

Э. И. Григолюк, Е. А. Лопаницын

УСТОЙЧИВОСТЬ И ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассматривается устойчивость и закритическое поведение упругого, пологого сферического купола, жёстко заделанного по контуру и нагруженного равномерным поперечным давлением. Решение задачи построено методом Рэлея – Ритца на основе уравнений Маргерра с аппроксимацией перемещений рядом Фурье в окружном направлении и функциями Бесселя – в радиальном. Полученная система нелинейных алгебраических уравнений решена методом продолжения. Впервые показано, что оболочка имеет закритические неосесимметричные состояния равновесия с нагрузками, значительно меньшими как верхней критической нагрузки, так и нагрузок, соответствующих точкам бифуркации. Высказано предположение о том, что учёт форм этих состояний равновесия в качестве начальных неправильностей сферического купола должен позволить смоделировать разброс его экспериментально найденных критических нагрузок.

Введение. Основная цель решения задачи о закритическом поведении оболочек состоит в определении их равновесных состояний в условиях, при которых оболочка уже потеряла свою несущую способность. Эти состояния равновесия являются неустойчивыми и в условиях эксплуатации конструкции реализованы быть не могут. Однако знание полной картины поведения оболочки позволяет по-иному взглянуть на процесс её деформирования и понять те его явления, которые с позиций в той или иной мере идеализированных математических моделей оболочки остаются необъяснёнными. Примером этому может служить проблема расхождения теоретических и экспериментальных данных по критическим нагрузкам для тонкостенных оболочек и, в частности, для пологих сферических куполов (рис. 1), как наиболее подробно изученных в этом плане объектов.

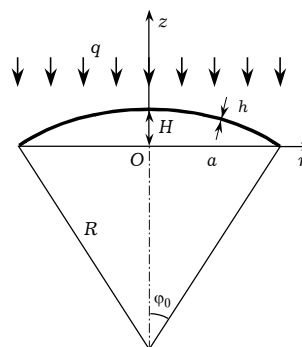


Рис. 1

История этой проблемы насчитывает почти 100 лет. Первым экспериментальным исследованием, в котором было обнаружено, что при некотором внешнем давлении сферическая оболочка оказывается неустойчивой – на ней появляются вмятины, по-видимому, является работа К. Баха [16] 1902 года. Через 13 лет, в 1915 году, выходит в свет первая работа в области расчёта тонких упругих сферических оболочек на устойчивость. Это – диссертация Р. Цолли [32]. В ней в линейной постановке автором получена формула для наименьшего критического давления $q = 2E[3(1 - \nu^2)]^{-1/2}(h/R)^2$, где E – модуль Юнга материала оболочки, ν – коэффициент Пуассона, h – толщина стенки оболочки, а R – её радиус. В 1922 году Е. Швериным [24] была предпринята попытка уточнить приближённую формулу Цолли на основе точного аналитического решения линейных осесимметричных уравнений для непологий сферической оболочки. Однако получилось так, что формула Цолли была подтверждена – расчёты по ней и по формулам Шверина дают различие в значениях наименьшей критической нагрузки только в третьем знаке. Значительно позднее, в 1939 году, Б. А. Болей и Э. Э. Секлер [21] провели тщательный эксперимент с медной полусферой и установили, что критическое давление почти в четыре раза меньше теоретического значения, соответствующего формуле Цолли.

Последующие годы, подробно описанные в книгах [1, 5] и [15], а также в обзорах [2, 14, 20] и в монографии [12], характеризовались, с одной стороны, постоянным увеличением экспериментально полученного материала о значениях критических нагрузок для сферических оболочек, а с другой стороны – нескончаемыми попытками подвести под них теоретическую базу. Для этого проводились расчёты по линейной теории, учитывалось моментное напряжённо-деформированное состояние оболочки перед потерей устойчивости, использовались геометрически нелинейные уравнения теории оболочек, рассматривались оболочки с начальными несовершенствами формы, контурных условий и способов нагружения, оболочки с возможностью упругопластического деформирования материала и т.д. Некоторым итогом этого периода может служить показанное на рис. 2 сопоставление экспериментально и теоретически полученных значений критических нагрузок потери устойчивости пологой сферической оболочки. Здесь под $q^* = [3(1 - \nu^2)]^{1/2} qR^2 / (2Eh^2)$ понимается безразмерное поперечное давление, а под $\mu = [12(1 - \nu^2)]^{1/4} [a^2 / (Rh)]^{1/2}$ – параметр тонкостенности оболочки. Сплошными линиями на рис. 2, отмеченными цифрами 1 и 2, показана теоретически найденная зависимость верхней q_+ и нижней q_- критических нагрузок осесимметрично деформирующегося идеально сферического купола от его параметра тонкостенности. Эта зависимость получена разными авторами посредством решения уравнений К. Маргерра и Э. Рейсснера [12]. Точками на рис. 2 отмечены значения верхней критической нагрузки, которые взяты из экспериментальных работ различных исследователей.

