* $[0,T]$ *є розв'язком диференціального рівняння*

$$f^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} p_j(t,k) f^{(j)}(t) = 0, \quad p_j(t,k) \in C([0,T]; \mathbb{R}(\mathbb{C})), \quad k \in \mathbb{Z}^p, \ j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

і нехай $\sum_{j=0}^{n} \max_{t \in [0,T]} |f^{(j)}(t)| \le M, \quad G_1(k) = \left(1 + \sum_{j=0}^{n-1} \max_{t \in [0,T]} |p_j(t,k)|^2\right)^{1/2}$. *Якщо* $\max_{1 \le j \le n} |f^{(j-1)}(0)| \ge \delta > 0$, *то для довільного* ε, $0 < \varepsilon < \dfrac{\delta \exp(-TG_1(k))}{2\sqrt{n}}$,

$$\mu_1 \{ t \in [0,T] : |f(t)| < \varepsilon \} \le C_7 M \exp\left(\frac{n}{n-1} T G_1(k)\right) \cdot \sqrt[n-1]{\frac{\varepsilon}{\delta^n}}.$$

Д о в е д е н н я. З теореми про оцінки розв'язку задачі Коші випливає, що

$$\forall t \in [0,T] \qquad \max_{1 \le j \le n} |f^{(j-1)}(t)| \ge \frac{\delta \exp(-TG_1(k))}{\sqrt{n}} \equiv \lambda. \qquad (20)$$

Використаємо побудови, здійснені при доведенні леми 4 у [19]. Розіб'ємо $[0,T]$ на відрізки I_j так, що $\mu_1 I_j < \lambda / M$, $j = 1, \ldots, m$, $m = [TM/\lambda] + 1$. Середину відрізка I_j позначимо через η_j. До множини $\{t \in [0,T] : |f(t)| < \varepsilon\}$ можуть входити точки тільки тих I_j, для яких $|f(\eta_j)| < \lambda$. Дійсно, якщо $|f(\eta_r)| \ge \lambda$ для деякого r, то з рівності $f(t_0) = f(\eta_r) + \int_{\eta_r}^{t_0} f'(\tau)\, d\tau$ дістаємо, що $|f(t_0)| \ge |f(\eta_r)| - M |t_0 - \eta_r| \ge \lambda - M\lambda/(2M) = \lambda/2 > \varepsilon$ при $t_0 \in I_r$, і тому $t_0 \notin \{t \in [0,T] : |f(t)| < \varepsilon\}$. Якщо ж $|f(\eta_r)| < \lambda$, то з огляду на умову (20) існує j, $1 \le j \le n-1$, таке, що в точці η_r або $|\operatorname{Re} f^{(j)}(\eta_r)| \ge \lambda/\sqrt{2}$, або $|\operatorname{Im} f^{(j)}(\eta_r)| \ge \lambda/\sqrt{2}$. Тоді з теореми про скінченний приріст випливає, що на всьому відрізку I_r або

$$|\operatorname{Re} f^{(j)}(t)| \ge |\operatorname{Re} f^{(j)}(\eta_r)| - M |t - \eta_r| \ge (\sqrt{2} - 1)\lambda/2,$$

або

$$|\operatorname{Im} f^{(j)}(t)| \ge |\operatorname{Im} f^{(j)}(\eta_r)| - M |t - \eta_r| \ge (\sqrt{2} - 1)\lambda/2.$$

Враховуючи очевидні включення $\{t \in I_r : |f(t)| < \varepsilon\} \subset \{t \in I_r : |\operatorname{Re} f(t)| < \varepsilon\}$, $\{t \in I_r : |f(t)| < \varepsilon\} \subset \{t \in I_r : |\operatorname{Im} f(t)| < \varepsilon\}$, за лемою 2 з [5] при $\varepsilon < \lambda/2$ маємо $\mu_1 \{t \in I_r : |f(t)| < \varepsilon\} \le C_8 (\varepsilon/\lambda)^{1/(n-1)}$. Отже, при $\varepsilon < \lambda/2$ отримуємо

$$\mu_1 \{t \in [0,T] : |f(t)| < \varepsilon\} \le \sum_{j=1}^{m} \mu_1 \{t \in I_j : |f(t)| < \varepsilon\} \le m C_8 (\varepsilon/\lambda)^{1/(n-1)}. \ ◊$$

Лема 4. *Нехай* $f \in C^{n+1}([0,T];\mathbb{R}(\mathbb{C}))$, $\sum_{j=0}^{n+1} \max_{t\in[0,T]} \left| f^{(j)}(t) \right| \le M$, $p_j(t,k) \in \in C([0,T];\mathbb{R}(\mathbb{C}))$, $j = 0,1,\dots,n-1$, $G_1(k) = 1 + \max_{0\le j\le n-1} \max_{t\in[0,T]} \sqrt[n-j]{| p_j(t,k) |}$, $k \in \mathbb{Z}^p$. *Якщо для всіх* $t \in [0,T]$ *виконується нерівність*

$$\left| f^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} p_j(t,k) f^{(j)}(t) \right| \ge \delta > 0,$$

то для довільного ε, $0 < \varepsilon < \dfrac{\delta}{2(n+1)G_1^n(k)}$,

$$\mu_1 \{ t \in [0,T] : | f(t) | < \varepsilon \} \le C_9 M G_1^n(k) \cdot \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta^{n+1}}}.$$

Д о в е д е н н я. З умов леми 4 випливає, що

$$\forall t \in [0,T] \qquad (n+1) \max_{0\le j\le n} G_1^{n-j}(k) \left| f^{(j)}(t) \right| \ge \delta. \tag{21}$$

