УДК 512.55: 512.64

М. Я. Комарницький [1], В. М. Петричкович [2]

ТЕОРЕТИКО-СТРУКТУРНІ ВЛАСТИВОСТІ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ СКІНЧЕННО ПОРОДЖЕНИХ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ

На основі запропонованої загальної концепції еквівалентності матриць над кільцями виконано огляд результатів, що стосуються різних типів редукцій матриць над кільцями скінченно породжених головних ідеалів і які розвивають ідеї П. С. Казімірського стосовно проблеми факторизації матриць. Вивчаються множини регулярних адекватних елементів у комутативних кільцях скінченно породжених головних ідеалів, дільники нуля яких належать радикалу Джекобсона. Описується вплив різнотипних послаблень умови адекватності на процес діагональної редукції матриць. Досліджуються узагальнена та напівскалярна еквівалентності матриць і їх скінченних наборів над областями Безу та кільцями многочленів. Встановлено їх певні форми щодо таких еквівалентностей і наведено деякі застосування цих форм.

Дослідження в галузі алгебри у Львові постійно заохочувались і підтримувались академіком Ярославом Степановичем Підстригачем. Цей огляд присвячуємо його світлій пам'яті.

1. Вступні зауваження та узагальнення концепції еквівалентності матриць над кільцями. У цій статті розглядаються матриці, як правило, над асоціативно-комутативними кільцями з одиничним елементом 1, причому $1 \neq 0$. Таке кільце, якщо в тексті на нього не накладено інших умов, завжди позначатимемо через R. Вживатимемо термін «регулярний елемент» у розумінні «недільник нуля». Вслід за П. М. Коном [57] називатимемо кільце, в якому сума і перетин будь-яких двох головних ідеалів є головним ідеалом, кільцем Безу. Якщо лише сума будь-яких двох (а, отже, й будь-якої скінченної кількості) головних ідеалів знову є головним ідеалом, то таке кільце називають кільцем скінченно породжених головних ідеалів. Достатньо систематичне дослідження кілець цього класу можна знайти в [76] або в монографії [33]. Як звичайно, під радикалом Джекобсона кільця R розумітимемо перетин всіх максимальних ідеалів цього кільця. Множину усіх первинних ідеалів кільця R, наділену топологією Зариського, називають спектром цього кільця. Замкнені точки цього топологічного простору утворюють максимальний спектр кільця R. Обидва ці простори є ще й частково впорядкованими множинами стосовно звичайного включення, які є деревами, якщо кільце задовольняє умову Безу. Кажуть, що необоротний елемент кільця є вільним від квадратів, якщо він не ділиться на квадрат жодного необоротного елемента кільця. Під мультиплікативно замкненою множиною кільця, як звичайно, розумітимемо підмножину, замкнену щодо множення, яка містить одиницю, але не містить нуля. Таку множину називають насиченою, якщо вона є замкненою щодо переходу до дільників її елементів. Найчастіше розглядатимемо мультиплікативно замкнені множини, які складаються з регулярних елементів.

Нехай R – кільце. Через $M(m,n,R)$ позначатимемо множину всіх $(m \times n)$-матриць над R, а через $M(n,R)$ – кільце $(n \times n)$-матриць. Очевидно, що $M(m,n,R)$ має структуру $(M(m,R),\ M(n,R))$ – бімодуля; $\mathrm{GL}(n,R)$ означає повну лінійну групу, тобто групу оборотних матриць над кільцем R. Матриці з елементами з кільця R перелічених нижче трьох типів називатимемо елементарними:

– діагональна матриця зі зворотними елементами на головній діагоналі;
– матриця, відмінна від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю;
– матриця перестановки, тобто матриця, яка отримується з одиничної шляхом перестановки деяких її рядків і стовпців.

Усі можливі скінченні добутки елементарних матриць утворюють підгрупу групи $\mathrm{GL}(n,R)$, яку позначатимемо через $E(n,R)$.

Зауважимо, що читач, який не володіє технікою матричної алгебри над комутативними кільцями може познайомитись з нею у роботі [56]. Основним робочим інструментом у пропонованому дослідженні служать різнотипні поняття еквівалентності матриць і їх скінченних наборів над кільцями, більшість з яких уже зустрічалась у різних авторів, а деякі все ж є цілком новими. Відомі нам вкладаються у таку схему.

Розглянемо підгрупи $S \subseteq \mathrm{GL}(m,R)$ і $T \subseteq \mathrm{GL}(n,R)$. Матриці A, $B \in$ $\in M(m,n,R)$ називаємо (S,T)-*еквівалентними*, якщо існують матриці $U \in S$ і $V \in T$ такі, що $A = UBV$. Якщо $S = \mathrm{GL}(m,R)$ і $T = \mathrm{GL}(n,R)$, то означення (S,T)-еквівалентності збігається з класичним поняттям еквівалентності матриць. Якщо ж за підгрупи S, T вибрати елементарні підгрупи $E(m,R)$ та $E(n,R)$, то отримаємо поняття так званої *елементарної еквівалентності*, яка використовувалась у роботах [14, 15, 54].

Запропонована концепція еквівалентності матриць дозволяє розвинути й відповідні поняття редукцій матриць над кільцями, що приводить у кінцевому підсумку до різнопланового узагальнення класу кілець елементарних дільників. Зупинимось на задачах редукції більш детально і, зокрема, відмітимо основні віхи в історії розвитку теорії кілець елементарних дільників. Безперечно, що ідея діагональної редукції матриць має своїм прототипом теорію Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь, а конкретніше − сам метод Гаусса розв'язування таких систем над полями (або тілами). Отримані результати потім знову застосовують при розв'язуванні систем лінійних рівнянь із коефіцієнтами з кільця. Для більш конкретного викладу введемо деякі формальні означення.

Кажуть, що матриця A має властивість (S,T)-діагональної редукції, якщо A є (S,T)-еквівалентною до діагональної матриці $\mathrm{diag}(d_{ij})$, де $d_{ij} =$ $= 0$ при $i \neq j$, а діагональні елементи мають властивість: d_{ii} є дільником $d_{i+1,i+1}$. (Під діагональною розуміємо, взагалі кажучи, прямокутну матрицю, всі елементи якої поза головною діагоналлю є нульовими). Якщо обидві групи S і T збігаються з повною лінійною групою над кільцем R, то говорять просто про діагональну редукцію матриць над кільцем R. Якщо довільні (1×2)- і (2×1)-матриці над R мають властивість діагональної редукції, то кільце R називають кільцем Ерміта. Якщо над кільцем R довільна матриця має властивість діагональної редукції, то R називають кільцем елементарних дільників (к. е. д.). Слід зауважити, що к. е. д. є кільцем Ерміта. У роботі [51] показано, що кільце Ерміта (при певних обмеженнях на дільники нуля) є кільцем скінченно породжених головних ідеалів. Історично першим кільцем елементарних дільників, що не є полем, яке вивчалось дослідниками, було кільце цілих чисел [79]. Пізніше встановлено, що до класу к. е. д. належать кільце усіх цілих алгебричних чисел і кільце цілих аналітичних функцій [83] (див. також історичну довідку зі статті [29], де подано більш детальну інформацію). Методи діагоналізації матриць над евклідовими кільцями описані в [58]. Проблему можливості діагональної редукції матриць над некомутативними кільцями вперше підняли О. Тейхмюллер [80] і К. Асано [52], які розв'язали її у випадку областей головних ідеалів [52]. Питання про єдиність визначення з точністю до подібності діагональних елементів розв'язав Т. Накаяма [70]. Їх теорія застосована П. С. Казімірським до задачі про сумісність систем лінійних рівнянь над кільцями головних ідеалів [21]. Систематичний розвиток теорії кілець елементарних дільників розпочинається з роботи І. Капланського [66]. Подальші досягнення у цій галузі викладено в статтях [9, 13, 30, 31, 55, 62, 65, 69, 72, 78]. Деякі суміжні з діагональною редукцією матриць над кільцями питання розв'язано в роботах [26, 27]. Більш загальна (але не діагональна) редукція матриць над кільцями лінійних диференціальних операторів диференціальних полів розглядалась у роботі [20]. Кільце без ненульових нільпотентних елементів називають редукованим. Кільце R назвемо адекватним у нулі, якщо R − кільце Безу і для будь-яких $a, b \in R$ існують такі $r, s \in R$, що $a = rs$, $rR + bR = R$, і для довільного необоротного дільника s' елемента s ідеал $s'R + bR$ є властивим (див. [12, 32]). Зв'язок проблеми діагоналізації матриць над кільцями зі стабільним рангом цих кілець досліджено в [10, 11].

