

МІЖФАЗНІ ТРІЩИНИ З ЗОНАМИ КОНТАКТУ В АНІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ У ПОЛІ ВІДДАЛЕНОГО ТЕРМОМЕХАНІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ, ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ І ТЕПЛОВИХ ДЖЕРЕЛ

Розглянуто плоску задачу для нескінченної площини (простору), що складається з двох різнорідних анізотропних півплощин (півпросторів), на лінії (у площині) стику яких розміщені міжфазні тріщини, які допускаються повністю відкритими, закритими та частково закритими з відкритими ідеально теплоізольованими ненавантаженими ділянками і гладкими та ідеально теплопровідними зонами контакту. Як навантаження задано зосереджені сили та теплові джерела, що прикладені в довільних точках площини, а також рівномірно розподілені зусилля зсуву та розтягу і тепловий потік, які діють на нескінченності. Розв'язок задачі побудовано в замкненій формі методами теорії функцій комплексної змінної. Одержано систему трансцендентних рівнянь для визначення довжин зон контакту та вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах тріщин. Чисельний аналіз проведено для однієї тріщини з однією зоною контакту під дією двох зосереджених сил і теплових джерел, а також термомеханічного навантаження на нескінченності.

Вступ. Дослідження міжфазних тріщин має велике значення, оскільки саме вони в більшості випадків призводять до руйнування композитних матеріалів. Основними математичними моделями міжфазних тріщин є «відкрита» тріщина та тріщина з контактуючими біля вершин берегами. Перша модель має той недолік, що напруження і переміщення берегів тріщин біля вершин мають осцилюючі особливості, а це не відповідає дійсності. Термопружна плоска задача для міжфазної тріщини з ідеально теплоізольованою відкритою ділянкою і теплопровідною зоною контакту для анізотропного біматеріалу досліджена в роботі [11]. Більш загальні умови на берегах тріщини розглянуто в [2] за допомогою методу сингулярних інтегральних рівнянь. У вищезазначених роботах, як і в багатьох інших, як навантаження задаються зусилля і тепловий потік, які прикладені на нескінченності або на берегах тріщини. Міжфазні тріщини з зонами контакту у полі зосереджених сил чи моментів були досліджені аналітично для ізотропного тіла в роботі [8].

У пропонованій роботі побудовано точний розв'язок для міжфазних тріщин із зонами гладкого контакту, які знаходяться в анізотропному біматеріалі під дією термомеханічного навантаження, прикладеного на нескінченності, та зосереджених сил і теплових джерел, прикладених у довільних точках площини.

Постановка задачі. Розглянемо систему міжфазних тріщин, які розміщені на лінії стику двох різнорідних анізотропних півплощин або півпросторів. Для термопружних характеристик матеріалів введемо такі позначення: $a_{ij}^{(k)}$ – коефіцієнти пружності [3]; $k_{ij}^{(k)}$ – коефіцієнти теплопровідності; $\alpha_{ij}^{(k)}$ – коефіцієнти теплового розширення (тут верхніми індексами « k » позначено величини, що відносяться до верхньої, $k = 1$, і нижньої, $k = 2$, півплощин). Задамо декартову систему координат $Oxyz$ так, щоб вісь Oy була перпендикулярно до площини (лінії) стику півпросторів (півплощин), а вісь Ox лежала в площині стику півпросторів або вздовж лінії стику півплощин. За навантаження приймаємо рівномірно розподілені зусилля σ , τ , $\sigma_{11}^{(1)\infty}$, $\sigma_{11}^{(2)\infty}$, прикладені на нескінченності, а також зосереджені сили $\mathbf{P}_n^{(k)}$ і теплові джерела потужності $Q_n^{(k)}$, прикладені в N_k^* довільних точках