Розіб'ємо $[0,T]$ на відрізки I_j так, що $\mu_1 I_j < \lambda/M$, $j=1,\dots,m$, $m = [TM/\lambda] + 1$, де $\lambda = \delta/((n+1)G_1^n(k))$. Середину відрізка I_j позначимо через η_j. Якщо $| f(\eta_r) | \ge \lambda$ для деякого r, то з рівності $f(t_0) = f(\eta_r) + \int_{\eta_r}^{t_0} f'(\tau)\, d\tau$ отримаємо, що $| f(t_0) | \ge | f(\eta_r) | - M | t_0 - \eta_r | \ge \lambda - M\lambda/(2M) = \lambda/2 > \varepsilon$ при $t_0 \in I_r$, і тому $t_0 \notin \{ t \in [0,T] : | f(t) | < \varepsilon \}$. Отже, до множини $\{ t \in [0,T] : | f(t) | < \varepsilon \}$ можуть входити точки тільки тих I_r, для яких $| f(\eta_r) | < \lambda$. Якщо ж $| f(\eta_r) | < \lambda$, то з умови (21) випливає, що існує j, $1 \le j \le n-1$, таке, що в точці η_r або $\left| \mathrm{Re}\, f^{(j)}(\eta_r) \right| \ge \dfrac{\delta}{\sqrt{2}\,(n+1)G_1^{n-j}(k)}$, або $\left| \mathrm{Im}\, f^{(j)}(\eta_r) \right| \ge \dfrac{\delta}{\sqrt{2}\,(n+1)G_1^{n-j}(k)}$. Тоді з теореми про скінченний приріст випливає, що на всьому відрізку I_r або $\left| \mathrm{Re}\, f^{(j)}(t) \right| \ge \left| \mathrm{Re}\, f^{(j)}(\eta_r) \right| - M | t - \eta_r | \ge \dfrac{\delta}{\sqrt{2}\,(n+1)\, G_1^{n-j}(k)} - \dfrac{\delta}{2(n+1)\, G_1^n(k)} = \dfrac{(\sqrt{2} G_1^j(k) - 1)\delta}{2(n+1)G_1^n(k)} \ge \dfrac{(\sqrt{2} - 1)\delta}{2(n+1)G_1^{n-j}(k)}$ (оскільки $G_1(k) \ge 1$), або $\left| \mathrm{Im}\, f^{(j)}(t) \right| \ge \ge \left| \mathrm{Im}\, f^{(j)}(\eta_r) \right| - M |t - \eta_r| \ge \dfrac{\delta}{\sqrt{2}(n+1)G_1^{n-j}(k)} - \dfrac{\delta}{2(n+1)\, G_1^n(k)} = \dfrac{(\sqrt{2} G_1^j(k) - 1)\delta}{2(n+1)G_1^n(k)} \ge \ge \dfrac{(\sqrt{2} - 1)\delta}{2(n+1)G_1^{n-j}(k)}$. Враховуючи очевидні включення $\{ t \in I_r : |f(t)| < \varepsilon \} \subset \subset \{ t \in I_r : |\mathrm{Re}\, f(t)| < \varepsilon \}$, $\{ t \in I_r : |f(t)| < \varepsilon \} \subset \{ t \in I_r : |\mathrm{Im}\, f(t)| < \varepsilon \}$, за лемою 2 з [5] при $\varepsilon < \lambda/2$ маємо $\mu_1 \{ t \in I_r : | f(t) | < \varepsilon \} \le C_{10} (\varepsilon/\delta)^{1/n}$. Отже, при $\varepsilon < \lambda/2$ дістаємо

$$\mu_1 \{ t \in [0,T] : | f(t) | < \varepsilon \} \le \sum_{j=1}^{m} \mu_1 \{ t \in I_j : | f(t) | < \varepsilon \} \le m C_{10} (\varepsilon/\delta)^{1/n}. \ \Diamond$$

Лема 5 [25]. *Нехай* $f \in C^n([0,T];\mathbb{R})$, $b_j(t,k) \in C^{n-j}([0,T];\mathbb{R})$, $j = 1,\dots,n$, $G_1(k) = \max_{1\le j\le n} \max_{t\in[0,T]} | b_j(t,k) |$. *Якщо виконується нерівність*

$$|(d/dt - b_n(t,k))\dots(d/dt - b_1(t,k))f(t)| \ge \delta, \qquad t \in [0,T],$$

то для довільного $\varepsilon > 0$

$$\mu_1\{t \in [0,T] : |f(t)| < \varepsilon\} \le C_{11} \exp(G_1(k)T) \cdot \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}} . \ \Diamond$$

6. Вияснимо, наскільки «багата» множина задач (1), (2), для яких виконується нерівність (13).

Теорема 4. *Якщо* $A_j(t,D) \in S^0(G)$, $j = 0,1,\dots,n-1$, *то для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$) *векторів* $\mathbf{t} = (t_1,\dots,t_n) \in [0,T]^n$ *нерівність* (13) *виконується для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\gamma \ge (\lambda+1)(n^n-1)$, $\delta \ge (n^n-1)\mu + AT(2n^{n+1}-n^2-n)/(n-1)$.