2. Адекватні та слабо адекватні елементи і кільця. У цьому пункті нагадаємо та узагальнимо деякі означення і результати М. Я. Комарницького з роботи [29] на комутативні кільця Безу з дільниками нуля у радикалі Джекобсона. Встановимо, що множина регулярних адекватних елементів такого кільця Безу є насиченою мультиплікативно-замкненою множиною. Сформулюємо критерій адекватності кільця на мові спектра та максимального спектра кільця.

Означення 1. Регулярний елемент a комутативного кільця Безу R називають *адекватним*, якщо для будь-якого регулярного елемента $b \in R$ знайдуться такі елементи $r, s \in R$, що: ***1***) $a = rs$; ***2***) $bR + rR = R$; ***3***) для кожного $s' \in R$ із включення $sR + s'R \subseteq R$ випливає, що $bR + s'R \subseteq R$ (у цьому випадку кажуть, що елемент s є *спорідненим* з елементом b). Кільце, в якому кожний регулярний елемент є адекватним, називаємо *регулярно адекватним*.

Множину всіх регулярних адекватних елементів кільця R позначатимемо через $\mathcal{A}(R)$. Аналогічно будемо використовувати такі позначення: $\mathcal{F}(R)$ − множина регулярних факторіальних елементів, $\mathcal{U}(R)$ − множина оборотних елементів кільця R.

Твердження 1. *Нехай R − комутативне кільце Безу. Тоді*

1°. $\mathcal{U}(R) \subseteq \mathcal{A}(R)$;

2°. $\mathcal{F}(R) \subseteq \mathcal{A}(R)$;

3°. Кожний регулярний елемент, вільний від квадратів, є адекватним;

4°. $\mathcal{A}(R)$ *− насичена мультиплікативно-замкнена підмножина кільця* R.

Далі встановимо, що властивість адекватності можна охарактеризувати на мові спектра кільця.

Нехай R − регулярно адекватне кільце Безу з дільниками нуля в радикалі Джекобсона. Як добре відомо [68], кожний ненульовий первинний ідеал кільця R міститься у єдиному максимальному ідеалі.

Твердження 2. *Кільце Безу R з дільниками нуля у радикалі Джекобсона є неадекватним тоді й тільки тоді, коли існують первинний ідеал P і максимальний ідеал $M \supseteq P$, $M \neq P$, такі, що $MP = P$ і для деякої непорожньої підмножини $\Omega \subseteq \operatorname{mspec} R \setminus \{M\}$, $P \subseteq \cup\, \Omega$, але $M \not\subset \cup\, \Omega$, де $\cup\, \Omega$ − об'єднання усіх ідеалів з Ω.*

Як безпосередній наслідок цього твердження маємо таку теорему.

Теорема 1. *Комутативне кільце Безу R є регулярно адекватним тоді й тільки тоді, коли для будь-якого ненульового первинного ідеалу P, що не є максимальним, існує єдиний максимальний ідеал M такий, що **1**) $P \subseteq M$; **2**) або $MP \neq M$, або для максимальної підмножини $\Omega \subseteq \operatorname{mspec}(R) \setminus \{M\}$ серед таких, що $P \subseteq \bigcup_{M' \in \Omega} M'$, виконується умова $M \subseteq \bigcup_{\Omega} M'$.*

У роботі [12] розглянуто узагальнено адекватні області. Пропонуємо ще одне узагальнення поняття адекватного елемента. Назвемо регулярний елемент a кільця Безу A *слабо адекватним*, якщо для будь-яких регулярних $b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$, існують такі $p, q \in R$, що хоча би в одній з пар $(a, b + pa + qc)$, $(c, b + pa + qc)$, (a, c) (c, a) перший елемент є адекватним стосовно до другого. Кільце Безу, в якому кожний регулярний елемент є слабо адекватним, назвемо *слабо адекватним кільцем Безу*.

3. Діагональна редукція матриць із адекватними та слабо адекватними елементами. У роботі [66] І. Капланський довів наступний критерій того, щоб кільце було кільцем елементарних дільників.

Теорема 2. *Кільце Безу з дільниками нуля у радикалі Джекобсона є кільцем елементарних дільників тоді й тільки тоді, коли будь-яка матриця вигляду* $\begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{Vmatrix}$, *де* $aR + bR + cR = R$, *має властивість діагональної редукції. Це можна переформулювати таким чином: для будь-яких* $a, b, c \in R$ *з умови* $aR + bR + cR = R$ *випливає існування таких елементів* $p, q \in R$, *що* $apR + (bp + cq)R = R$ *і* $pR + qR = R$.

З теореми Капланського як наслідок отримуємо

Твердження 3. *Якщо* R *− кільце Безу з дільниками нуля в радикалі Джекобсона і для будь-яких* $a, b, c \in R$, $aR + bR + cR = R$, *існують такі елементи* $p, q \in R$, $pR + qR = R$, *що* $(aR + bR)R + cqR = sR$, *де* $s \in R$, *то* R *− кільце елементарних дільників.*

Розглянемо ще деякі узагальнення адекватних кілець.

Лема 1. *Нехай* R *− область Безу,* a, b, c *− такі елементи з* R, *що* $aR + bR + cR = R$. *Якщо в будь-якій парі* (a, c), (c, a), (c, b) *перший елемент є адекватним стосовно до другого, то матриця* $\begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{Vmatrix}$ *має властивість діагональної редукції.*

Оскільки для будь-яких p і q з R матриці $\begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{Vmatrix}$ і $\begin{Vmatrix} a & b + pa + qc \\ 0 & c \end{Vmatrix}$ еквівалентні, то для дослідження можливості діагональної редукції першої з них корисно ввести наступне означення. Регулярний елемент a кільця Безу A називаємо *слабо адекватним*, якщо для будь-яких $b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$, існують такі $p, q \in R$, що хоча би в одній з пар $(a, b + pa + qc)$, $(c, b + pa + qc)$, (a, c), (c, a) перший елемент є адекватним стосовно до другого. Кільце Безу, в якому кожний регулярний елемент є слабо адекватним, називаємо *слабо адекватним кільцем Безу*.