$(x_n^{*(k)}, y_n^{*(k)})$ верхньої і нижньої півплощин. На нескінченності діє однорідний тепловий потік q_2^∞ . У випадку півпросторів навантаження вважаємо рівномірно розподіленим вздовж осі z так, щоб мала місце плоска задача. Відкриті не навантажені теплоізольовані ділянки тріщини будемо позначати через M_n , закриті ідеально теплопровідні ділянки тріщини з гладким контактом берегів – через L_n , лінію стику – через U . Точки переходу від жорсткого зчеплення до зон контакту будемо позначати через a_i , $i = 1, 2, \dots, I$, точки між зонами контакту та відкритими ділянками – через b_j , $j = 1, 2, \dots, J$, між зчепленими та відкритими ділянками – через c_n , $n = 1, 2, \dots, N$ (рис. 1). Термомеханічні поля подамо як суму таких полів: а) полів, що викликаються у біматеріалі без тріщин термомеханічним навантаженням, заданим на нескінченності; б) полів у біматеріалі з тріщинами, які зумовлені внутрішніми зосередженими силами та джерелами тепла і прикладеним до берегів тріщини термомеханічним навантаженням, яке за знаком протилежне до того, що виникає на лінії стику в бездефектному біматеріалі під дією термомеханічного навантаження на нескінченності. Саме це термомеханічне поле б) і будемо шукати. Позначаючи компоненти полів напружень, переміщень, теплового потоку та температуру через $\sigma_{ij}^{(k)}(x, y)$, $u_i^{(k)}(x, y)$, $q_i^{(k)}(x, y)$, $i, j = 1, 2, 3$, і $T^{(k)}(x, y)$ відповідно і вводячи вектори напружень $\mathbf{t} = [\sigma_{12}, \sigma_{22}]^\top$ і переміщень $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^\top$, умови спряження і граничні умови запишемо у такому вигляді:

$$[\mathbf{t}(x)] = 0, \quad [q_2(x)] = 0, \quad x \in L + M + U, \quad (1')$$

$$[\mathbf{u}(x)] = 0, \quad x \in U, \quad [T(x)] = 0, \quad x \in U + L, \quad (1'')$$

$$\sigma_{12}^{(1)}(x, 0) = -\tau, \quad [u_2(x)] = 0, \quad x \in L, \quad (1''')$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x, 0) = -\mathbf{t}^\infty, \quad q_2^{(1)}(x, 0) = -q_2^\infty, \quad x \in M, \quad (1'''')$$

де $\mathbf{t}^\infty = [\tau, \sigma]^\top$; $L = \bigcup_{n=1}^{(I+J)/2} L_n$; $M = \bigcup_{n=1}^{(N+J)/2} M_n$; $[f(x)] = f^{(1)}(x, 0) - f^{(2)}(x, 0)$ – стрибок функції на лінії стику матеріалів.

Подання термомеханічних полів через комплексні потенціали. Розв'язок плоскої термопружної задачі для однорідного анізотропного тіла можна виразити через три аналітичні функції $f_1(z_1)$, $f_2(z_2)$, $\theta(z^*)$ комплексних змінних $z_n = x + \mu_n y$, $z^* = x + t y$, у яких μ_n , t – корені таких рівнянь з додатними уявними частинами:

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0, \quad (2')$$

$$t^2 k_{22} + 2t k_{12} + k_{11} = 0. \quad (2'')$$

Для ортотропного тіла з головними осями ортотропії, що співпадають з осями координат, розв'язки μ_n , t вищенаведених рівнянь мають такий вигляд:

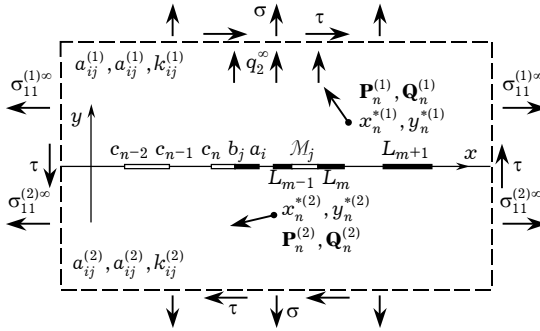


Рис. 1

$$\begin{aligned}\mu &= \pm \sqrt{(-2a_{12} - a_{66} \pm \sqrt{(2a_{12} + a_{66})^2 - 4a_{11}a_{22}}) / (2a_{11})}, \\ m &= i\sqrt{k_{11} / k_{22}}.\end{aligned}\quad (2'')$$