Д о в е д е н н я. Позначимо через $C(n,m)$, $1 \le m \le n$, множину всіх наборів $\omega = (i_1,\dots,i_m)$, складених з m натуральних чисел $i_1,\dots,i_m$ таких, що $1 \le i_1 < \dots < i_m \le n$. Для набору $\omega = (i_1,\dots,i_m) \in C(n,m)$ приймемо, що $\operatorname{set}\omega = \{i_1,\dots,i_m\}$, $\operatorname{ord}_\omega(q) = s$, якщо $q \in \operatorname{set}\omega$ і $q = i_s$ для деякого $s \in \{1,\dots,m\}$. На множині $\bigcup_{m=1}^{n} C(n,m)$ всіх наборів введемо бінарне відношення $\prec$ за правилом: $\omega_1 \prec \omega_2$ для $\omega_1,\omega_2 \in \bigcup_{m=1}^{n} C(n,m)$, якщо $\operatorname{set}\omega_1 \subset \operatorname{set}\omega_2$. Для набору $\omega = (i_1,\dots,i_m) \in C(n,m)$ покладемо

$$\Delta_\omega(k;t_1,\dots,t_m) = \begin{vmatrix} f_{i_1}(t_1,k) & \dots & \dots & f_{i_m}(t_1,k) \\ f_{i_1}(t_2,k) & \dots & \dots & f_{i_m}(t_2,k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{i_1}(t_m,k) & \dots & \dots & f_{i_m}(t_m,k) \end{vmatrix},$$

$$\xi_\omega(k) \equiv \xi_\omega(k;t_1,\dots,t_{m-1}) = \max_{1\le j\le n} \left| \left. \frac{\partial^{j-1}\Delta_\omega(k;t_1,\dots,t_{m-1},t_m)}{\partial t_m^{j-1}} \right|_{t_m=0} \right|.$$

Кожний визначник $\Delta_\omega(k;t_1,\dots,t_m)$, $\omega \in C(n,m)$, $m = 2,\dots,n$, розкладемо за елементами останнього рядка і знайдемо його похідні за змінною t_m до $(n-1)$-го порядку включно:

$$\frac{\partial^{r-1}\Delta_\omega(k;t_1,\dots,t_m)}{\partial t_m^{r-1}} = \sum_{\substack{\sigma\in C(n,m-1),\\ \sigma\prec\omega}} (-1)^{h(\sigma)} f_{q(\sigma)}^{(r-1)}(t_m,k)\,\Delta_\sigma(k;t_1,\dots,t_{m-1}),$$

$$r = 1,\dots,n, \quad q(\sigma) = \operatorname{set}\omega \backslash \operatorname{set}\sigma, \quad h(\sigma) = m + \operatorname{ord}_\omega(q(\sigma)). \tag{22}$$

Згідно з вибором системи функцій $\{f_q(t,k),\ q = 1,\dots,n\}$ із формул (22) дістаємо, що визначник $\Delta_\omega(k;t_1,\dots,t_m)$, $\omega \in C(n,m)$, $m = 2,\dots,n$, як функція змінної t_m (при фіксованих $t_1,\dots,t_{m-1}$) є розв'язком диференціального рівняння $L(d/dt_m,k)\,\Delta_\omega(k;t_1,\dots,t_m) = 0$ і справджує такі початкові умови:

$$\left. \frac{\partial^{r-1}\Delta_\omega(k;t_1,\dots,t_m)}{\partial t_m^{r-1}} \right|_{t_m=0} =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{h(\sigma)}\Delta_\sigma(k;t_1,\dots,t_{m-1}), & r \in \operatorname{set}\omega,\ \sigma \in C(n,m-1),\ \operatorname{set}\sigma = \operatorname{set}\omega\backslash\{r\}, \\ 0, & r \notin \operatorname{set}\omega. \end{cases} \tag{23}$$

Із співвідношень (23) отримуємо, що для $\omega \in C(n,m)$, $m = 2,\dots,n$,

$$\xi_\omega(k) \equiv \xi_\omega(k; t_1,\dots,t_{m-1}) = \max_{\substack{\sigma\in C(n,m-1),\\ \sigma\prec\omega}} |\Delta_\sigma(k; t_1,\dots,t_{m-1})|. \tag{24}$$

Із формул (24) випливає справедливість таких включень:

$$\forall\omega \in C(n,m), \quad m = 2,\dots,n, \quad \{\mathbf{t} \in [0,T]^n : |\xi_\omega(k; t_1,\dots,t_{m-1})| < \alpha\} \subset$$

$$\subset \bigcup_{\substack{\sigma\in C(n,m-1),\\ \sigma\prec\omega}} \{\mathbf{t} \in [0,T]^n : |\Delta_\sigma(k; t_1,\dots,t_{m-1})| < \alpha\}, \quad \alpha > 0. \tag{25}$$

Розглянемо такі множини: $B_k = \{\mathbf{t} \in [0,T]^n : |\Delta(k; t_1,\dots,t_n)| < \nu_n\}$, $B_k(\omega) = \{\mathbf{t} \in [0,T]^n : |\Delta_\omega(k; t_1,\dots,t_m)| < \nu_m,\ \xi_\omega(k; t_1,\dots,t_{m-1}) \ge \nu_{m-1}\}$, де $\omega \in C(n,m)$, $m = 1,\dots,n$, $\nu_m \equiv \nu_m(k) = G^{-\rho_m}(k)\exp(-\eta_m G(k))$, $\rho_m = (\lambda+1)(n^m-1)$, $\eta_m = (n^m-1)\mu + AT(2n^{m+1} - (m+2)n + m)/(n-1)$, $m = 0,1,\dots,n$. Враховуючи включення (25), легко перевірити, що $B_k \subset \bigcup_{m=1}^{n} \bigcup_{\omega\in C(n,m)} B_k(\omega)$.