З леми очевидно випливає

Теорема 3. *Кожне слабо адекватне кільце Безу з дільниками нуля в радикалі Джекобсона є кільцем елементарних дільників.*

4. Узагальнена еквівалентність пар матриць. Нехай $A_i, B_i \in M(m, n_i, R)$, $i = 1, \ldots, k$.

Означення 2. Набори матриць $(A_1, \ldots, A_k)$ і $(B_1, \ldots, B_k)$ називаємо *узагальнено еквівалентними*, якщо $A_i = UB_iV_i$ для деяких матриць $U \in \mathrm{GL}(m, R)$, $V_i \in GL(n_i, R)$, $i = 1, \ldots, k$.

У випадку, коли $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n$ і $V_1 = V_2 = \cdots = V_k = V$, це означення збігається з класичним означенням еквівалентності наборів, зокрема, пар матриць [3, 6].

Задача еквівалентності пар матриць розв'язана Вейєрштрассом і Кронекером [67, 84] у випадку, коли $R = P$ − поле. М. П. Кравчук [34, 35] вказав елементарний метод зведення пари матриць над полем до канонічної форми Кронекера. Ця задача для пар матриць над кільцями, як показав П. М. Гудивок [6], є «дикою» і тому її розв'язання є надзвичайно важким. Проте багато задач, зокрема, про факторизацію матриць, мультиполікативність їх канонічних діагональних форм [19, 28, 37−44], у теорії зображень груп і скінченновимірних алгебр [1, 7, 59] та ін. потребують вивчення еквівалентності пар і скінченних наборів матриць лише зі спільною односторонньою перетворювальною матрицею, тобто їх узагальненої еквівалентності.

У роботі [59] встановлено канонічну форму пари комплексних матриць (A_1, A_2) щодо наступного типу узагальненої еквівалентності − перетворення (Q, P_1, P_2), яке діє на пару матриць таким чином: $(A_1, A_2)(Q, P_1, P_2) = (QA_1P_1, QA_2P_2)$, де Q − комплексна, P_1, P_2 − дійсні оборотні матриці.

Задача про узагальнену еквівалентність пар матриць над кільцями, як і задача про еквівалентність пар матриць, є «дикою» [6, 8, 60]. Тому її повне розв'язання можливе лише в окремих випадках. Нашою метою є побудова простіших форм пар і наборів матриць над певними кільцями щодо узагальненої еквівалентності та деякі їх застосування.

Надалі R − комутативна адекватна область скінченно породжених головних ідеалів. Позначимо через D^A канонічну діагональну форму матриці $A \in M(m, n, R)$, тобто

$$D^A = UAV = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0), \qquad \mu_r \neq 0, \tag{1}$$

$U \in \mathrm{GL}(m, R)$, $V \in \mathrm{GL}(n, R)$; d_ℓ^A − найбільший спільний дільник мінорів ℓ-го порядку матриці A; R_δ − повну множину лишків за модулем δ; $R'_\delta \subseteq R_\delta$ − максимальну підмножину R_δ таку, що для будь-яких $a, b \in R'_\delta$ і кожного $u \in U(R)$ справджується $ua \not\equiv b (\operatorname{mod} \delta)$.

Твердження 4. *Нехай $B \in M(m, k, R)$, $\operatorname{rang} B > 1$. Тоді існує рядок $u = \| 1 \ u_2 \ \dots \ u_m \|$ такий, що $uB = \| b_1 \ b_2 \ \dots \ b_k \|$, де $(b_1, b_2, \dots, b_k) = d_1^B$.*

Це твердження використовується при доведенні основних результатів і є узагальненням теореми О. Гелмера [64], сформульованої ним у дещо іншій формі для матриці B повного рангу, тобто $\operatorname{rang} B = m \le k$.

Лема 2. *Нехай $B \in M(m, k, R)$, $D^B = \operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_r, 0, \dots, 0)$. Тоді існують верхня унітрикутна матриця $H \in \mathrm{GL}(m, R)$ та оборотна матриця $V \in \mathrm{GL}(k, R)$ такі, що $HBV = T^B = TD^B$, де $T = \| t_{ij} \|_1^n$ − нижня майже унітрикутна матриця, тобто $t_{ij} = 0$, якщо $i < j$, та $t_{ii} = 1$ для всіх i, крім, можливо, $i = r$. Якщо $r = m$, то T − нижня унітрикутна матриця.*

Наслідок 1. *Нехай $B \in M(m, k, R)$, $\operatorname{rang} B = m \le k$. Тоді в множині $\{U\}$ лівих перетворювальних матриць матриці B до її канонічної діагональної форми, тобто матриць, які задовольняють співвідношення* (1), *існує матриця $U_0 \in \{U\}$ така, що $U_0 = TH$, де T − нижня, а H − верхня унітрикутні матриці.*

Теорема 4. *Нехай* $A \in M(m, n_1, R)$, $B \in M(m, n_2, R)$ *і* $D^A = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r, 0, \ldots, 0)$, $D^B = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_s, 0, \ldots, 0)$ *– їх канонічні діагональні форми, причому* $r \le s$. *Тоді пара матриць* (A, B) *є узагальнено еквівалентною до пари* $(D^A, T^B = TD^B)$, *де* $T = \| t_{ij} \|_1^m$ *– нижня унітрикутна матриця, якщо* $r < s$ *або* $r = s = n$, *і* T *– нижня майже унітрикутна матриця, тобто* $t_{ii} = 1$ *для всіх* i, *крім, можливо,* $i = r$, *причому* $t_{ij} \in R'_\delta$, $i > j$, *де* $\delta_{ij} = \left(\frac{\mu_i}{\mu_j}, \ \frac{\varphi_i}{\varphi_j} \right)$.

Якщо $B \mid A$, то пара матриць (A, B) є узагальнено еквівалентною до пари (D^A, TD^B), де T – нижня унітрикутна матриця в усіх випадках. Крім того, якщо R – кільце стабільного рангу 1 [82], то кожна пара матриць (A, B) є узагальнено еквівалентною до такої ж пари (D^A, TD^B).

Пару матриць (D^A, T^B), означену в теоремі 4, називаємо *стандартною формою* пари матриць (A, B).

Із теореми 4 випливає, що стандартною формою пари матриць (A, B), для якої $(d_m^A, d_m^B) = 1$, є пара діагональних матриць (D^A, D^B) і ця стандартна форма є єдиною. У роботі [75] наведено інші випадки, коли стандартна форма пари матриць визначається однозначно.

Якщо пара матриць (A, B) є узагальнено еквівалентною до пари діагональних матриць (D^A, D^B), то кажемо, що пара (A, B) – *діагоналізовна* або *має властивість діагональної редукції.*

Наведемо умови узагальненої еквівалентності пар матриць.