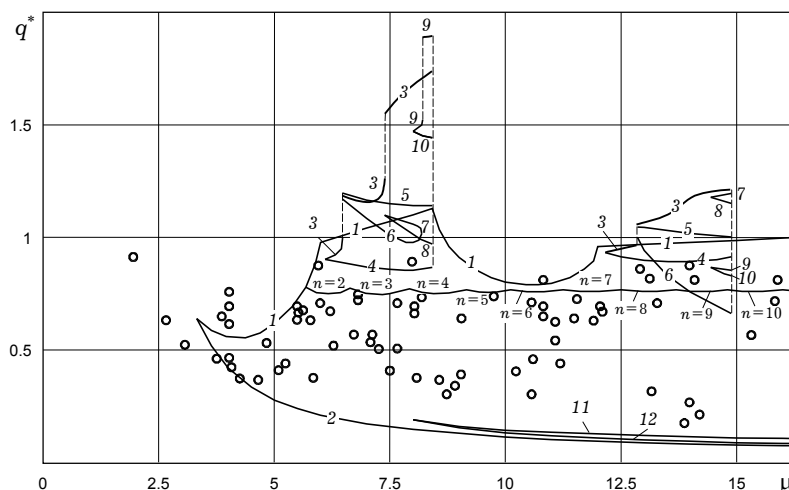


Рис. 2

По всей видимости, наблюдаемое на рис. 2 расхождение экспериментальных и теоретических результатов есть следствием отклонений рассматриваемого в расчётах купола от своей идеальности. Наиболее явным из них является отклонение формы. Однако, как было отмечено в [12], попытки учесть в расчётах эти особенности реального сферического купола не увенчались успехом. По сей день не удалось сформировать набор параметров математической модели купола, с помощью незначительного варьирования которых можно было бы получить весь спектр экспериментально найденных значений верхней критической нагрузки. В частности, введение в расчёт разумных, по усмотрению исследователя, отклонений формы купола от сферической позволило понизить верхнюю критическую нагрузку только на десятки процентов, а не в несколько раз.

В качестве одного из способов убедиться в высокой чувствительности сферического купола к несовершенствам можно рассматривать попытку

решить полную задачу о прощёлживании и закритическом поведении пологого сферического купола под действием равномерного поперечного давления в осесимметричной постановке. Первым в этой области был Дж. Мескол [22], который в 1966 году в своей статье привёл полную траекторию нагружения купола с параметром тонкостенности $\mu = 8$. Впоследствии подобные задачи были решены в [3] для случая шарнирного опирания купола и в [9] – для жёстко защемленного купола. На рис. 2 цифрами от 3 до 12 показаны некоторые результаты из работы [9]. Как видим, в диапазоне значений параметра тонкостенности μ от 6 до 8.5 и от 13 до 15 можно понизить верхнюю критическую нагрузку купола, если ввести в расчёт малую начальную неправильность, пропорциональную прогибу купола, характерному для кривых 4 и 6. Однако это понижение критической нагрузки, по всей видимости, останется в рамках ранее достигнутых десятков процентов.

Другим способом решения рассматриваемой проблемы стало изучение геометрически нелинейного поведения купола с учётом его неосесимметричности деформирования. Первой работой в этом направлении стала статья Э. И. Григолюка [4] 1960 года. В ней методом Бубнова – Папковича с двухчленной аппроксимацией прогиба в радиальном направлении и рядом Фурье – в окружном были решены уравнения Маргерра для жёстко защемленного купола, находящегося под действием равномерного поперечного давления. В том же году эта работа была доложена на симпозиуме по теории тонких упругих оболочек в Дельфте (Голландия) [18]. Через два года после этого вышли в свет работы [17, 23] и [28], где авторы привели результаты расчёта неосесимметричных критических нагрузок для такого же купола. Однако достоверность этих результатов вызвала сомнения, поскольку критические нагрузки неосесимметричной потери устойчивости оказались либо больше верхней критической нагрузки осесимметричной потери устойчивости оболочки, либо существенно меньше неё. Только в 1963 году Хуану [19] удалось получить достоверные значения неосесимметричных критических нагрузок для идеального, жёстко заделанного по контуру пологого сферического купола, хотя он тоже оказался незастрахованным от ошибки. Как было показано в [6], из-за упрощенного описания радиальных и окружных усилий Хуан получил завышенную асимптотическую оценку наименьшего критического давления для тонкой оболочки с большим количеством волн по окружности. Однако эта ошибка не повлияла на его основные результаты, которые были получены численно. Найденные им критические нагрузки соответствуют точкам бифуркации на траектории нагружения осесимметрично деформирующейся оболочки. В них купол, находясь в условиях осесимметричного геометрически нелинейного, моментного напряжённо-деформированного состояния, вызванного равномерным поперечным давлением, получает возможность деформироваться соответственно с одной, двумя, тремя и т. д. волнами по окружности. Значения этих нагрузок несколько меньше верхней критической нагрузки. Кривая, показывающая зависимость величины наименьшей неосесимметричной критической нагрузки от параметра тонкостенности, отмечена на рис. 2 значениями $n = 2, 3, \dots, 10$, где n обозначает количество волн по окружности купола, соответствующее этой нагрузке.

Приемлемый компромисс между расчётными и экспериментальными данными был найден С. Ямадой, К. Учиямой и М. Ямадой, которые сначала пытались достичь их согласованности посредством введения выбранной по собственному усмотрению осесимметричной и неосесимметричной начальной неправильности формы оболочки [25, 26]. Суть этого подхода заключается в следующем.

При выполнении экспериментов, описанных в [29] и [30], помимо прогибов оболочки и соответствующих им нагрузок, авторы замерили начальный прогиб каждой ненагруженной оболочки, который появлялся после её закрепления на испытательном стенде и представлял собой случайную неосесимметричную функцию. Эти данные о начальном прогибе оболочки, ко-

торый аппроксимировался конечными суммами в виде полиномов по радиусу и косинусам – по окружной координате оболочки в [27, 31], использовались в расчётах процесса изначально неосесимметричного деформирования оболочки с её прощёлкиванием и последующим полным выворачиванием. В результате была получена высокая степень согласованности теоретических и экспериментальных значений верхней критической нагрузки.

Своими исследованиями С. Ямада, К. Учияма и М. Ямада подтвердили правомерность использования уравнений Маргерра для описания процесса деформирования пологих оболочек в условиях конечных прогибов, их прощёлкивания и закритического поведения. Они подтвердили предположение о высокой чувствительности пологого сферического купола к начальным неправильностям, но не указали на причины такой чувствительности. А она, по всей видимости, состоит в том, что сферические оболочки обладают избирательной чувствительностью к начальным несовершенствам. Оболочка в большей степени реагирует на вид начальной неправильности, а не на её величину.

Настоящая работа является продолжением работ 1960-х годов по исследованию явления неосесимметричной потери устойчивости пологих сферических оболочек в условиях конечных прогибов. Её цель состоит в решении полной задачи о геометрически нелинейном деформировании идеального пологого сферического купола с учётом возможности его неосесимметричной потери устойчивости и в нахождении тех форм начальной неправильности, с помощью которых можно было бы получить весь диапазон экспериментально найденных критических нагрузок.