Оскільки $A_j(t,D) \in S^0(G)$, $j = 0,1,\dots,n-1$, то з формул (14), (22) випливає, що для довільних $t_1,\dots,t_m \in [0,T]$ виконується нерівність

$$\sum_{j=0}^{n} \max_{t_m\in[0,T]} \left| \partial^j \Delta_\omega(k; t_1,\dots,t_m)/(\partial t_m)^j \right| \le C_{12} G(k) \exp(mATG(k)).$$

Тоді на підставі твердження леми 3 отримаємо, що

$$\mu_1 B_k(\omega; t_1,\dots,t_{m-1},t_{m+1},\dots,t_n) \le C_{13} G(k) \exp((m + n/(n-1))ATG(k)) \times$$

$$\times (\nu_m/\nu_{m-1}^n)^{1/(n-1)} = C_{13} G^{1+(n\rho_{m-1}-\rho_m)/(n-1)}(k) \times$$

$$\times \exp\big((mAT + n/(n-1)AT + (n\eta_{m-1} - \eta_m)/(n-1))G(k)\big) =$$

$$= C_{13} G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k)), \qquad \omega \in C(n,m), \quad m = 1,\dots,n, \tag{26}$$

де $B_k(\omega; t_1,\dots,t_{m-1},t_{m+1},\dots,t_n)$, $\omega \in C(n,m)$, $m = 1,\dots,n$, позначає множину $\{t_m \in [0,T] : (t_1,\dots,t_{m-1},t_m,t_{m+1},\dots,t_n) \in B_k(\omega)\}$. Інтегруючи оцінки (26) за змінними $t_1,\dots,t_{m-1},t_{m+1},\dots,t_n$ у кубі $[0,T]^{n-1}$, дістаємо

$$\mu_n B_k(\omega) \le C_{13} T^{n-1} G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k)), \quad \omega \in C(n,m),\ m = 1,\dots,n. \tag{27}$$

З нерівностей (27) випливає, що $\sum_{|k|\ge 0} \mu_n B_k \le \sum_{m=1}^{n} \sum_{\omega\in C(n,m)} \sum_{|k|\ge 0} \mu_n B_k(\omega) < \infty$.

За лемою Бореля – Кантеллі [15] міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ множини тих векторів $\mathbf{t}$, які належать до нескінченної кількості множин B_k, дорівнює нулеві. ◊

З теорем 2, 3, 4 випливає наступне твердження про коректність задачі (1), (2) для майже всіх векторів $\mathbf{t} \in [0,T]^n$.

Теорема 5. *Нехай* $A_j(t,D) \in S^0(G)$, $j = 0,1,\dots,n-1$, *і нехай* α, $\beta \ge 0$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, *де* $\alpha_j \ge \alpha + \gamma + 1$, $\beta_j \ge \beta + \delta + nAT$, $j = 1,\dots,n$, $\alpha_0 \ge \alpha + \gamma + 1$, $\beta_0 \ge \beta + \delta + (n+1)AT$, $\delta \ge (n^n-1)\mu + AT(2n^{n+1} - n^2 - n)/(n-1)$, $\gamma \ge (\lambda+1)(n^n-1)$. *Для майже всіх (стосовно* *міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$) *векторів* $\mathbf{t} \in [0,T]^n$ *задача* (1), (2) *є* $(\alpha,\ \beta,\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})$*-коректною і її розв'язок зображається рядом* (12).

7. Розглянемо частковий випадок задачі (1), (2), коли оператор $L(\partial/\partial t, D)$ у рівнянні (1) має вигляд

$$L(\partial/\partial t, D) = (\partial/\partial t - B_n(t,D))\,(\partial/\partial t - B_{n-1}(t,D))\ldots(\partial/\partial t - B_1(t,D)), \quad (28)$$

де $B_j(t,D) \in S^{n-j}(G(k))$, $j = 1,\ldots,n$, тобто $L(\partial/\partial t, D)$ є композицією операторів першого порядку (дія операторів у формулі (28) визначається справа наліво). Для кожного j, $1 \le j \le n$, позначимо

$$L_j(\partial/\partial t, D) = (\partial/\partial t - B_j(t,D))\ldots(\partial/\partial t - B_1(t,D)),$$

$$\lambda_j(t,k) = \int_0^t B_j(\tau,k)\,d\tau, \quad I_j(t,k) = \exp(\lambda_j(t,k) - \lambda_{j-1}(t,k)), \quad \lambda_0(t,k) \equiv 0.$$

Відомо [15], що функції

$$g_1(t,k) = I_1(t,k),$$

$$g_2(t,k) = I_1(t,k)\int_0^t I_2(t_1,k)\,dt_1,$$

$$g_3(t,k) = I_1(t,k)\int_0^t I_2(t_1,k)\left(\int_0^{t_1} I_3(t_2,k)dt_2\right)dt_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$g_n(t,k) = I_1(t,k)\int_0^t I_2(t_1,k)\left(\int_0^{t_1} I_3(t_2,k)\ldots\left(\int_0^{t_{n-2}} I_n(t_{n-1},k)\,dt_{n-1}\right)\ldots dt_2\right)dt_1 \quad (29)$$

утворюють на відрізку $[0,T]$ фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння $L(d/dt,k)\,y(t) = 0$, причому $g_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{jq}$, $j = 1,\ldots,q$, і для довільного j, $j = 2,\ldots,n$, виконуються рівності

$$L_{j-1}(d/dt,k)\,g_q(t,k) = \delta_{jq}\exp(\lambda_j(t,k)), \qquad t \in [0,T], \quad q = 1,\ldots,j. \quad (30)$$