Нехай Φ – d-матриця розміру $m \times n$ над R, тобто $\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r, 0, \ldots, 0)$, $\varphi_r \ne 0$ і $\varphi_1 \mid \varphi_2 \mid \ldots \mid \varphi_r$ [25]. Розглянемо співвідношення

$$H\Phi = \Phi F, \qquad H \in \mathrm{GL}(m, R), \qquad F \in \mathrm{GL}(n, R). \tag{2}$$

Матриці H і F мають вигляд

$$H = \| h_{ij} \|_1^m, \quad h_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\varphi_i}{\varphi_j} h'_{ij}, & i, j = 1, \ldots, r, \quad i > j, \\ 0, & i = r+1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, r, \end{cases}$$

$$F = \| f_{ij} \|_1^n, \quad f_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\varphi_i}{\varphi_j} f'_{ij}, & i, j = 1, \ldots, r, \quad i < j, \\ 0, & i = 1, \ldots, r, \quad j = r+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Множини всіх матриць H і F, які задовольняють співвідношення (2), утворюють відповідно групи $\mathrm{GL}_\Phi(m, R)$ і ${}_\Phi\mathrm{GL}(n, R)$, які є підгрупами повних лінійних груп $\mathrm{GL}(m, R)$ і $\mathrm{GL}(n, R)$ [16].

Враховуючи те, що для кожної матриці $A \in M(n, k, R)$, $n < k$, існує матриця $V \in \mathrm{GL}(k, R)$ така, що $AV = \| A_1 \quad 0 \|$, де $A_1 \in M(n, R)$, то достатньо розглядати узагальнену еквівалентність пар квадратних матриць.

Лема 3. *Нехай* $A_i, B_i \in M(n, R)$, $i = 1, 2$. *Якщо пари матриць* (A_1, B_1) *і* (A_2, B_2) *є узагальнено еквівалентними, то матриці* $(\mathrm{adj}\, A_1) B_1$ *і* $(\mathrm{adj}\, A_2) B_2$ *еквівалентні.*

Оскільки кожна пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пари стандартної форми (D^A, T^B), означеної у теоремі 4, то досить розглянути узагальнену еквівалентність пар матриць такого вигляду.

Теорема 5. *Нехай* (D, T_1) *і* (D, T_2) − *пари матриць із* $M(n, R)$ *у стандартній формі, тобто* $D = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_n \neq 0$, $\varphi_1 \mid \varphi_2 \mid \ldots \mid \varphi_n$, *і* T_1, T_2 − *нижні трикутні матриці з головними діагоналями* $\Psi = \operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_s, 0, \ldots, 0)$, $\psi_1 \mid \psi_2 \mid \cdots \mid \psi_s$. *Тоді пари матриць* (D, T_1) *і* (D, T_2) *є узагальнено еквівалентними в тому й тільки в тому випадку, коли матриці* $(\operatorname{adj} D)T_1$ *і* $(\operatorname{adj} D)T_2$ *еквівалентні, тобто* $F(\operatorname{adj} D)T_1 = (\operatorname{adj} D)T_2 Q$, *де* $F \in {}_{\Phi}\mathrm{GL}(n, R)$ *і* $Q \in \mathrm{GL}(n, R)$.

Із цієї теореми як наслідок одержуємо критерій узагальненої еквівалентності пари матриць до пари діагональних матриць.

Твердження 5. *Нехай* $A, B \in M(n, R)$ *і* A − *неособлива матриця. Пара матриць* (A, B) *є узагальнено еквівалентною до пари діагональних матриць* (D^A, D^B) *тоді й тільки тоді, коли матриці* $(\operatorname{adj} A)B$ *і* $(\operatorname{adj} D^A)D^B$ *еквівалентні.*

5. Напівскалярна еквівалентність матриць.

Означення 3. Матриці $A, B \in M(m, n, R)$ називають *напівскалярно еквівалентними*, якщо існують матриці $C \in \mathrm{GL}(m, U(R) \cup \{0\})$ і $Q \in \mathrm{GL}(n, R)$ такі, що $A = CBQ$.

Це поняття було введене для многочленних матриць П. С. Казімірським і В. М. Петричковичем у 1977 році [28]. Матриці $A(x)$ і $B(x)$ із $M(m, n, P[x])$, де P − поле, називають напівскалярно еквівалентними, якщо $A(x) = CB(x)Q(x)$ для деяких матриць $C \in \mathrm{GL}(m, P)$ і $Q(x) \in \mathrm{GL}(n, P[x])$. У роботі [28] встановлено, що неособлива многочленна матриця над алгебрично замкненим полем характеристики нуль є напівскалярно еквівалентною до трикутної матриці з інваріантними множниками на головній діагоналі, та поширено цей результат для скінченного набору многочленних матриць. Аналогічний результат у 1982 році сформулював Л. Баратхарт [53]. У роботах [39, 41] ці результати поширені для многочленних матриць над довільним полем.

Встановимо форму для довільного набору многочленних матриць щодо напівскалярної еквівалентності.

Теорема 6. *Нехай задано набір матриць*

$$A_1(x), \ldots, A_k(x), \quad A_i(x) \in M(m, n, P[x]), \quad \operatorname{rang} A_i(x) = r_i, \; i = 1, \ldots, k.$$

Нехай P' − *поле розкладу многочленів* $d_{r_i}^{A_i}(x)$, *тобто*

$$d_{r_i}^{A_i}(x) = \sum_{j=1}^{s_i} (x - \alpha_{ij})^{t_{ij}}, \qquad \alpha_{ij} \in P', \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Якщо $\sum_{i=1}^{k} s_i < |P|$, *де* $|P|$ − *потужність множини* P, *то існують верхня унітрикутна матриця* $U \in \mathrm{GL}(m, P)$ *та оборотні матриці* $V_i(x) \in \mathrm{GL}(n, P[x])$ *такі, що*

$$T^{A_i}(x) = UA_i(x)V_i(x) =$$

$$
= \left\| \begin{array}{cccccc}
\mu_1^{A_i}(x) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
t_{21}^{(i)}(x)\mu_1^{A_i}(x) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
t_{r_1-1,1}^{(i)}(x)\mu_1^{A_i}(x) & \cdots & \mu_{r_i-1}^{A_i}(x) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
t_{r_1 1}^{(i)}(x)\mu_1^{A_i}(x) & \cdots & t_{r_i,r_i-1}^{(i)}(x)\mu_{r_i-1}^{A_i}(x) & t_{r_i,r_i}^{(i)}(x)\mu_{r_i}^{A_i}(x) & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
t_{n1}^{(i)}(x)\mu_1^{A_i}(x) & \cdots & t_{n,r_i-1}^{(i)}(x)\mu_{r_i-1}^{A_i}(x) & t_{n,r_i}^{(i)}(x)\mu_{r_i}^{A_i}(x) & 0 & \cdots & 0
\end{array} \right\|, \quad (3)
$$

де $\mu_j^{A_i}(x)$ *– інваріантні множники матриці* $A_i(x)$ *і* $(t_{r_i r_i}^{(i)}(x), t_{r_i+1,r_i}^{(i)}(x), \ldots, t_{nr_i}^{(i)}(x)) = 1,\ i = 1,\ldots,k$.

Зауважимо, що, якщо $A_i(x),\ i = 1,\ldots,k$, – матриці повних рангів, тобто $\operatorname{rang} A_i(x) = m$, то цей набір матриць в умовах теореми є напівскалярно еквівалентним до набору $T^{A_i}(x) = T_i(x)D^{A_i}(x),\ i = 1,\ldots,k$, де $T_i(x)$ – нижні унітрикутні матриці.