Отже, термомеханічні поля можна подати в такій формі [6, 7]:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x, y) &= \mathbf{A}\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{A}\mathbf{f}(z)} + \mathbf{w}\theta(z^*) + \overline{\mathbf{w}\theta(z^*)}, \\ \mathbf{t}(x, y) &= \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) + \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}'(z)} + \mathbf{w}_*\theta'(z^*) + \overline{\mathbf{w}_*\theta'(z^*)}, \\ \sigma_{11}(x, y) &= 2 \operatorname{Re} \{ \mu_1^2 f_1'(z_1) + \mu_2^2 f_2'(z_2) + m^2 r \theta'(z^*) \}\end{aligned}\quad (3')$$

та

$$T(x, y) = \theta'(z^*) + \overline{\theta'(z^*)}.\quad (3'')$$

Підставляючи вираз для температури (3'') у формули, що визначають компоненти теплового потоку

$$q_i(x, y) = -k_{i1} \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} - k_{i2} \frac{\partial T(x, y)}{\partial y},$$

одержуємо

$$\begin{aligned}q_1(x, y) &= -\frac{k_*}{k_{22}} \{ (k_* + ik_{12})\theta''(z^*) - (k_* - ik_{12})\overline{\theta''(z^*)} \}, \\ q_2(x, y) &= -ik_* \{ \theta''(z^*) - \overline{\theta''(z^*)} \}.\end{aligned}\quad (3''')$$

У наведених вище формулах введено такі позначення:

$$\mathbf{f}(z) = [f_1(z_1), f_2(z_2)]^\top,$$

$$\mathbf{w} = [r(a_{11}m^2 + a_{12} - a_{16}m) + \alpha_{11}, r(a_{12}m + a_{22}/m - a_{26}) + \alpha_{11}/m]^\top,$$

$$\mathbf{w}_* = r[-m, 1]^\top, \quad \mathbf{A} = [A_{ij}], \quad A_{1j} = a_{11}\mu_j^2 + a_{12} - a_{16}\mu_j, \quad A_{2j} = a_{12}\mu_j + a_{22}/\mu_j - a_{26},$$

$$r = \frac{\alpha_{12}m - \alpha_{11}m^2 - \alpha_{22}}{a_{11}(m - \mu_1)(m - \mu_2)(m - \bar{\mu}_1)(m - \bar{\mu}_2)}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mu_1 & -\mu_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вищенаведені вирази справедливі для плосконапруженого стану (ПНС). Для плоскодеформованого стану (ПДС) замість a_{ij} і α_{ij} необхідно покласти $a_{ij} - a_{i3}a_{j3}/a_{33}$ і $\alpha_{ij} - \alpha_{33}a_{i3}/a_{33}$ відповідно.

При наявності зосереджених теплових джерел у деяких точках площини функція $\theta'(z)$ має логарифмічні особливості в цих точках. Позначаючи суму всіх особливостей у верхній півплощині через $\theta_0^{(1)}(z)$, а в нижній – через $\theta_0^{(2)}(z)$, згідно з [6] запишемо

$$\theta_0^{(k)}(z) = -\frac{1}{4\pi k_*} \sum_{n=1}^{N_k^*} Q_n^{(k)} \ln(z - \zeta_n^{*(k)}), \quad \zeta_n^{*(k)} = x_n^{*(k)} + m^{(k)} y_n^{*(k)}.\quad (4)$$