1. Математическая модель купола. Среди существующих способов представления неосесимметричных деформаций пологого сферического купола конечных прогибов, который рассматривается в полярной системе координат r и θ , наиболее простым, проверенным и достаточно точным является способ, основанный на квадратичном законе описания деформаций

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{w}{R} + \frac{\vartheta_r^2}{2}, & \alpha_{rr} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \\ e_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \vartheta_r \vartheta_\theta, & \alpha_{r\theta} &= -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} - \frac{w}{R} + \frac{\vartheta_\theta^2}{2}, & \alpha_{\theta\theta} &= -\frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

где e_{rr} , $e_{r\theta}$, $e_{\theta\theta}$, α_{rr} , $\alpha_{r\theta}$ и $\alpha_{\theta\theta}$ – деформации и кривизны срединной поверхности купола; u и v – радиальные и окружные перемещения точек срединной поверхности купола; w – прогиб; $\vartheta_r = -\partial w / \partial r$ и $\vartheta_\theta = -\partial w / (r \partial \theta)$ – углы поворота нормали к срединной поверхности купола в радиальном и в окружном направлениях.

Из этих деформационных соотношений с использованием закона Гука получаем следующие выражения для потенциальной энергии деформации купола и работы приложенного к нему поперечного давления:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ B \left(e_{rr}^2 + 2\nu e_{rr} e_{\theta\theta} + \frac{1-\nu}{2} e_{r\theta}^2 + e_{\theta\theta}^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + D [\alpha_{rr}^2 + 2\nu \alpha_{rr} \alpha_{\theta\theta} + (1-\nu) \alpha_{r\theta}^2 + \alpha_{\theta\theta}^2] \right\} r dr d\theta, \end{aligned} \quad (1)$$

$$A = \int_0^a \int_0^{2\pi} q w r dr d\theta, \quad (2)$$

где $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$ – цилиндрическая жёсткость купола, а $B = Eh / (1-\nu^2)$ – его жесткость на растяжение-сжатие.

Потенциальная энергия деформации купола и работа приложенного к нему поперечного давления посредством подстановки их в вариационное уравнение Лагранжа

$$\delta(\Pi - A) = 0 \quad (3)$$

позволяют получить для него уравнения равновесия Маргерра

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F + \frac{Eh}{R} \nabla^2 w + \frac{Eh}{2} N_2(F, w) &= 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R} \nabla^2 F - N_2(F, w) &= -q, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (4)$$

и соответствующие граничные условия для случая жёсткой заделки по контуру:

$$\begin{aligned} u, v, w, \vartheta_r, \dots, Q_r^0 &\text{ ограничены при } r = 0, \\ u = v = w = \vartheta_r = 0 &\text{ при } r = a, \end{aligned} \quad (5)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа, N_2 – нелинейный дифференциальный оператор второго порядка:

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \\ N_2(f, g) &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \right) - \\ &\quad - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right); \end{aligned}$$

F – силовая функция Эри, связанная с удельными нормальными и сдвиговыми усилиями следующими соотношениями:

$$N_{rr} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right), \quad N_{r\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} \right), \quad N_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2};$$

Q_r^0 – обобщенная радиальная удельная поперечная сила:

$$Q_r^0 = -D \frac{\partial}{\partial r} \left[\nabla^2 w + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] + N_{rr} \vartheta_r + N_{r\theta} \vartheta_\theta.$$

Одним из методов решения задачи о конечных прогибах пологого сферического купола является метод Рэлея – Ритца. Для его реализации перемещения точек срединной поверхности купола представляются функциональными суммами

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{K^{(s)}} U_i^{(s)} u_i^{(s)}(\rho) + \sum_{i=1}^{K^{(as)}} U_i^{(as)} u_i^{(as)}(\rho) \cos(n_i \theta), \\ v &= \sum_{i=1}^{K^{(as)}} V_i^{(as)} v_i^{(as)}(\rho) \sin(n_i \theta), \quad \rho = r/a, \\ w &= \sum_{i=1}^{K^{(s)}} W_i^{(s)} w_i^{(s)}(\rho) + \sum_{i=1}^{K^{(as)}} W_i^{(as)} w_i^{(as)}(\rho) \cos(n_i \theta), \end{aligned} \quad (6)$$

где слагаемые с индексом «(s)» обозначают осесимметричные составляющие решения, а с индексом «(as)» – неосесимметричные; номера неосесимметричных гармоник n_i задаются заранее; $U_i^{(s)}$, $U_i^{(as)}$, $V_i^{(as)}$, $W_i^{(s)}$ и $W_i^{(as)}$ – искомые обобщённые перемещения, а базисные функции $u_i^{(s)}(\rho)$, $u_i^{(as)}(\rho)$,

$v_i^{(s)}(\rho)$, $w_i^{(s)}(\rho)$ и $w_i^{(as)}(\rho)$, исходя из структуры уравнений равновесия купола (4) и граничных условий (5) задачи, представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_i^{(s)}(\rho) &= A_i^{(s)} J_1(v_i^{(s)} \rho), & u_i^{(as)}(\rho) &= A_i^{(as)} J_{n_i+1}(v_i^{(as)} \rho), \\ v_i^{(as)}(\rho) &= B_i^{(as)} J_{n_i+1}(\mu_i^{(as)} \rho), & w_i^{(s)}(\rho) &= C_i^{(s)} [J_0(\omega_i^{(s)} \rho) - b_i^{(s)} I_0(\omega_i^{(s)} \rho)], \\ w_i^{(as)}(\rho) &= C_i^{(as)} [J_{n_i}(\omega_i^{(as)} \rho) - b_i^{(as)} I_{n_i}(\omega_i^{(as)} \rho)]. \end{aligned}$$

Здесь J_n – функции Бесселя первого рода n -го порядка, I_n – модифицированная функция Бесселя первого рода n -го порядка, а постоянные $A_i^{(s)}$, $C_i^{(s)}$, $b_i^{(s)}$, $A_i^{(as)}$, $B_i^{(as)}$, $C_i^{(as)}$ и $b_i^{(as)}$ и коэффициенты $v_i^{(s)}$, $\omega_i^{(s)}$, $v_i^{(as)}$, $\mu_i^{(as)}$ и $\omega_i^{(as)}$ определяются из граничных условий.