Із теореми 6 одержуємо твердження, яке описує будову перетворювальних матриць, що зводять задану матрицю до її канонічної діагональної форми.

Твердження 6. *Нехай* $A(x) \in M(m,n,R)$, $\operatorname{rang} A(x) = m$. *Тоді у множині* $\{U(x)\}$ *лівих перетворювальних матриць матриці* $A(x)$ *до її канонічної діагональної форми існують*:

а) *матриця* $U_1(x) \in \{U(x)\}$ *така, що* $U_1(x) = Q(x)S$, *де* $Q(x)$ *– нижня унітрикутна матриця із* $\mathrm{GL}(m, P[x])$; S *– верхня унітрикутна матриця із* $\mathrm{GL}(m, P)$;

б) *матриця* $U_2(x) \in \{U(x)\}$ *така, що*

$$
\deg U_2 \le \begin{cases} \deg \mu_m^A - \deg A, & \textit{якщо } A(x) \textit{ – регулярна матриця}, \\ \deg \mu_m^A - \deg \mu_1^A & \textit{– в іншому випадку}. \end{cases}
$$

Наведемо деякі застосування стандартної форми пари матриць.

6. Діагоналізовна редукція пар матриць і мультиплікативні властивості їх канонічних діагональних форм. Нехай $A \in M(m,n,R)$, $B \in M(m,k,R)$ і $B \mid A$, тобто $A = BC$, $C \in M(k,n,R)$. Тоді пара матриць (A, B) є узагальнено еквівалентною до пари $(D^A, T^B = TD^B)$, де T – нижня унітрикутна матриця. Тому з рівності $A = BC$ одержуємо, що $D^A = T^B C_1$, де C_1 – нижня трикутна матриця. Звідси відразу випливає відомий факт, що $D^B \mid D^A$, тобто $D^A = D^B \Psi$. Виникає питання: коли Ψ є d-матрицею і $D^C = \Psi$, тобто $D^A = D^B D^C$?

М. Ньюмен [71] довів, що, якщо для неособливих матриць B і C над кільцем головних ідеалів $(\det B, \det C) = 1$, то $D^{BC} = D^B D^C$.

Задача про мультиплікативність канонічних діагональних форм матриць пов’язана з діагональною редукцією пар матриць узагальнено еквівалентними перетвореннями.

Через D_k^A будемо позначати підматрицю порядку k матриці D^A: $D_k^A = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_k)$.

Теорема 7. *Нехай* $A \in M(m,n,R)$, $B \in M(m,k,R)$, $D^A = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r, 0, \ldots, 0)$, $D^B = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_s, 0, \ldots, 0)$, $s \geq r$, *і* $B \mid A$, *тобто* $A = BC$, *для деякої матриці* $C \in M(k,n,R)$. *Тоді пара матриць* (A,B) *має властивість діагональної редукції у тому й тільки в тому випадку, коли матриця* C *є еквівалентною до матриці* $\Psi = \Psi_r \oplus \mathbf{0}$, *де* $\Psi_r = (D_r^B)^{-1} D_r^A$.

Теорема 8. *Нехай* $B \in M(m,k,R)$, $C \in M(k,n,R)$ *і* $A = BC$. *Тоді* $D^A = D^B D^C$ *у тому й тільки в тому випадку, коли пара матриць* (A,B) *має властивість діагональної редукції, тобто*

$$UAV_1 = D^A, \qquad UBV_2 = D^B,$$

$$U \in \mathrm{GL}(m,R), \qquad V_1 \in \mathrm{GL}(n,R), \qquad V_2 \in \mathrm{GL}(k,R), \tag{4}$$

і для деяких матриць V_1 *і* V_2, *які задовольняють умову* (4), *матриця* $V_2^{-1} C V_1 = \Psi$ *є d-матрицею.*

Із попередніх теорем отримуємо таке твердження.

Лема 4. *Нехай* $B \in M(m,R)$, $C \in M(m,n,R)$, $\det B \neq 0$, $\operatorname{rang} C = r$ *і* $A = BC$, *де* $D^A = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r, 0, \ldots, 0)$, $D^B = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$. *Якщо* $(\mu_i, \varphi_m) = \varphi_i$, $i = 1, \cdots, r$, *то* $D^A = D^B D^C$.

Зауважимо, що в наслідку 7 у роботі [73] і в аналогічному наслідку 5 у [37] допущено описку. Очевидно, що в обох випадках замість d_r^C повинно бути $\dfrac{d_r^A}{d_r^B}$, де $A = BC$, як і в наслідку 7 у співвідношенні (19) з роботи [74]. Зазначені наслідки з робіт [37, 73] є поширенням результату наслідку 7 із [74] для загальнішого випадку. Отже, із леми 4 маємо такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай* $B \in M(m,R)$, $C \in M(m,n,R)$, $\det B \neq 0$, $\operatorname{rang} C = r$ *і* $A = BC$. *Якщо* $\left(\det B, \dfrac{d_r^A}{d_r^B}\right) = 1$, *то* $D^A = D^B D^C$.

7. Факторизації матриць. Нехай $A \in M(n,R)$, $\operatorname{rang} A = r$ і

$$A = BC, \qquad B, C \in M(n,R) \tag{5}$$

– деяка факторизація матриці A. Тоді факторизації (3) матриці A відповідає факторизація її канонічної діагональної форми D^A:

$$D^A = \Phi\Psi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_s, 0, \ldots, 0)\,\Psi, \qquad \varphi_1 \mid \varphi_2 \mid \ldots \mid \varphi_s, \tag{6}$$

така, що $D^B = \Phi$, тобто матриця B еквівалентна до матриці Φ. Матриця C може бути еквівалентною до Ψ або ж ні. У першому випадку факторизацію (5) матриці A називаємо *паралельною* до факторизації (6) її канонічної діагональної форми D^A за аналогією із введеним П. С. Казімірським поняттям паралельних розкладів многочленної матриці до розкладів її характеристичного многочлена [25].

Нагадаємо, що факторизації $A = BC$ і $A = B_1 C_1$ матриці A називають асоційованими, якщо $B_1 = BV$, $C_1 = V^{-1} C$ для деякої матриці $V \in \mathrm{GL}(n,R)$.

Поклавши $B_i = U_i^{-1}\Phi$, $C_i = \Psi V_i^{-1}$, де U_i і V_i − матриці, які задовольняють співвідношення (1), одержимо факторизації $A = B_i C_i$ матриці A, паралельні до факторизації (6) її канонічної діагональної форми D^A. Виникає питання: чи це будуть усі, з точністю до асоційовності, факторизації матриці A, паралельні до факторизації (6) її канонічної діагональної форми D^A ?

Теорема 9. *Нехай* $A \in M(n,R)$, $\operatorname{rang} A = r$ *і канонічна діагональна форма* D^A *зображується у вигляді* (6), *де* $\Psi = \Psi_s \oplus \mathbf{0}$. *Тоді кожна факторизація матриці* A, *паралельна до факторизації* (6) *її канонічної діагональної форми* D^A, *з точністю до асоційовності має вигляд* $A = B_i C_i$, $B_i = U_i^{-1}\Phi$, $C_i = \Psi V_i^{-1}$, *де* U_i *і* V_i − *матриці, які задовольняють співвідношення* (1).