Нехай $\Gamma(k) \equiv \Gamma(k; t_1,\ldots,t_n) = \det\|\,g_q(t_j,k)\,\|_{j,q=1}^n$, $\Gamma_{jq}(k)$, $j,q = 1,\ldots,n$, – алгебричне доповнення елемента $g_q(t_j,k)$ у визначнику $\Gamma(k)$,

$$b_1 = \max_{1\le j\le n}\ \sup_{k\in\mathbb{Z}^p}\ \{\max_{t\in[0,T]} |\operatorname{Re} B_j(t,k)| \,/\, G(k)\},$$

$$b_2 = -\min\{0;\ \min_{1\le j\le n}\ \inf_{k\in\mathbb{Z}^p}\ \min_{t\in[0,T]} \operatorname{Re} B_j(t,k)\,/\,G(k)\}.$$

Теорема 6. *Нехай* $B_j(t,D) \in S^{n-j}(G)$, $B_j(t,k) \in C^{n-j}([0,T];\mathbb{R})$, $j = 0,\ldots,n-1$. *Для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$) *векторів* $\mathbf{t} \in [0,T]^n$ *нерівність*

$$|\,\Gamma(k)\,| > G^{-\gamma}(k)\exp(-\,\delta G(k)) \quad (31)$$

виконується при $\gamma \ge \lambda n(n-1)/2$, $\delta \ge n(n-1)(b_1 T + \mu)/2 + n b_2 T$ *для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\Gamma_j(k) \equiv \Gamma(k; t_1,\ldots,t_j)$, $j = 1,\ldots,n$, – визначник, який отримується з $\Gamma(k; t_1,\ldots,t_n)$ викреслюванням останніх $n-j$ рядків та останніх $n-j$ стовпців; $\Gamma_{jr}(k;t_1,\ldots,t_{j-1})$ − алгебричне доповнення елемента $g_r(t_j,k)$, $r=1,\ldots,j$, у визначнику $\Gamma_j(k;t_1,\ldots,t_j)$. Розкладаючи визначник $\Gamma_j(k;t_1,\ldots,t_j)$ за елементами останнього рядка, дістанемо рівності

$$\Gamma_j(k;t_1,\ldots,t_j)=\sum_{r=1}^{j} g_r(t_j,k)\,\Gamma_{jr}(k;t_1,\ldots,t_{j-1}),\qquad j=2,\ldots,n. \tag{32}$$

Із формул (30), (32) для $j=2,\ldots,n$ випливають такі співвідношення:

$$L_{j-1}(\partial/\partial t_j,k)\,\Gamma_j(k;t_1,\ldots,t_j)=\exp(\lambda_j(t_j,k))\,\Gamma_{j-1}(k;t_1,\ldots,t_{j-1}). \tag{33}$$

Розглянемо такі множини:

$$M(k)=\{\mathbf{t}\in[0,T]^n:|\Gamma(k;t_1,\ldots,t_n)|<\nu_n\},\quad M_1(k)=\{\mathbf{t}\in[0,T]^n:|\Gamma_1(k;t_1)|<\nu_1\},$$

$$M_j(k)=\{\mathbf{t}\in[0,T]^n:|\Gamma_j(k;t_1,\ldots,t_j)|<\nu_j,\ |\Gamma_{j-1}(k;t_1,\ldots,t_{j-1})|\ge\nu_{j-1}\},\ j=2,\ldots,n,$$

де $\nu_j\equiv\nu_j(k)=G^{-\lambda\rho_j}(k)\exp(-\eta_j G(k))$, $\rho_j=j(j-1)/2$, $\eta_j=jb_2T+\rho_j b_1T+\rho_j\mu$, $j=1,\ldots,n$.

Якщо $\mathbf{t}\in M_j(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, $j=2,\ldots,n$, то з рівностей (33) випливає, що

$$|L_{j-1}(\partial/\partial t_j,k)\,\Gamma_j(k;t_1,\ldots,t_j)|\ge\min_{t_j\in[0,T]}\exp(\lambda_j(t_j,k))\,\nu_{j-1}\ge\nu_1\nu_{j-1}. \tag{34}$$

Оскільки $\Gamma_j(k;t_1,\ldots,t_j)$ − дійснозначна функція, то з леми 5 і нерівностей (34) отримуємо, що для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$

$$\mu_1 M_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n)\le C_{14}\exp(b_1TG(k))\sqrt[j-1]{\nu_j/(\nu_1\nu_{j-1})}=$$

$$=C_{14}\sqrt[j-1]{\frac{\exp((\eta_{j-1}-\eta_j+b_2T+(j-1)b_1T)G(k))}{G^{\lambda(\rho_j-\rho_{j-1})}(k)}}=\frac{C_{14}}{G^{\lambda}(k)\exp(\mu G(k))}, \tag{35}$$

де $M_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n)=\{t_j\in[0,T]:(t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n)\in M_j(k)\}$, $j=$ $=2,\ldots,n$. Інтегруючи оцінки (35) за змінними $t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n$ у кубі $[0,T]^{n-1}$, дістанемо, що для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$

$$\mu_n M_j(k)\le C_{14}T^{n-1}G^{-\lambda}(k)\exp(-\mu G(k)),\qquad j=2,\ldots,n. \tag{36}$$