Коли в деяких точках площини розташовані зосереджені сили та теплові джерела, то вектор-функція $\mathbf{f}(z)$ у цих точках також має особливості. Якщо суми всіх особливостей у верхній і нижній півплощинах позначити через $\mathbf{f}_0^{(k)}(z)$, то для них запишемо наступну формулу:

$$\mathbf{f}_0^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{N_k^*} \left(\mathbf{R}_n^{(k)} \ln(z - \zeta_n^{(k)}) + \frac{\mathbf{R}_n^{(k)}}{z - \zeta_n^{(k)}} \right).\quad (5')$$

Тут $\zeta_n^{(k)} = x_n^{*(k)} + \mu^{(k)} y_n^{*(k)}$, $\mu^{(k)} = [\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}]^\top$; $\mathbf{R}_n^{(k)}$ і $\mathbf{R}_n'^{(k)}$ визначаємо з таких рівнянь [6]:

$$\operatorname{Im} \mathbf{B}^{(k)} \mathbf{R}_n^{(k)} = -\frac{\mathbf{P}_n^{(k)}}{4\pi} [\cos \vartheta_{nk}, \sin \vartheta_{nk}]^\top, \quad \operatorname{Im} \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{R}_n^{(k)} = 0, \quad (5'')$$

$$\operatorname{Im} \mathbf{B}^{(k)} \mathbf{R}_n^{\prime(k)} = \frac{Q_n^{(k)}}{4\pi k_*^{(k)}} \operatorname{Im} \mathbf{w}_*^{(k)},$$

$$\operatorname{Im} \{ (\mu_1^{(k)})^2 R_{n1}^{\prime(k)} + (\mu_2^{(k)})^2 R_{n2}^{\prime(k)} \} = \frac{Q_n^{(k)}}{4\pi k_*^{(k)}} \operatorname{Im} \{ r^{(k)} (m^{(k)})^2 \}, \quad (5''')$$

$$\operatorname{Im} \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{R}_n^{\prime(k)} = \frac{Q_n^{(k)}}{4\pi k_*^{(k)}} \operatorname{Im} \mathbf{w}^{(k)},$$

$$\operatorname{Im} \{ \mathbf{A}^{(k)} \operatorname{diag} [\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}] \mathbf{R}_n^{\prime(k)} \} = \frac{Q_n^{(k)}}{4\pi k_*^{(k)}} \operatorname{Im} m^{(k)} \mathbf{w}^{(k)}, \quad (5''')$$

тут ϑ_{nk} – кути між віссю x та напрямками сил $\mathbf{P}_n^{(k)}$; $\operatorname{diag} [\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}]$ – матриця з діагональними компонентами $\mu_1^{(k)}$ і $\mu_2^{(k)}$. Рівняння (5''') не є незалежними, так що система (5'''), (5''') визначає $\mathbf{R}_n^{\prime(k)}$ однозначно.

Вирази для напружень і стрибків переміщень через аналітичні функції. Використовуючи вирази (3'), (3'') і (3''') та задовольняючи умови спряження (1'), (1''), одержуємо

$$\begin{aligned} k_*^{(1)} \theta^{\prime(1)}(x) + k_*^{(2)} \bar{\theta}^{\prime(2)}(x) &= k_*^{(2)} \theta^{\prime(2)}(x) + k_*^{(1)} \bar{\theta}^{\prime(1)}(x), \\ \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}^{\prime(1)}(x) - \bar{\mathbf{B}}^{(2)} \bar{\mathbf{f}}^{\prime(2)}(x) + \mathbf{w}_*^{(1)} \theta^{\prime(1)}(x) - \bar{\mathbf{w}}_*^{(2)} \bar{\theta}^{\prime(2)}(x) &= \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}^{\prime(2)}(x) - \\ &- \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}^{\prime(1)}(x) + \mathbf{w}_*^{(2)} \theta^{\prime(2)}(x) - \bar{\mathbf{w}}_*^{(1)} \bar{\theta}^{\prime(1)}(x), \quad x \in U + M + L, \end{aligned} \quad (6')$$