С перемещениями купола в виде (6) потенциальная энергия деформации пологого сферического купола (1) и работа внешней нагрузки (2), после выполнения операций интегрирования, записываются в виде конечных сумм, аргументами которых являются обобщенные перемещения купола $U_i^{(s)}$, $U_i^{(as)}$, $V_i^{(as)}$, $W_i^{(s)}$ и $W_i^{(as)}$. Дальнейшая реализация метода Рэлея – Ритца позволяет получить уравнения равновесия оболочки относительно обобщенных перемещений. Для этого потенциальную энергию деформации Π и работу внешней нагрузки A в виде конечных сумм подставляем в уравнение Лагранжа (3). Отсюда получаем систему нелинейных алгебраических уравнений, имеющую в матричной форме вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Здесь под $\mathbf{f} = (F_1, F_2, \dots, F_{N_{\max}})^\top$ имеем в виду вектор, составленный из частных производных полной потенциальной энергии деформации оболочки $\mathcal{E} = \Pi - A$ по перемещениям $U_i^{(s)}$, $W_i^{(s)}$, $i = 1, K^{(s)}$, и $U_i^{(as)}$, $V_i^{(as)}$, $W_i^{(as)}$, $i = 1, K^{(as)}$, $N_{\max} = 2K^{(s)} + 3K^{(as)}$, а вектор \mathbf{x} в соответствии с идеей о равноправии переменных решения составлен из обобщенных перемещений, к числу которых добавлена безразмерная поперечная нагрузка:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (U_1^{(s)}, W_1^{(s)}, U_2^{(s)}, W_2^{(s)}, \dots, U_{K^{(s)}}^{(s)}, W_{K^{(s)}}^{(s)}, \\ &U_1^{(as)}, V_1^{(as)}, W_1^{(as)}, U_2^{(as)}, V_2^{(as)}, W_2^{(as)}, \dots, U_{K^{(as)}}^{(as)}, V_{K^{(as)}}^{(as)}, W_{K^{(as)}}^{(as)}, q^*)^\top. \end{aligned}$$

Решение системы нелинейных алгебраических уравнений (7), порядок которой с этого места для упрощения записи принимаем равным n , строим методом непрерывного продолжения, основу которого составляет численное решение соответствующей ей задачи Коши с нулевыми начальными условиями, описывающими ненагруженное состояние оболочки. Для этого вдали от точек бифуркации, аналогично [8], на каждом шаге по параметру λ , близкому к длине траектории нагружения, решаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{b}, \quad (8)$$

где \mathbf{J} – расширенный и дополненный якобиан системы нелинейных алгебраических уравнений (7); $\boldsymbol{\psi}$ – вектор продолжения решения \mathbf{x} ; \mathbf{b} – вектор правых частей:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{1,n} & F_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n,1} & \dots & F_{n,n} & F_{n,n+1} \\ F_{1,n+1} & \dots & F_{n,n+1} & \varepsilon \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ b \end{vmatrix}.$$

Элементы якобиана \mathbf{J} вычисляем как частные производные левых частей системы нелинейных алгебраических уравнений (7) по аргументам решения, в число которых включена безразмерная нагрузка q^* . Параметр ε системы (8) выбираем из условия наилучшей обусловленности якобиана этой системы, а параметр b – из условия близости вектора продолжения решения $\boldsymbol{\Psi}$ к нормированному: $\|\boldsymbol{\Psi}\| = 1$. В результате вектор $\boldsymbol{\Psi}$, являющийся, с геометрической точки зрения, касательным вектором к траектории нагружения, представляет собой вектор правых частей нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

численное решение которой дает координаты точек траектории нагружения купола.

Для компенсации погрешности в определении вектора \mathbf{x} , накапливающейся в процессе численного решения системы уравнений продолжения (9), вдали от точек бифуркации используем метод дискретного продолжения [7]. Его основой является метод Ньютона, реализованный для расширенного пространства переменных. Каждую итерацию метода Ньютона в соответствии с [7] организуем посредством решения системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{J}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{f}_0,$$

где $\Delta\mathbf{x}$ – вектор невязок решения, а \mathbf{f}_0 – расширенный вектор левых частей системы нелинейных алгебраических уравнений (7):

$$\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n, \Delta x_{n+1})^\top, \quad \mathbf{f}_0 = (F_1, \dots, F_n, 0)^\top.$$

В окрестности точек бифуркации система линейных алгебраических уравнений (8) является плохо обусловленной, а в самой точке бифуркации – вырожденной. Вычислить вектор продолжения $\boldsymbol{\Psi}$ и получить решение системы дифференциальных уравнений (9) нельзя. Поэтому в этой ситуации применяется модификация метода продолжения [10]. Она заключается в том, что вектор продолжения $\boldsymbol{\Psi}$ – вектор правых частей системы (9), в окрестности точки бифуркации и в ней самой ищется как линейная комбинация собственных векторов алгебраической задачи на собственные значения

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\Psi} = \omega\boldsymbol{\Psi}. \quad (10)$$

В работе [10] показано, что собственные векторы этой задачи, имеющие нулевую $(n+1)$ -ю составляющую, являются бифуркационными и с их помощью можно продолжить решение из точки бифуркации по любой выбранной ветви. Остальные собственные векторы отвечают за формирование вектора продолжения по основной ветви траектории нагружения, и процесс продолжения решения опять сводится к решению задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (9).