Оскільки $|\exp(\lambda_1(t,k))|\ge\exp(-b_2TG(k))=\nu_1(k)$, $t\in[0,T]$, то $M_1(k)=\varnothing$, і, отже, $M(k)=\bigcup_{j=2}^{n}M_j(k)$. З нерівностей (36) випливає збіжність ряду $\sum_{|k|\ge0}\mu_n M(k)$. За лемою Бореля − Кантеллі міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ множини тих векторів $\mathbf{t}$, які належать до нескінченної кількості множин $M(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, дорівнює нулеві. ◊

Теорема 7. *Нехай* $B_j(t,D)\in S^{n-j}(G)$, $B_j(t,k)\in C^{n-j}([0,T];\mathbb{C})$ *і нехай* $|\operatorname{Re}B_j(t,k)-\operatorname{Re}B_{j-1}(t,k)|\le b_3G(k)$, $t\in[0,T]$, $j=1,\ldots,n$, $B_0(t,k)\equiv0$. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\mathbf{t}\in[0,T]^n$ *нерівність* (31) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\gamma \geq (n!-1)\lambda + n! - 2n + 1 + 2\sum_{q=1}^{n-1}\frac{n!}{q!}$, $\delta \geq (n!-1)\mu + s_n b_2 T + r_n b_3 T$, $s_n = n! + \sum_{q=1}^{n-1}\frac{n!}{q!}$, $r_n = n!\sum_{q=0}^{n-2}\frac{q+3}{2q!}$.

Д о в е д е н н я. Використаємо схему доведення теореми 6 і введені там позначення. Розглянемо такі множини:

$$M(k) = \{\mathbf{t} \in [0,T]^n : |\Gamma(k;t_1,\ldots,t_n)| < \xi_n\}, \quad M_1(k) = \{\mathbf{t} \in [0,T]^n : |\Gamma_1(k;t_1)| < \xi_1\},$$

$$M_j(k) = \{\mathbf{t} \in [0,T]^n : |\Gamma_j(k;t_1,\ldots,t_j)| < \xi_j, \ |\Gamma_{j-1}(k;t_1,\ldots,t_{j-1})| \geq \xi_{j-1}\}, \ j = 2,\ldots,n,$$

де $\xi_j = G^{-\rho_j}(k)\exp(-\eta_j G(k))$, $j = 1,\ldots,n$, $\rho_j = (j!-1)\lambda + j! - 2j + 1 + 2\sum_{q=1}^{j-1}\frac{j!}{q!}$,

$$\eta_j = (j!-1)\mu + s_j b_2 T + r_j b_3 T, \qquad s_j = j! + \sum_{q=1}^{j-1}\frac{j!}{q!}, \quad r_j = j!\sum_{q=0}^{j-2}\frac{q+3}{2q!}, \quad j = 2,\ldots,n,$$

$\rho_1 = 0$, $s_1 = 1$, $r_1 = 0$.

Якщо $\mathbf{t} \in M_j(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, $j = 2,\ldots,n$, то з (30), (32) випливає, що

$$|L_{j-1}(\partial/\partial t_j, k)\Gamma_j(k;t_1,\ldots,t_j)| \geq \min_{t_j \in [0,T]} \exp(\operatorname{Re}\lambda_j(t_j,k))\xi_{j-1} \geq \xi_1\xi_{j-1}. \tag{37}$$

Із формул (29) та умов теореми 7 випливають наступні оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]} |g_q^{(j)}(t,k)| \leq C_{15}G^j(k)\exp(qb_3TG(k)/2), \ j = 0,1,\ldots,n, \ q = 1,\ldots,n. \tag{38}$$

З нерівностей (38) випливає, що для довільних $t_1,\ldots,t_j \in [0,T]$

$$|\partial^r\Gamma_j(k;t_1,\ldots,t_j)/(\partial t_j)^r| \leq C_{16}G^j(k)\exp(j(j+1)b_3TG(k)/2), \ r = 0,1,\ldots,j. \tag{39}$$

Оскільки $B_j(t,D) \in S^{n-j}(G)$, $j = 1,\ldots,n$, то максимум на $[0,T]$ модуля коефіцієнта диференціального виразу $L_{j-1}(\partial/\partial t_j, k)$ при похідній $(\partial/\partial t_j)^q$, $q = 0,1,\ldots,j-1$, не перевищує $C_{17}G^{j-q-1}(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Тоді за лемою 4 з нерівностей (37)–(39) отримуємо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$

$$\begin{aligned}\mu_1 M_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n) &\leq C_{18}G^{2j-1}(k)\exp(j(j+1)b_3TG(k)/2) \times \\ &\times (\xi_j/(\xi_1^j\xi_{j-1}^j))^{1/(j-1)} = C_{18}G^{2j-1+(j\rho_{j-1}-\rho_j)/(j-1)}(k) \times \\ &\times \exp((j(j+1)b_3T/2 + (j\eta_{j-1} + jb_2T - \eta_j)/(j-1))G(k)) = \\ &= C_{18}G^{-\lambda}(k)\exp(-\mu G(k)), \qquad j = 2,\ldots,n,\end{aligned} \tag{40}$$

де $M_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n) = \{t_j \in [0,T] : (t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n) \in M_j(k)\}$, $j = 2,\ldots,n$. Інтегруючи оцінки (40) за змінними $t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n$ у кубі $[0,T]^{n-1}$, дістанемо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$

$$\mu_n M_j(k) \leq C_{18}T^{n-1}G^{-\lambda}(k)\exp(-\mu G(k)), \qquad j = 2,\ldots,n. \tag{41}$$