і

$$\begin{aligned} \theta^{\prime(1)}(x) - \bar{\theta}^{\prime(2)}(x) &= \theta^{\prime(2)}(x) - \bar{\theta}^{\prime(1)}(x), \quad x \in L + U, \\ \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{f}^{\prime(1)}(x) - \bar{\mathbf{A}}^{(2)} \bar{\mathbf{f}}^{\prime(2)}(x) + \mathbf{w}^{(1)} \theta^{\prime(1)}(x) - \bar{\mathbf{w}}^{(2)} \bar{\theta}^{\prime(2)}(x) &= \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{f}^{\prime(2)}(x) - \\ &- \bar{\mathbf{A}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}^{\prime(1)}(x) + \mathbf{w}^{(2)} \theta^{\prime(2)}(x) - \bar{\mathbf{w}}^{(1)} \bar{\theta}^{\prime(1)}(x), \quad x \in U. \end{aligned} \quad (6'')$$

Як відомо [4], коли функції, аналітичні в областях зі спільною границею, приймають однакові значення на цій границі, то вони аналітично продовжують одна одну, тобто з рівностей (6') і (6'') випливає, що існують такі функції:

$$\Psi'_0(z) = \begin{cases} k_*^{(1)} \theta^{\prime(1)}(z) + k_*^{(2)} \bar{\theta}^{\prime(2)}(z), & y > 0, \\ k_*^{(2)} \theta^{\prime(2)}(z) + k_*^{(1)} \bar{\theta}^{\prime(1)}(z), & y < 0, \end{cases} \quad (7')$$

$$\mathbf{v}(z) = \begin{cases} \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}^{\prime(1)}(z) - \bar{\mathbf{B}}^{(2)} \bar{\mathbf{f}}^{\prime(2)}(z) + \mathbf{w}_*^{(1)} \theta^{\prime(1)}(z) - \bar{\mathbf{w}}_*^{(2)} \bar{\theta}^{\prime(2)}(z), & y > 0, \\ \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}^{\prime(2)}(z) - \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}^{\prime(1)}(z) + \mathbf{w}_*^{(2)} \theta^{\prime(2)}(z) - \bar{\mathbf{w}}_*^{(1)} \bar{\theta}^{\prime(1)}(z), & y < 0, \end{cases} \quad (7'')$$

$$\theta'(z) = \begin{cases} \theta^{\prime(1)}(z) - \bar{\theta}^{\prime(2)}(z), & y > 0, \\ \theta^{\prime(2)}(z) - \bar{\theta}^{\prime(1)}(z), & y < 0, \end{cases} \quad (7''')$$

$$\Phi(z) = \begin{cases} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{f}^{\prime(1)}(z) - \bar{\mathbf{A}}^{(2)} \bar{\mathbf{f}}^{\prime(2)}(z) + \mathbf{w}^{(1)} \theta^{\prime(1)}(z) - \bar{\mathbf{w}}^{(2)} \bar{\theta}^{\prime(2)}(z), & y > 0, \\ \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{f}^{\prime(2)}(z) - \bar{\mathbf{A}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}^{\prime(1)}(z) + \mathbf{w}^{(2)} \theta^{\prime(2)}(z) - \bar{\mathbf{w}}^{(1)} \bar{\theta}^{\prime(1)}(z), & y < 0. \end{cases} \quad (7''')$$

Застосовуючи узагальнену теорему Ліувілля до (7') і (7''), отримаємо

$$\psi_0(z) = \sum_{k=1}^2 k_*^{(k)} (\theta_0^{(k)}(z) + \bar{\theta}_0^{(k)}(z)), \quad (8')$$

$$\mathbf{v}(z) = \mathbf{v}_1(z) + \boldsymbol{\psi}_1(z), \quad (8'')$$

де

$$\mathbf{v}_1(z) = \sum_{k=1}^2 (\mathbf{B}^{(k)} \mathbf{f}'_0^{(k)}(z) - \bar{\mathbf{B}}^{(k)} \bar{\mathbf{f}}_0^{(k)}(z)), \quad (8''')$$

$$\boldsymbol{\psi}_1(z) = \sum_{k=1}^2 (\mathbf{w}_*^{(k)} \theta_0^{(k)}(z) - \bar{\mathbf{w}}_*^{(k)} \bar{\theta}_0^{(k)}(z)). \quad (8''')$$