Уточнение решения в окрестности точек бифуркации, как и его продолжение, производится по отдельному алгоритму [11], построенному на решении задачи на собственные значения (10). С помощью её собственных векторов в зависимости от того, где производится уточнение: на основной

ветви траектории нагружения или на бифуркационной, на каждой итерации метода Ньютона по определенной методике строится уточняющий решение вектор невязок $\Delta \mathbf{x}$.

2. Анализ закритического поведения купола. Идеальный пологий сферический купол является осесимметричной оболочкой. Его нагружение осесимметричной нагрузкой – равномерным поперечным давлением, вызывает в нём сначала только осесимметричные деформации. Траектория нагружения такого купола с параметром тонкостенности $\mu = 6$ (что может соответствовать $R/h = 100$, $\varphi_0 = 19^\circ$ и $\nu = 0.3$) равномерным поперечным давлением показана на рис. 3. На ней присутствует линейный участок и участок нелинейного деформирования, на котором есть две предельные точки: B и H . Эти точки разделяют осесимметричную траекторию нагружения на устойчивые и неустойчивый участки. Участки OB и справа от точки H являются геометрическим местом точек, соответствующих устойчивым состояниям равновесия купола, а участок BH – его неустойчивым состояниям равновесия. Исходная форма недеформированного купола (точка O) и формы деформированной поверхности купола в точках B и H показаны на рис. 4, где z^* – аппликата точек срединной поверхности купола, отнесённая к его толщине. В точке B купол теряет устойчивость прощёлкиванием, она определяет верхнюю критическую нагрузку. В точке B купол имеет состояние безразличного равновесия и при малейшем увеличении нагрузки хлопком переходит в новое устойчивое состояние, описываемое точкой, находящейся на траектории нагружения справа от точки H и имеющей ту же ординату, что точка B . Если купол под действием нагрузки прощёлкнул и находится в устойчивом состоянии равновесия, описываемом точками справа от точки H , то по мере снятия нагрузки точка, соответствующая состоянию равновесия купола, будет «опускаться» по траектории нагружения к точке H . Эта точка определяет нижнюю критическую нагрузку купола. В ней купол опять приобретёт состояние безразличного равновесия и при дальнейшем уменьшении нагрузки выщелкнет и вернётся к форме, близкой к первоначальной – ненагруженной, описываемой точкой на участке OB траектории нагружения с ординатой, равной ординате точки H .

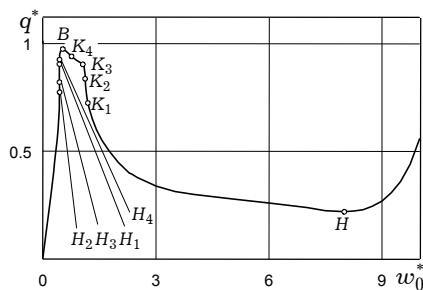


Рис. 3

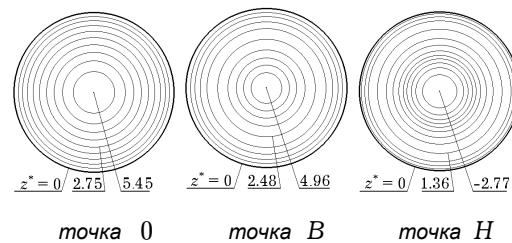


Рис. 4

Кроме предельных точек B и H , на траектории нагружения купола присутствуют точки бифуркации $H_1, H_2, H_3, H_4, K_1, K_2, K_3$ и K_4 (рис. 3). Это говорит о том, что при действии осесимметричной нагрузки купол может деформироваться неосесимметрично. Во всех этих точках он имеет осесимметричные состояния безразличного равновесия. В точках H_1, H_2, H_3 и H_4 происходит эйлерова потеря устойчивости купола с образованием соответственно одной, двух, трёх и четырёх волн по окружности. Наличие аналогичных точек K_1, K_2, K_3 и K_4 на неустойчивом участке траектории BH свидетельствует о том, что в них, наряду с неустойчивым осесимметричным напряжённо-деформированным состоянием, оболочке присущи не-

устойчивые неосесимметричные напряженно-деформированные состояния соответственно с одной, двумя, тремя и четырьмя волнами по окружности. Из этих точек выходят бифуркационные ветви траектории нагружения, которые являются геометрическим местом точек неустойчивых неосесимметричных состояний равновесия купола. Эти ветви показаны на рис. 5. Каждая из них, за исключением ветви, соответствующей состояниям равновесия с одной волной по окружности, начинается в точках H_2 , H_3 и H_4 и заканчивается в точках K_2 , K_3 и K_4 . Бифуркационная

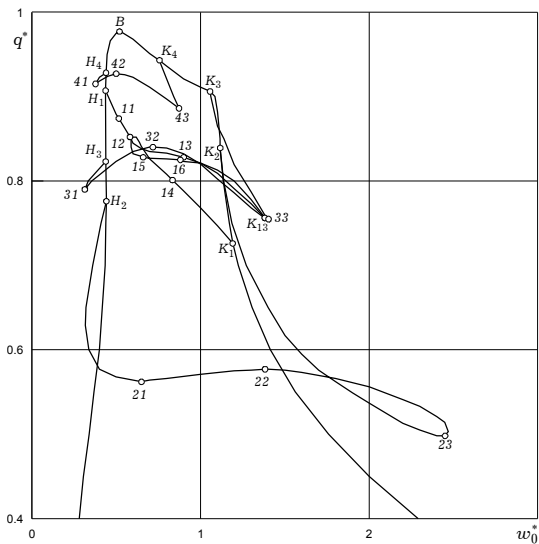


Рис. 5

ветвь, описывающая напряженно-деформированные состояния с одной волной по окружности, состоит из двух частей, каждая из которых начинается на осесимметричной части траектории нагружения в точках H_1 и K_1 и заканчивается в точке K_{13} на бифуркационной ветви, соединяющей точки H_3 и K_3 . Формы деформированной поверхности купола в точках бифуркационных ветвей траектории нагружения показаны на рис. 6–9.