Оскільки $|\exp(\lambda_1(t,k))| \geq \exp(-b_2TG(k)) = \xi_1(k)$, $t \in [0,T]$, то $M_1(k) = \varnothing$, і, отже, $M(k) = \bigcup_{j=2}^{n} M_j(k)$. З формул (41) випливає, що $\sum_{|k|\geq 0} \mu_n M(k) \leq$

$\leq \sum_{|k|\geq 0} \sum_{j=2}^{n} \mu_n M_j(k) \leq C_{19} \sum_{|k|\geq 0} G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k)) < \infty$. За лемою Бореля – Кантеллі міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ множини тих векторів $\mathbf{t}$, які належать до нескінченної кількості множин $M(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, дорівнює нулеві. ◊

Теорема 8. *Нехай* $B_j(t,D) \in S^{n-j}(G)$, $|\operatorname{Re} B_j(t,k) - \operatorname{Re} B_{j-1}(t,k)| \leq b_3 G(k)$, $j = 1,\ldots,n$, $B_0(t,k) \equiv 0$. *Нехай* $\gamma = \lambda n(n-1)/2$, $\delta = n(n-1)(b_1 T + \mu)/2 + n b_2 T$, *коли* $B_j(t,k) \in C^{n-j}([0,T];\mathbb{R})$, $j = 1,\ldots,n$, *і нехай* $\gamma = (n!-1)\lambda + n! - 2n + 1 + 2\sum_{q=1}^{n-1} \frac{n!}{q!}$, $\delta = (n!-1)\mu + s_n b_2 T + r_n b_3 T$, $s_n = n! + \sum_{q=1}^{n-1} \frac{n!}{q!}$, $r_n = n! \sum_{q=0}^{n-2} \frac{q+3}{2q!}$, *коли* $B_j(t,k) \in C^{n-j}([0,T];\mathbb{C})$, $j = 1,\ldots,n$. *Якщо* $\alpha, \beta \geq 0$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$, *де* $\alpha_j \geq \alpha + n + \gamma$, $\beta_j \geq \beta + \delta + n(n+1)b_3 T/2$, $j = 1,\ldots,n$, $\alpha_0 \geq \alpha + 2n + \gamma$, $\beta_0 \geq \beta + \delta + n(n+3)b_3 T/2$, *то для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$) *векторів* $\mathbf{t} \in [0,T]^n$ *задача* (1), (2), (28) *є* (α, β, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$)*-коректною.*

Д о в е д е н н я. Для коефіцієнтів Фур'є $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, розв'язку задачі (1), (2), (28) справедливі наступні зображення:

$$u_k(t) = \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Gamma_{jq}(k)}{\Gamma(k)} g_q(t,k) \left[\varphi_{jk} - \int_0^{t_j} h(t_j,\tau,k) F_k(\tau)\, d\tau \right] + \int_0^t h(t,\tau,k) F_k(\tau)\, d\tau, \quad (42)$$

де $h(t,\tau,k) = g_n(t-\tau,k)$. З нерівностей (38) випливає, що

$$\max_{t\in[0,T]} \left| \frac{d^j}{dt^j} \int_0^t h(t,\tau,k) F_k(\tau)\, d\tau \right| \leq C_{20} \bar{F}_k G^j(k) \exp(n b_3 T G(k)),\ j = 0,1,\ldots,n, \quad (43)$$

$$|\Gamma_{jq}(k)| \leq C_{21} \exp((n(n+1)/2 - q b_3) T G(k)), \quad j,q = 1,\ldots,n. \quad (44)$$

Тоді з нерівностей (31), (38), (43), (44) та формул (3), (42) отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\mathbf{t} \in [0,T]^n$

$$\begin{aligned}
&\| u(t,x); C^n([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G)) \| \leq \\
&\leq C_{22} \Bigg(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{|k|\geq 0} |\varphi_{jk}|^2 w^2(k; \alpha+n+\gamma, \beta+\delta+n(n+1)b_3 T/2)} + \\
&+ \sqrt{\sum_{|k|\geq 0} \bar{F}_k^2 w^2(k; \alpha+2n+\gamma, \beta+\delta+n(n+3)b_3 T/2)} \Bigg) \leq \\
&\leq C_{23} \left(\sum_{j=1}^{n} \| \varphi_j(x); W_{\alpha_j,\beta_j}(G) \| + \| F(t,x); C([0,T]; W_{\alpha_0,\beta_0}(G)) \| \right).
\end{aligned}$$

З останньої нерівності випливає доведення теореми. ◊

8. У теоремах 6, 7 вказано оцінки знизу для γ, δ, при яких нерівність (31) виконується для майже всіх векторів $\mathbf{t} \in [0,T]^n$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Однак можуть існувати такі вектори $\mathbf{t} \in [0,T]^n$, що нерівність (31) не виконується для безмежної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при як завгодно великих $\gamma,\ \delta$. Покажемо це на прикладі такої задачі:

$$(\partial/\partial t - i\,B_2(t,-i\,\partial/\partial x))\ (\partial/\partial t - i\,B_1(t,-i\,\partial/\partial x))\,u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_1,$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \qquad u(t_1,x) = \varphi_2(x), \qquad x \in \Omega_1, \tag{45}$$

де $B_j \in S^{2-j}(G),\ j = 1,2,\quad B_2(t,k) \equiv B_1(t,k) + 2k,\ k \in \mathbb{Z},\ \ B_1(t,k) \in C^1([0,T];\mathbb{R})$.