Очевидно, що функцію $\theta(z)$ і вектор-функцію $\boldsymbol{\varphi}(z)$ можна подати у такому вигляді:

$$\theta(z) = \theta_0(z) + \theta_*(z), \quad \boldsymbol{\varphi}(z) = \boldsymbol{\varphi}_0(z) + \boldsymbol{\varphi}_*(z),$$

де $\boldsymbol{\varphi}_*(z)$ і $\theta_*(z)$ – аналітичні вектор-функція та функція у всій площині, за винятком ділянок $\mathcal{M} + L$ та \mathcal{M} відповідно, а $\boldsymbol{\varphi}_0(z)$ і $\theta_0(z)$ – суми особливостей відповідних функцій, які згідно з (7''') і (7''') мають вигляд

$$\boldsymbol{\varphi}'_0(z) = \mathbf{v}_2(z) + \boldsymbol{\psi}_2(z), \quad (9')$$

$$\theta_0(z) = \sum_{k=1}^2 (\theta_0^{(k)}(z) - \bar{\theta}_0^{(k)}(z)), \quad (9'')$$

тут

$$\mathbf{v}_2(z) = \sum_{k=1}^2 (\mathbf{A}^{(k)} \mathbf{f}'_0^{(k)}(z) - \bar{\mathbf{A}}^{(k)} \bar{\mathbf{f}}_0^{(k)}(z)), \quad (9''')$$

$$\boldsymbol{\psi}_2(z) = \sum_{k=1}^2 (\mathbf{w}^{(k)} \theta_0^{(k)}(z) - \bar{\mathbf{w}}^{(k)} \bar{\theta}_0^{(k)}(z)). \quad (9''')$$

Проінтегрувавши рівняння (7'), за допомогою (7''') виводимо

$$\begin{aligned} \theta^{(k)}(z) &= (\psi_0(z) + k_*^{(r)} \theta'(z)) / (k_*^{(1)} + k_*^{(2)}), \\ \bar{\theta}^{(k)}(z) &= (\psi_0(z) - k_*^{(r)} \theta'(z)) / (k_*^{(1)} + k_*^{(2)}). \end{aligned} \quad (10')$$

Використовуючи (7'') і диференціюючи (7'''), отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'^{(k)}(z) &= \mathbf{D}_k (\boldsymbol{\varphi}'(z) - \mathbf{h}_k \theta'(z) - \mathbf{p}_k \psi_0(z) - \mathbf{P}_k \mathbf{v}(z)), \\ \bar{\mathbf{f}}'^{(k)}(z) &= -\bar{\mathbf{D}}_k (\boldsymbol{\varphi}'(z) - \bar{\mathbf{h}}_k \theta'(z) + \bar{\mathbf{p}}_k \psi_0(z) - \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{v}(z)), \end{aligned} \quad (10'')$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= \bar{\mathbf{A}}^{(r)} (\bar{\mathbf{B}}^{(r)})^{-1}, & \mathbf{D}_k &= (\mathbf{A}^{(k)} - \mathbf{P}_k \mathbf{B}^{(k)})^{-1}, \\ \mathbf{p}_k &= (\mathbf{w}^{(k)} - \bar{\mathbf{w}}^{(r)} - \mathbf{P}_k (\mathbf{w}_*^{(k)} - \bar{\mathbf{w}}_*^{(r)})) / (k_*^{(1)} + k_*^{(2)}), \\ \mathbf{h}_k &= (\mathbf{w}^{(k)} k_*^{(r)} + \bar{\mathbf{w}}^{(r)} k_*^{(k)} - \mathbf{P}_k (\mathbf{w}_*^{(k)} k_*^{(r)} + \bar{\mathbf{w}}_*^{(r)} k_*^{(k)})) / (k_*^{(1)} + k_*^{(2)}). \end{aligned} \quad (10''')$$

У виразах (10') і (10''') індекс $r = 1$ (2), коли індекс $k = 2$ (1).