При выходе из каждой точки бифуркации на устойчивом участке осесимметричной траектории нагружения OB на осесимметричные деформации купола накладываются неосесимметричные, которые по мере удаления от точки бифуркации приобретают всё более заметный характер. Однако при приближении к точкам бифуркации на неустойчивом участке осесимметричной траектории нагружения BH неосесимметричные составляющие деформирования исчезают, и в самой точке бифуркации форма купола становится осесимметричной. Это справедливо для всех бифуркационных ветвей, кроме ветвей, выходящих из точек H_1 и K_1 . При выходе из этих точек у купола появляются неосесимметричные составляющие с одной волной по окружности. Однако при значениях прогиба в полюсе купола, равных $0.6 \div 0.7$ от толщины, на неосесимметричные составляющие с одной волной по окружности начинают накладываться составляющие с тремя волнами и бифуркационные ветви, вместо того, чтобы соединиться, поворачивают в сторону неустойчивого участка осесимметричной траектории. При этом неосесимметричные составляющие с тремя волнами по окружности приобретают определяющий характер, подавляя неосесимметричные составляющие с одной волной. В результате при подходе к точке бифуркации K_{13} купол имеет форму, которая характерна для ветви с тремя волнами по окружности (рис. 7, 8).

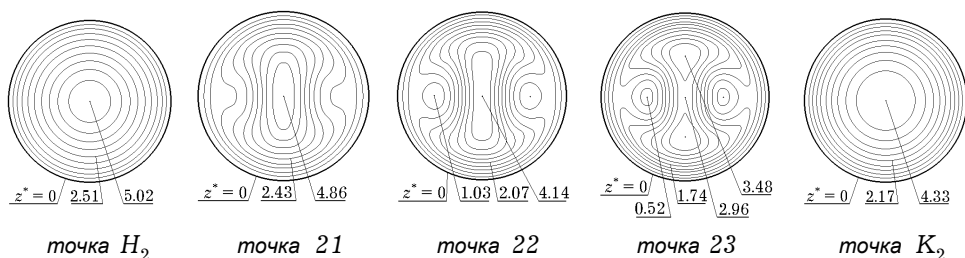


Рис. 6

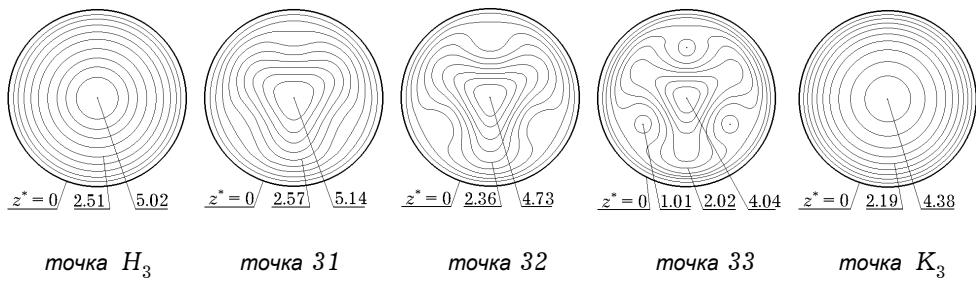


Рис. 7

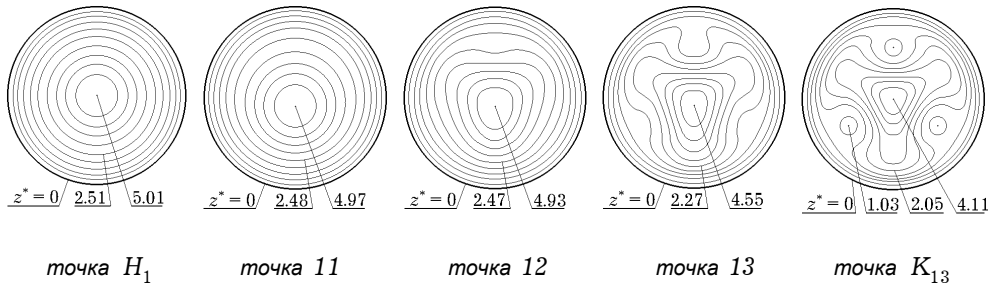


Рис. 8

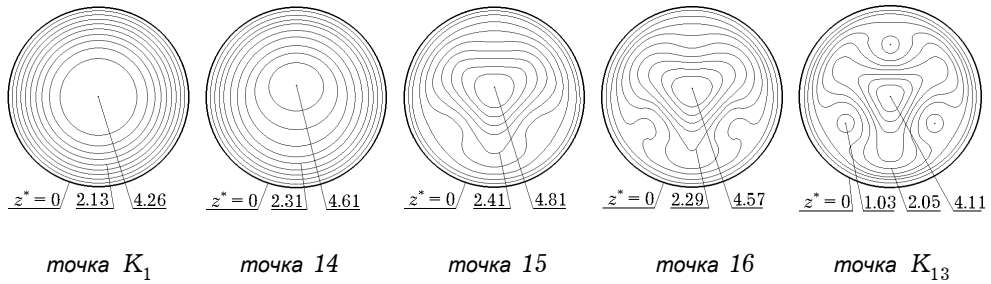
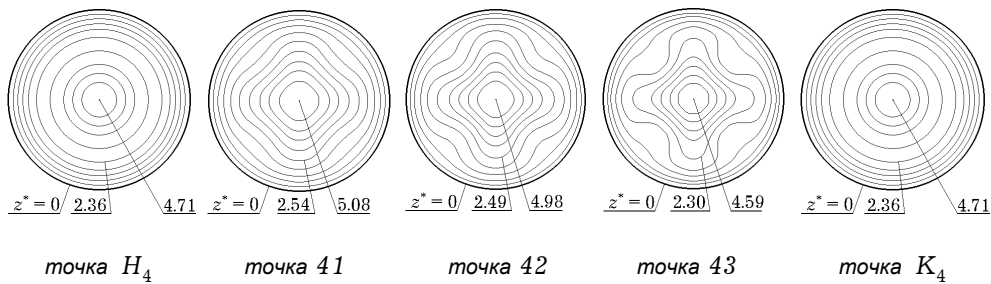