Для задачі (45) $|\,\Gamma(k)\,| = |\,k\,|^{-1}\,|\sin(kt_1)\,|,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. За теоремою Хінчина [27, с. 48] для довільних $\gamma,\ \delta > 0$ існує таке ірраціональне число $t_1 > 0$, що нерівність $|\,kt_1 - m\pi\,| < |\,k\,|G^{-\gamma}(k)\exp(-\,\delta G(k))$ має нескінченну множину розв'язків у цілих числах $k,\ m$. Оскільки $|\sin(kt_1)\,| = |\sin(kt_1 - m\pi)\,| \le \le |\,kt_1 - m\pi\,|$, де $m \in \mathbb{Z}$, то нерівність $|\,\Gamma(k)\,| < G^{-\gamma}(k)\exp(-\,\delta G(k))$ має безмежну кількість розв'язків у цілих числах k.

Нижні межі для $\gamma,\ \delta$ у нерівності (31) в окремих випадках є точнішими, ніж у теоремі 6. Розглянемо задачу з умовами 2 (у якій $t_1 > \theta > 0$) для рівняння $(\partial/\partial t - B(t,-\,i\partial/\partial x))^n\,u(t,x) = 0,\quad (t,x) \in Q_1$, де $B(t,-\,i\,\partial/\partial x) \in \in S^{n-1}(G),\ \ \min\limits_{t\in[0,T]} \operatorname{Re} B(t,k) \ge bG(k),\ \ b > 0,\ \ k \in \mathbb{Z}$. Визначник $\Gamma(k)$ такої задачі обчислюється за формулою

$$\Gamma(k) = \exp\left(\int\limits_0^{t_1} B(\tau,k)\,d\tau + \ldots + \int\limits_0^{t_n} B(\tau,k)\,d\tau\right)\prod_{j=1}^{n-1}(j\,!)^{-1}\prod_{n\ge j>q\ge 1}(t_j - t_q)\,. \tag{46}$$

З рівності (46) випливає, що $|\,\Gamma(k)\,| \ge C_{24}\exp(n\theta bG(k)),\ C_{24} = C_{24}(\mathbf{t},n) > 0$. У цій задачі проблема малих знаменників відсутня.

1. *Абдо С. А., Юрчук Н. И.* Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. I. Априорные оценки // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21,** № 3. – С. 417–425.
2. *Абдо С. А., Юрчук Н. И.* Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. II. Разрешимость и свойства решений // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21,** № 5. – С. 806–815.
3. *Антыпко И. И., Перельман М. А.* О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Теория функций, функцион. анализ и их приложение. – 1972. – Вып. 16. – С. 98–109.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
5. *Берник В. И., Пташник Б. И., Сальга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13,** № 4. – С. 637–645.
6. *Борок В. М., Перельман М. А.* О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29–34.
7. *Валицкий Ю. Н.* Корректность задачи для дифференциального уравнения при заданных значениях функции и ее производных в нескольких точках // Сиб. мат. журн. – 1996. – **37,** № 2. – С. 251–258.
8. *Валицкий Ю. Н.* Корректность многоточечной задачи для уравнения с операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 1988. – **29,** № 4. – С. 44–53.
9. *Василишин П. Б.* Багатоточкові задачі для диференціальних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 2001. – 20 с.
10. *Василишин П. Б., Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1996. – **48,** № 11. – С. 1468–1476.
11. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.

12. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – К.: Наук. думка, 1993. – 232 с.
13. *Каленюк П. І., Нитребич З. М., Плешівський Я. М.* Багатоточкова задача для неоднорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 58. – С. 144–152.
14. *Клюс І. С., Нитребич З. М.* Багатоточкова задача для диференціального рівняння із частинними похідними, що розкладається в добуток лінійних відносно диференціювання множників // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 2000. – № 407. – С. 220–226.
15. *Пташник Б. И.* Некорректные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
16. *Пташник Б. Й., Клюс І. С.* Багатоточкова задача для псевдодифенціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 22–29.
17. *Пташник Б. Й., Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для безтипних факторизованих диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 1. – С. 66–79.
18. *Пташник Б. Й., Штабалюк П. І.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь у класі функцій, майже періодичних по просторових змінних // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1992. – Вып. 35. – С. 210–215.
19. *Пяртли А. С.* Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства // Функцион. анализ и его приложения. – 1969. – **3**, № 4. – С. 59–62.
20. *Сайдаматов Э. М.* О корректности неоднородных граничных задач для псевдодифференциальных уравнений // Узб. мат. журн. – 1995. – № 2. – С. 77–88.
21. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: В 2 т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.
22. *Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для лінійних параболічних та безтипних дифенціальних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1996. – 20 с.
23. *Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 4. – С. 42–48.
24. *Симотюк М. М.* Задача з двоточковими умовами для рівняння з псевдодиференціальними операторами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 29–35.
25. *Симотюк М. М.* Про оцінку мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 90–95.
26. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
27. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.
28. *Mikusinski J.* Sur l'équation $x^{(n)}(t) + A(t)x(t) = 0$ // Ann. Pol. Math. – 1955. – No. 1-2. – P. 207–221.

МНОГОТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Исследована корректность задачи с многоточечными условиями по выделенной переменной и условиями периодичности за остальными координатами для псевдодифференциальных уравнений с частными производными. Установлены условия существования и единственности решения задачи, доказаны метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, возникающих при построении решения задачи.

MULTIPOINT PROBLEM FOR PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

The correctness of the problem with multipoint conditions on temporary variable and conditions of periodicity on spatial coordinates for partial pseudo-differential equations is investigated. The conditions of existence and uniqueness of the solution of the problem are established. The metric theorems of estimation of small denominators of the problem are proved.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.05.03