Факторизація $A = BC$ *матриці* A, *паралельна до факторизації* (6) *її канонічної діагональної форми* D^A, *є єдиною з точністю до асоційовності тоді й тільки тоді, коли* Ψ *є* d*-матрицею, тобто* $\psi_1 \mid \psi_2 \mid \cdots \mid \psi_t$ *і* $\varphi_{r+1} = \varphi_{r+2} = \ldots = \varphi_n$, $\psi_{r+1} = \psi_{r+2} = \ldots = \psi_n$.

З. І. Боревич сформулював умови єдиності паралельних факторизацій для неособливих матриць над кільцем головних ідеалів [2]. Теоремою 9 нами встановлено критерій єдиності паралельних факторизацій для довільних матриць.

Як наслідки з теореми 9 одержуємо критерії єдиності дільників B матриці A із заданими їх канонічною діагональною формою $D^B = \Phi$ і визначником $\det B = \varphi$.

Наслідок 3. *Нехай* $A \in M(n,R)$, $D^A = \operatorname{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_r,0,\ldots,0)$, $\mu_r \neq 0$. *Тоді*:

а) *лівий дільник* $B \in M(n,R)$ *з канонічною діагональною формою* $D^B = \Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_s,0,\ldots,0)$ *матриці* A *є єдиним з точністю до правої асоційовності тоді й тільки тоді, коли* $s = n$ *або* $s = r$ *і* $(\mu_i,\varphi_s) = \varphi_i$ *для всіх* $i = 1,\ldots,s-1$;

б) *дільник* B *з* $\det B = \varphi \neq 0$ *матриці* A *існує тоді й тільки тоді, коли* φ *є дільником* $\det A$, *тобто* $\det A = \varphi\psi$. *Дільник* B *з визначником* $\det B = \varphi$ *матриці* A *є єдиним з точністю до асоційовності тоді й тільки тоді, коли* $\operatorname{rang} A \geq n-1$ *і* $((\varphi,\psi), d_{n-1}^A) = 1$.

Зауважимо, що структуру дільників матриць над кільцями елементарних дільників і їх опис з точністю до асоційовності розглянуто в [48, 50].

Тепер розглянемо факторизації многочленних матриць, тобто матриць над кільцем многочленів $P[x]$, де P − поле, з регулярними, зокрема, унітальними множниками.

П. С. Казімірський розв’язав [19, 25] проблему виділення регулярного множника із матричного многочлена над алгебрично замкненим полем характеристики нуль, при цьому суттєво використав встановлену трикутну форму многочленних матриць щодо напівскалярної еквівалентності. Він вказав критерій існування і формулу для знаходження унітальних дільників матричного многочлена. Зауважимо, що вказана формула в загальному не охоплює усіх унітальних дільників матричного многочлена з заданою канонічною діагональною формою. У праці [24] наведено умови, за яких ця формула описує всі унітальні дільники матричного многочлена з їх заданою канонічною діагональною формою. Інший підхід до розв’язання задач факторизації матриць над полем комплексних чисел, який ґрунтується на класичних поняттях власних і приєднаних векторів, запропоновано в [36, 63] та ін.

Задача факторизації матричних многочленів над довільним полем розв'язана лише в окремих випадках. У роботі [45] вказано метод побудови унітальних дільників матричних многочленів над довільним полем у випадку, коли унітальні дільники з їх заданими характеристичними многочленами є єдиними. У праці [49] з використанням результатів П. С. Казімірського [25] описуються певні класи дільників з точністю до асоційовності, зокрема, унітальних дільників матричних многочленів над деякими полями. Факторизацію многочленних матриць над спеціальними кільцями розглянуто в роботі [18].

На основі встановленої трикутної форми многочленних матриць щодо напівскалярної еквівалентності вкажемо метод їх факторизації.

Нехай $T^A(x) = UA(x)V(x) = U(x)D^A(x)$ – трикутна форма вигляду (3) неособливої матриці $A(x)$, де $U(x)$ – нижня унітрикутна матриця. Очевидно, що матриця $A(x)$ розкладається у добуток регулярних, зокрема унітальних, множників тоді й тільки тоді, коли такою є її трикутна форма $T^A(x)$ і ліві унітальні дільники матриць $A(x)$ і $T^A(x)$ є подібними з матрицею переходу U.

Нехай канонічна діагональна форма $D^A(x)$ матриці $A(x)$ зображується у вигляді добутку

$$D^A(x) = \Phi(x)\Psi(x) = \mathrm{diag}\,(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))\Psi(x), \quad \varphi_1 \mid \varphi_2 \mid \cdots \mid \varphi_n, \qquad (7)$$

і $\sum_{i=1}^{n} \deg \varphi_i = sn$; $K(x)$ – нижня унітрикутна параметрична матриця, означена в [16, 40]. Тоді матриця $(U(x)K(x))^{-1}$ є лівою перетворювальною матрицею матриці $A(x)$ до її канонічної діагональної форми $D^A(x)$. Надаючи параметрам матриці $K(x)$ значень із поля P, одержимо множину лівих перетворювальних матриць матриці $A(x)$.

На основі теореми 9 і результатів робіт [16, 40] одержуємо теорему.

Теорема 10. *Для матриці $A(x)$ існує факторизація $A(x) = B(x)C(x)$ з унітальною матрицею $B(x)$, паралельна до факторизації (7) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$, тоді й тільки тоді, коли матриця $U(x)K(x)\Phi(x)$ регуляризується справа при деяких значеннях параметрів матриці $K(x)$, тобто існує матриця $V(x) \in \mathrm{GL}(n, P[x])$ така, що $U(x)K(x)\Phi(x)V(x) = L(x)$ – регулярна, зокрема, унітальна матриця. Якщо $L(x)$ – унітальна матриця, то $B(x) = U^{-1}L(x)U$ – лівий унітальний дільник матриці $A(x)$.*

Відомі декілька методів регуляризації многочленних матриць. У роботі [44] вказано досить простий спосіб регуляризації многочленної матриці трикутного вигляду (3).

Із теореми 9 одержуємо

Наслідок 4. *Нехай $A(x) \in M(n, P[x])$, $\mathrm{rang}\, A(x) = r$. Тоді*

a) *факторизація $A(x) = B(x)C(x)$ матриці $A(x)$ з унітальним множником $B(x)$, паралельна до факторизації (7) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$, є єдиною тоді й тільки тоді, коли у зображенні (7) $\Psi(x)$ є d-матрицею;*

б) *унітальний дільник* $B(x)$ *з канонічною діагональною формою* $D^B(x) = \Phi(x) = \operatorname{diag}\,(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ *матриці* $A(x)$ *є єдиним тоді й тільки тоді, коли* $(\mu_i^A, \varphi_n) = \varphi_i$, $i = 1, \ldots, r-1$;

в) *унітальний дільник* $B(x)$ *з характеристичним многочленом* $\det B(x) = \varphi(x)$ *матриці* A *є єдиним тоді й тільки тоді, коли* $\operatorname{rang} A(x) \geq n-1$ *і* $((\varphi(x), \psi(x)), d_{n-1}^A(x)) = 1$.

Для многочленних матриць над алгебрично замкненим полем характеристики 0 умови єдиності унітальних дільників із їх заданими характеристичними многочленами наведено в [5, 25], а з канонічними діагональними формами – в [17, 24].