Рис. 9



Картина деформирования полого сферического купола, показанная на рис. 5, присуща оболочке идеальной формы. Реальная сферическая оболочка обязательно имеет малые отклонения от идеальной сферической формы. Поэтому при нагружении равномерной поперечной нагрузкой купол с самого начала будет деформироваться неосесимметрично в соответствии с тем, какая составляющая начальной неправильности у него преобладает. Он будет терять устойчивость прощелкиванием, как это было показано в работах [27, 29–31], где наблюдалось максимальное неосесимметричное отклонение формы сферической оболочки от идеальной не больше 7% от её толщины, а осесимметричное – не более 20%. Верхняя критическая нагруз-

ка такого прощелкивания будет определяться значениями нагрузки, характерной для предельных точек бифуркационных ветвей идеальной оболочки. Эта нагрузка будет несколько меньше этих значений, которые для рассматриваемого пологого купола находятся в диапазоне от 0.5÷0.9 (см. рис. 5). В зависимости от характера и величины начальной неправильности купола его критическая нагрузка должна принимать значения из диапазона с нижней границей меньшей, чем 0.5. Это предположение вполне согласуется с данными экспериментальных исследований, которые показаны на рис. 2. В частности, для параметра тонкостенности $\mu = 6$ экспериментально найденные значения критических нагрузок пологого сферического купола размещены в диапазоне от 0.37 до 0.88.

3. Точность определения критических нагрузок. Анализ выбранной расчетной схемы и результаты исследования погрешности расчётов позволяют утверждать, что приведенное решение задачи о геометрически нелинейном деформировании пологого, упругого сферического купола получено с относительной погрешностью, которая не превышает 5%.

На самом деле, в условиях упругого деформирования купола, уравнения Маргерра для пологих оболочек конечного прогиба считаются достаточно точными. Источниками погрешности в них являются предположение об упругости деформирования оболочки, квадратичный закон представления деформаций и предположение о пологости оболочки. Однако, по существующим оценкам из [13], для оболочек с углом раскрытия не более 22° , имеющих прогибы меньше десяти толщин, погрешность определения такой интегральной характеристики оболочки, как её критическая нагрузка, не превышает 5%.

Погрешности методов решения системы нелинейных алгебраических уравнений равновесия (7) – метода Гаусса, метода Ньютона, метода Якоби и метода Кутта – Мерсона, контролировались на каждом шаге расчётов и не превышали по относительной величине 10^{-5} , что существенно меньше погрешности математической модели. Это же относится и к погрешности применения метода Рэлея – Ритца, которая определялась численно посредством расчётов с различным количеством членов в аппроксимирующих перемещения суммах (6). Они показали, что для вычисления критических нагрузок купола с точностью до 3-х значащих цифр в суммах (6) достаточно учесть шесть слагаемых осесимметричного решения, пять слагаемых с $\sin \theta$ и $\cos \theta$, пять – с $\sin 2\theta$ и $\cos 2\theta$, три – с $\sin 3\theta$ и $\cos 3\theta$, и три – с $\sin 4\theta$ и $\cos 4\theta$. В частности, из такого представления перемещений купола получаем следующие значения бифуркационных критических нагрузок: $q_{H_1} = 0.905$, $q_{H_2} = 0.771$, $q_{H_3} = 0.820$ и $q_{H_4} = 0.923$, которые хорошо согласуются со значениями, полученными Жуаном [19]: $q_{H_1} = 0.919$, $q_{H_2} = 0.775$, $q_{H_3} = 0.827$ и $q_{H_4} = 0.931$.

Заключение. Представленный анализ процесса неосесимметричного закритического деформирования пологого сферического купола позволяет предположить, что наблюдаемый разброс экспериментальных значений его критических нагрузок обусловлен, в первую очередь, наличием у него осе- и неосесимметричных начальных неправильностей формы и определяется, скорее всего, не величиной этих отклонений, а их формой. Величина критической нагрузки должна зависеть от того, какая составляющая начальной неправильности купола из числа найденных его форм закритических неустойчивых состояний равновесия у него преобладает. Поэтому введение в расчёт процесса деформирования купола малых начальных неправильностей в виде его форм неосесимметричного закритического равновесия должно позволить смоделировать наблюдаемый в экспериментах разброс значений критической нагрузки.

1. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
2. *Ворович И. И., Минакова Н. И.* Проблема устойчивости и численные методы в теории сферических оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела / ВИНТИ. – 1973. – **7**. – С. 5–86.
3. *Гаврюшин С. С.* Численное моделирование и анализ процессов нелинейного деформирования гибких оболочек // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1994. – № 1. – С. 109–119.
4. *Григолюк Э. И.* Устойчивость сферической оболочки при конечных прогибах и несимметричной деформации // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – № 6. – С. 68–73.
5. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 359 с.
6. *Григолюк Э. И., Липовцев Ю. В.* Локальная устойчивость упругих оболочек вращения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1968. – № 6. – С. 134–138.
7. *Григолюк Э. И., Лопаницын Е. А.* Об одной модификации метода дискретного продолжения по параметру // Прикл. механика и техн. физика. – 1990. – № 5. – С. 95–99.
8. *Григолюк Э. И., Лопаницын Е. А.* О методе непрерывного продолжения по параметру // Докл. РАН. – 1994. – **335**, № 5. – С. 582–585.
9. *Григолюк Э. И., Лопаницын Е. А.* Осесимметричное закритическое поведение пологих сферических куполов // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, № 4. – С. 621–634.
10. *Григолюк Э. И., Лопаницын Е. А.* Продолжение решения нелинейных уравнений в окрестности точек бифуркации // Мат. методы та физ.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 1. – С. 35–46.
11. *Григолюк Э. И., Лопаницын Е. А.* Уточнение решения нелинейных уравнений в окрестности точки бифуркации // Пространства жизни: К 85-летию Б. В. Раушенбаха. – М.: Наука, 1999. – С. 192–199.
12. *Григолюк Э. И., Мамай В. И.* Механика деформирования сферических оболочек. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 114 с.
13. *Муштару Х. М., Галимов К. Э.* Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 432 с.
14. *Сунагава Мэгуми, Кумаи Нори* Соппротивление элементов конструкций динамическому нагружению // J. Jap. Soc. Aeronaut. and Space Sci. – 1970. – **18**, No. 195. – P. 154–166.
15. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.
16. *Bach C.* Die Widerstandsfähigkeit kugelförmiger Wändlungen gegenüber äusserem Überdruck // Z. Vereines Deutsch. Ingenieure. – 1902. – **46**, No. 10. – S. 333–341.
17. *Gjelsvik A., Bodner S. R.* Nonsymmetrical snap buckling of spherical caps // J. Eng. Mech. Div. – 1962. – **88**, No. 5. – P. 154–166.
18. *Grigoljuk E. I.* On the snapping of shell of revolution // Proc. IUTAM Symp. Theory of Thin Elastic Shells (Delft, 1959). – Amsterdam, 1960. – P. 112–121.
19. *Huang N.-C.* Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells. I, II // Amer. Inst. Aeronaut. and Astronaut. J. – 1963. – **1**, No. 4. – P. 945; Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1964. – **31**, No. 3. – P. 447–457.
20. *Karman Th., Kerr A. D.* Instability of spherical shells subjected to external pressure // Topics Appl. Mech. – Amsterdam, 1965. – P. 1–22.
21. *Karman Th., Tsien S.* The buckling of spherical shells by external pressure // J. Aeronaut. Sci. – 1939. – **7**, No. 2. – P. 43–50.
22. *Mescall J.* Numerical solutions of nonlinear equations for shells of revolution // Amer. Inst. Aeronaut. and Astronaut. J. – 1966. – **4**, No. 11. – P. 2041–2043.
23. *Parmarter R. D., Fung Y. C.* On the influence of nonsymmetrical modes on the buckling of shallow spherical shells under uniform pressure // NASA Techn. Notes. – 1962. – No. D-1510. – P. 491–502.
24. *Schwerin E.* Zur Stabilität der dünnwandigen Hohlkugel unter gleichmäßigem Außendruck // Z. angew. Math. und Mech. – 1922. – **2**, No. 1. – S. 81–91.
25. *Uchiyama K., Yamada M.* Buckling of clamped imperfect thin shallow spherical shells under external pressure. Part 1 // Techn. Rep. Tohoku Univ. – 1974. – **39**. – P. 101–132.
26. *Uchiyama K., Yamada M.* Buckling of clamped imperfect thin shallow spherical shells under external pressure. Part 2 // Techn. Rep. Tohoku Univ. – 1975. – **40**. – P. 1–23.

27. Uchiyama K., Yamada S. Nonlinear buckling simulations of imperfect shell domes using a hybrid finite element formulation and the agreement with experiments // Computational methods for shell and spatial structures. IASS-IACM-2000. – Athens: ISASR-NTUA, 2000. – 14 p.
28. Weinitschke H. J. Asymmetric buckling of clamped shallow spherical shell // NASA Techn. Notes. – 1962. – No. D-1510. – P. 481–490.
29. Yamada S., Uchiyama K., Yamada M. Experiments on the buckling of clamped shallow spherical shells under external pressure // Techn. Rep. Tohoku Univ. – 1980. – 45. – P. 205–227.
30. Yamada S., Uchiyama K., Yamada M. Experimental investigation of the buckling of shallow spherical shells // J. Non-Linear Mech. – 1983. – 18, No. 1. – P. 37–54.
31. Yamada M., Yamada S. Agreement between theory and experiment on large-deflection behaviour of clamped shallow spherical shells under external pressure // Collapse / Eds. J. M. T. Tompson and J. W. Hant. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983. – P. 431–441.
То же: Ямада М., Ямада С. Соответствие результатов теоретического и экспериментального исследования больших прогибов заделанных пологих сферических оболочек, нагруженных внешним давлением // Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: Теория и практика. – М.: Наука, 1991. – С. 337–347.
32. Zöllly R. Über ein Knickungsproblem an der Kugelschale: Promotionsarbeit. – Zürich: Techn. Hochschule, 1915. – 85 S.

СТІЙКІСТЬ І ЗАКРИТИЧНА ПОВЕДІНКА ПОЛОГОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Розглядається стійкість і закритична поведінка пружного, пологого сферичного купола, жорстко закріпленого по контуру та навантаженого рівномірним поперечним стиском. Розв'язок задачі будується методом Релея – Рітца на основі рівнянь Маргерра з апроксимацією переміщень рядом Фур'є в круговому напрямку і функціями Бесселя – у радіальному. Отриману систему нелінійних алгебричних рівнянь розв'язано методами продовження. Вперше показано, що оболонка має закритичні неосесиметричні стани рівноваги з навантаженнями, значно меншими і від верхнього критичного навантаження, і від навантаження, яке відповідає точкам біфуркації. Висловлено припущення про те, що врахування форм цих станів рівноваги як початкових неправильностей сферичного купола може дозволити змоделювати розкид експериментально знайдених його критичних навантажень.

BUCKLING AND POSTBUCKLING BEHAVIOR OF SHALLOW SPHERICAL SHELL

Buckling and postbuckling behavior of a clamped elastic shallow spherical shell under uniform pressure is considered. Solution of this problem is constructed by Rayleigh – Ritz method, applied to the Marguerre equations with approximation of displacements by Fourier series in circumferential direction and Bessel's function in the radial one. The obtained system of nonlinear algebraic equations is solved by prolongation methods. For the first time it is shown that the shell has nonsymmetric postbuckling states of equilibrium with loads, which are less both than the upper buckling loads and loads corresponding to bifurcation points. It is assumed that considering the forms of these states of equilibrium as initial imperfections of spherical shell must allow to describe the dispersion of its experimentally obtained buckling loads.

Моск. гос. техн. ун-т «МАМИ»,
Москва, Россия

Получено
21.03.03