Підставляючи формули (10') і (10'') у (3'), (3'') і (3'''), переміщення, напруження, температуру і теплові потоки виражаємо через аналітичні функцію $\theta(z)$ і вектор-функцію $\boldsymbol{\varphi}(z)$. При $y = 0$ звідти отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(1)}(x, 0) &= \mathbf{G} \boldsymbol{\varphi}^{'+}(x) - \bar{\mathbf{G}} \boldsymbol{\varphi}^{'-}(x) + \mathbf{h}^* \theta^{'+}(x) - \bar{\mathbf{h}}^* \theta^{'-}(x) - \mathbf{p}^* \psi_0(x) - \mathbf{P}^* \mathbf{v}(x), \\ [\mathbf{u}'(x)] &= \boldsymbol{\varphi}^{'+}(x) - \boldsymbol{\varphi}^{'-}(x) \end{aligned} \quad (11)$$

і

$$[T(x)] = \theta^{'+}(x) - \theta^{'-}(x), \quad q_2^{(1)}(x, 0) = -ik (\theta^{'+}(x) + \theta^{'-}(x)), \quad (12)$$

де

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{D}_1, \quad \mathbf{P}^* = 2i \operatorname{Im}(\mathbf{G} \mathbf{P}_1),$$

$$\mathbf{h}^* = \frac{\mathbf{w}_*^{(1)} k_*^{(2)}}{k_*^{(1)} + k_*^{(2)}} - \mathbf{G} \mathbf{h}_1, \quad \mathbf{p}^* = -2 \operatorname{Re} \left(\frac{\mathbf{w}_*^{(1)}}{k_*^{(1)} + k_*^{(2)}} - \mathbf{G} \mathbf{p}_1 \right), \quad \tilde{k} = \frac{k_*^{(1)} k_*^{(2)}}{k_*^{(1)} + k_*^{(2)}}.$$

Формулювання та розв'язання крайових задач. Задовольняючи граничні умови (1''') для теплового потоку за допомогою другого зі співвідношень (12), отримуємо неоднорідну задачу спряження для функції $\theta''(z)$:

$$\theta''^+(x) + \theta''^-(x) = -C_1^*, \quad C_1^* = i q_2^\infty / \tilde{k}. \quad (13')$$

Підставляючи (4) у формулу (9''), отримуємо наступний вираз для суми логарифмічних особливостей функції $\theta'(z)$:

$$\theta'_0(z) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k_*^{(k)}} \sum_{n=1}^{N_k^*} Q_n^{(k)} \ln \frac{z - \zeta_n^{*(k)}}{z - \bar{\zeta}_n^{*(k)}}. \quad (13'')$$

Знаючи поведінку (13'') невідомої функції в особливих точках, розв'язок задачі спряження (13') згідно з [1] запишемо у вигляді

$$\theta''(z) = -\frac{C_1^*}{2f(z)} \left(\frac{1}{\pi i} \int_M \frac{f^+(x)}{x-z} dx + R(z) \right) + \frac{R^*(z)}{f(z)}, \quad (14')$$

де

$$f(z) = \prod_{j=1}^J (z - b_j)^{1/2} \prod_{k=1}^N (z - c_k)^{1/2}, \quad (14'')$$

$$R^*(z) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k_*^{(k)}} \sum_{n=1}^{N_k^*} Q_n^{(k)} \left(\frac{f(\zeta_n^{*(k)})}{z - \zeta_n^{*(k)}} - \frac{f(\bar{\zeta}_n^{*(k)})}{z - \bar{\zeta}_n^{*(k)}} \right), \quad (14''')$$