На завершення зазначимо, що задача про напівскалярну еквівалентність многочленних матриць тісно пов'язана з відомою проблемою про подібність пар і скінченних наборів числових матриць [4, 7, 60, 61, 77, 81]. Трикутна форма вигляду (3) многочленної матриці щодо напівскалярної еквівалентності визначається неоднозначно, а тому вона не дає повної класифікації многочленних матриць щодо такої еквівалентності. Ця задача розв'язана лише при певних і досить суттєвих обмеженнях, у загальному випадку на сьогодні не бачимо шляхів її розв'язання. Так, у роботах [22, 23] на основі трикутної форми (3) і значення многочленної матриці на системі коренів многочлена встановлено умови напівскалярної еквівалентності многочленних матриць без кратних характеристичних коренів і критерій подібності відповідних матричних квадратних тричленів. У працях [46, 47] вказано канонічну форму многочленних матриць без кратних характеристичних коренів щодо напівскалярної еквівалентності та канонічну форму відповідних наборів матриць стосовно подібності.

1. Б*ондаренко В. М.* Класифікаційні задачі в теорії модулярних зображень груп: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 2000. – 32 с.
2. *Боревич З. И.* О факторизациях матриц над кольцом главных идеалов // III Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей, Тарту, 21–24 сент. 1976 г.: Тез. докл. – Тарту: Тарт. ун-т, 1976. – С. 19.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
4. *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968. – **23,** № 2. – С. 3–60.
5. *Грига Б. С., Казімірський П. С.* До питання єдиності виділення унітального множника з матричного многочлена // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1976. – № 4. – С. 293–295.
6. *Гудивок П. М.* Об эквивалентности матриц над коммутативными кольцами // Бесконечные группы и примыкающие алгебр. структуры. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 431–437.
7. *Дрозд Ю. А.* Представления коммутативных алгебр // Функцион. анализ и его прил. – 1972. – **6**, № 4. – С. 41–43.
8. *Дрозд Ю. А.* Ручные и дикие матричные задачи // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1979. – С. 39–74.
9. *Забавский Б. В., Казимирский П. С.* Приведение пары матриц над адекватным кольцом к специальному треугольному виду применением идентичных односторонних преобразований // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 2. – С. 256–258.
10. *Забавський Б. В.* Редукція матриць над кільцями Безу скінченного стабільного рангу не більше 2 // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 4. – С. 550–554.
11. *Забавський Б. В.* Редукція матриць над правими кільцями Безу скінченного стабільного рангу // Мат. студії. – 2001. – **16**, № 2. – С. 115–116.
12. *Забавський Б. В.* Узагальнено адекватні кільця // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 4. – С. 554–557.
13. *Забавський Б. В., Гаталевич А. І.* Про мінімальні прості ідеали комутативних кілець Безу // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 7. – С. 1001–1005.
14. *Забавський Б. В., Романів О. М.* Кільця з елементарною редукцією матриць // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1641–1649.

15. *Забавський Б. В., Романів О. М.* Некомутативні області з елементарною редукцією матриць // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 133–137.
16. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 12. – С. 14–21.
17. *Зеліско В. Р.* Єдиність унітальних дільників матричного многочлена // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1988. – Вип. 30. – С. 36–38.
18. *Зеліско В. Р., Кучма М. І.* Факторизація симетричних матриць над кільцями многочленів з інволюцією // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 4. – С. 91–95.
19. *Казимирский П. С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 4. – С. 483–498.
20. *Казимирский П. С.* Теорема об элементарных делителях для кольца дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 3. – С. 309–318.
21. *Казимирский П. С.* Условия совместности неоднородной системы линейных уравнений в некоммутативном кольце главных идеалов // Науч. зап. Львов. политехн. ин-та. Сер. физ.-мат. – 1955. – **30**, № 1. – С. 45–51.
22. *Казимирский П. С., Билонога Д. М.* Полускалярная эквивалентность многочленных матриц с взаимно простыми элементарными делителями // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 4. – С. 8–9.
23. *Казимирский П. С., Мельник О. М.* Подобие и строение унитальных матричных квадратных трехчленов с попарно различными характеристическими корнями // Зап. науч. семин. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова: Кольца и модули. – 1989. – **175**. – С. 63–68.
24. *Казимирский П. С., Щедрик В. П.* О решениях матричных многочленных односторонних уравнений // Докл. АН СССР. – 1989. – **304**, № 2. – С. 271–274.
25. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук. думка, 1981. – 224 с.
26. *Казімірський П. С., Дрогомижська М. М.* Зауваження до теорії кілець скінченно породжених правих головних ідеалів // Укр. мат. журн. – 1973. – **25**, № 5. – С. 667–673.
27. *Казімірський П. С., Луник Ф. П.* Доповнення прямокутної оберненої над асоціативним кільцем матриці до оборотної // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 6. – С. 505–506.
28. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
29. *Комарницкий Н. Я.* Коммутативные адекватные области Безу и кольца элементарных делителей // Алгебр. исследования. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – С. 97–113.
30. *Комарницкий Н. Я., Забавский Б. В.* О дистрибутивных кольцах элементарных делителей // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 7. – С. 1002–1004.
31. *Комарницький М. Я.* Про кільця з майже інваріантними елементарними дільниками // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 49. – С. 21–29.
32. *Комарницький М. Я., Забавський Б. В.* Зауваження про адекватні кільця // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1987. – Вип. 29. – С. 43–45.
33. *Кон П. М.* Свободные кольца и их связи. – М.: Мир, 1975. – 422 с.
34. *Кравчук М. П.* Про квадратичні форми та лінійні перетворення // Тр. фіз.-мат. відділу УАН. – 1924. – **1**, № 3. – С. 1–91.
35. *Кравчук М. П., Гольдбаум Я. С.* Об эквивалентности особенных пучков матриц // Тр. Киев. авиац. ин-та. – 1928. – № 6. – С. 5–27.
36. *Малышев А. Н.* Факторизация матричных многочленов // Сиб. мат. журн. – 1982. – **23,** № 3. – С. 136–146.
37. *Петричкович В. М.* Звідність пар матриць узагальнено еквівалентними перетвореннями до трикутних та діагональних форм і їх застосування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 2. – С. 15–22.
38. *Петричкович В. М.* Критерій діагоналізовності пари матриць над кільцем головних ідеалів спільними рядковими і різними стовпцевими перетвореннями // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 6. – С. 860–862.
39. *Петричкович В. М.* О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – Вып. 26. – С. 13–16.
40. *Петричкович В. М.* Паралельні факторизації многочленних матриць // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 9. – С. 1228–1233.

41. *Петричкович В. М.* Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 5. – С. 644–649.
42. *Петричкович В. М.* Про діагоналізовність наборів матриць та єдиність їх факторизацій // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1999. – № 364. – С. 177–180.
43. *Петричкович В. М.* Про паралельні факторизації матриць над кільцями головних ідеалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 4. – С. 96–100.
44. *Петричкович В. М.* Про розкладність матричних многочленів в добуток унітальних множників // Алгебра і топологія. – Львів: Львів. держ. ун-т, 1996. – С. 112–124.
45. *Петричкович В. М., Прокип В. М.* О факторизации многочленных матриц над произвольным полем // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 4. – С. 478–483.
46. *Шаваровский Б. З.* Редукция матриц при помощи эквивалентных и подобных преобразований // Мат. заметки. – 1998. – **64**, № 5. – С. 769–782.
47. *Шаваровський Б. З.* Про розклад поліноміальних матриць в пряму суму матриць меншого порядку // Доп. НАН України. – 1999. – № 4. – С. 49–53.
48. *Щедрик В. П.* Один клас дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників // Мат. студії. – 2002. – **17**, № 1. – С. 23–28.
49. *Щедрик В. П.* О разложении матричных многочленов на множители. – Львов, 1990. – 22 с. – (Препр. / Ин-т прикл. проблем механики и математики АН УССР; № 22-90).
50. *Щедрик В. П.* Структура та властивості дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників // Мат. студії. – 1998. – **10**, № 2. – С. 115–120.
51. *Amitsur S.* Remark on principal ideal rings // Oiaka Math. J. – 1963. – **15**, No. l. – P. 59–69.
52. *Asano K.* Nichtcommutative Hauptklealringe. – Paris: Herman, 1938. – P. 1–37.
53. *Baratchart L.* Un theoreme de factorization et son application a la representation des systemes cycliquescausaux // C. r. Acad. Sci. Ser. 1. – 1982. – **295**, No. 3. – P. 223–226.
54. *Bougaut B.* Anneaux quasi-Euclidiens: These de docteur troisieme cycle. – 1976. – 67 p.
55. *Brewer J. W., Conrad P. P.* Montgomery Lattice-ordered groups and conjecture for adequate domains // Proc. Amer. Math. Soc. – 1974. – **43**, No. 1. – P. 31–35.
56. *Brown W. C.* Matrices over commutative rings. – New York: Marcel Dekker, 1993. – 281 p.
57. *Cohn P. M.* Bezout rings and their subrings // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1968. – **64**, No. 2. – P. 251–264.
58. *Dickson L. E.* Algebras and their arithmetics. – Chicago: Univ. Chicago Press, 1923.
59. *Dlab V., Ringel C. M.* Canonical forms of pairs of complex matrices // Linear Algebra and Appl. – 1991. – **147**. – P. 387–410.
60. *Drozd Yu. A.* Tame and wild matrix problems // Lect. Notes Math. – 1980. – **832.** – P. 242–258.
61. *Friedland S.* Simultaneous similarity of matrices // Adv. Math. – 1983. – **50.** – P. 189–265.
62. *Gillman L., Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – **82.** – P. 362–365.
63. *Gohberg I., LancasterP., Rodman L.* Matrix polynomials. – New York: Acad. Press, 1982. – 409 p.
64. *Helmer O.* The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**. – P. 225–236.
65. *Henriksen M.* Some remarks on elementary divisor rings. II // Michigan Math. J. – 1958. – **3**, No 2. – P. 159–163.
66. *Kaplansky I.* Elementary divisor ring and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66.** – P. 464–491.
67. *Kronecker L.* Algebraische Reduktion der Scharen bilinearer Formen // Sitzungsber. Akad. Wiss. Phys.-Math. Klasse. – Berlin, 1890. – S. 763–776.
68. *Larsen M., Lewis W., Schores T.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Sitzungsber. Akad. Wiss. Phys.-Math. Klasse. – 1974. – **187**. – S. 231–248.
69. *Levy L. S, Robson J. C.* Matrices and pairs of modules // J. Algebra. – 1974. – **29**, No. 3. – P. 427–454.
70. *Nakayama T.* A note on the elementary divisor theory in non-commutative domains // Bull. Amer. Math. Soc. – 1938. – **44**, No. 5. – P. 719–723.

71. *Newman M.* Integral matrices. – New York: Acad. Press, 1972. – 224 p.
72. *Newman M.* The Smith normal form // Linear Algebra and Appl. – 1997. – **254.** – P. 367–381.
73. *Petrychkovych V.* Generalized equivalence of pairs of matrices // Linear and Multilinear Algebra. – 2000. – **48**, No. 2. – P. 179–188.
74. *Petrychkovych V.* Generalized equivalence of pairs of matrices // Мат. студії. – 1997. – **8,** № 2. – С. 147–152.
75. *Petrychkovych V. M.* Standard form of pairs of matrices with respect to generalized equivalence // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 153–160.
76. *Robson J.* Rings in which finitely generated right ideals are principal // Proc. London Math. Soc. – 1967. – **17**, No. 4.
77. *Sergeichuk V. V.* Canonical matrices for linear matrix problems // Linear Algebra and Appl. – 2000. – **317**. – P. 53–102.
78. *Shores T. S., Lewis W. J., Larsert M. I.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **187**, No. 2. – P. 231–248.
79. *Smith H. J. S.* On systems of linear indeterminate equation and congruence // Phil. Trans. Roy. Soc. London. – 1861. – **151**, No. 2. – P. 293–326.
80. *Tekhmuller O.* Der Elementarteilsatz für nichtkommutative Ringe // Abh. Preussischen Acad. Wiss. Phys.-Math. Klasse. – 1937. – S. 169–177.
81. *Terwilliger P.* Two linear transformations each tridiagonal with respect to an eigenbasis of the other // Linear Algebra and Appl. – 2001. – **330**. – P. 149–203.
82. *Vaserstein L. N.* Bass's first stable range condition // J. Pure and Appl. Algebra. – 1984. – **34**. – P. 319–330.
83. *Wedderburn J. H. M.* On matrices whose coefficients are functions of single variable // Trans. Amer. Math. Soc. – 1916. – **16**, No. 2. – P. 328–332.
84. *Weierstrass K.* Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen // Monatsh. Akad. Wiss. – Berlin, 1867. – S. 310–338.

ТЕОРЕТИКО-СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА МАТРИЦ НАД КОЛЬЦАМИ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

На основании предложенной общей концепции эквивалентности матриц над кольцами выполнен обзор результатов о различных типах редукций матриц над кольцами конечно порожденных главных идеалов, которые развивают идеи П. С. Казимирского. Изучаются множества регулярных адекватных элементов в коммутативных кольцах конечно порожденных главных идеалов, делители нуля которых принадлежат радикалу Джекобсона. Описывается влияние разнотипных ослаблений условий адекватности на процесс диагональной редукции матриц. Исследуются обобщенная и полускалярная эквивалентности матриц и их конечных наборов над адекватными областями Безу и кольцами многочленов. Установлены их надлежащие формы относительно таких эквивалентностей и предложены некоторые применения этих форм.

STRUCTURE-THEORETICAL PROPERTIES OF MATRICES OVER FINITELY GENERATED PRINCIPAL IDEAL RINGS

In terms of general concept of the equivalence of matrices over rings the results concerning different types of reduction of matrices over finitely generated principal ideal rings are obtained. The ideas of P. S. Kazymirskyi, connected with the problem of factorization of matrices, are developed. We study the sets of regular adequate elements in the commutative rings of finitely generated principal ideal rings with zero divisors not belonging to the Jacobson radical. The influence of different weakened versions of the conditions of adequacy onto the process of diagonal reduction of matrices is described. The generalized and semi-scalar equivalences of matrices and their finite sets over the Bezout rings and polynomial rings are investigated. Some forms for these equivalences are constructed. We also give some applications of these forms.

[1] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка,

[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 09.04.03