$R(z) = R_0 + R_1 z + \dots + R_{(J+N)/2} z^{(J+N)/2}$; R_n – константи, які необхідно визначити з умов на нескінченності та однозначності переміщень:

$$\theta''(z) = O(1/z), \quad z \rightarrow \infty,$$

$$\int_{M_k} (\theta''^+(x) - \theta''^-(x)) dx = 0, \quad k = 1, \dots, (J+N)/2.$$

Функцію $\theta'(z)$ згідно з (14') запишемо у зручній для подальшого аналізу формі

$$\theta'(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad (15')$$

де

$$f_1(z) = -\frac{C_1^*}{2} (\tilde{z} - f_t(z)), \quad f_t(z) = \int \frac{f^\infty(z) - R(z)}{f(z)} dz,$$

$$f_2(z) = \tilde{f}_2(z) + C_2^*, \quad \tilde{z} = z + \beta_0, \quad (15'')$$

$$\tilde{f}_2(z) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k_*^{(k)}} \sum_{n=1}^{N_k^*} Q_n^{(k)} \{H_*(z, \zeta_n^{*(k)}) - H_*(z, \bar{\zeta}_n^{*(k)})\},$$

$$H_0(\zeta) = -\lim_{z \rightarrow \infty} H_*(z, \zeta), \quad (15''')$$

$$C_2^* = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k_*^{(k)}} \sum_{n=1}^{N_k^*} Q_n^{(k)} \operatorname{Im} H_0(\zeta_n^{*(k)}), \quad H_*(z, \zeta) = f(\zeta) \int \frac{dz}{f(z)(z - \zeta)}. \quad (15''')$$

Тут $f^\infty(z)$ – головна частина полюса функції $f(z)$ на нескінченності. Константа β_0 в (15'') разом з іншими константами, які знадобляться далі, визна-

чаються за формулами

$$\begin{aligned} f_t(z) &= z + \beta_0 + \beta_1/z + O(1/z^2), & z \rightarrow \infty, \\ \tilde{f}_2(z) &= -C_2^* + \tilde{\beta}_1/z + O(1/z^2), & z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (16)$$

Перейдемо тепер до визначення механічних характеристик. Щоб сформулювати крайові задачі для вектор-функції $\Phi'(z)$, помножимо перше з рівнянь (11) на вектор \mathbf{n} і будемо вимагати виконання рівності $\mathbf{n}\bar{\mathbf{G}} = -\gamma \mathbf{n}\mathbf{G}$, яку перепишемо у вигляді

$$\mathbf{n}(\bar{\mathbf{G}} + \gamma\mathbf{G}) = 0. \quad (17')$$

Ця рівність матиме місце, коли γ задовольнятиме рівняння

$$\det(\bar{\mathbf{G}} + \gamma\mathbf{G}) = 0,$$

корені якого визначаються за формулою

$$\gamma_j = (G^* - (-1)^j \sqrt{G^{*2} - \det \mathbf{G}^2}) / \det \mathbf{G}. \quad (17'')$$

Тут $G^* = \operatorname{Re}(G_{21}\bar{G}_{12}) - \operatorname{Re}(G_{11}\bar{G}_{22})$. Чисельний аналіз показав, що $\gamma_1 = 1/\gamma_2$. Для кожного γ_j встановлюємо \mathbf{n}_j за такою формулою, що випливає з (17'):

$$\mathbf{n}_j = \left[-\frac{\bar{G}_{21} + \gamma_j G_{21}}{\bar{G}_{11} + \gamma_j G_{11}}, 1 \right]^\top. \quad (17''')$$

Вводячи позначення $\mathbf{N} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$, $\mathbf{S} = \mathbf{N}\mathbf{G}$, $\mathbf{\Gamma} = \operatorname{diag}[\gamma_1, \gamma_2]$, $\mathbf{I} = \operatorname{diag}[1, 1]$ та нову вектор-функцію за формулою

$$\Phi(z) = \mathbf{S}\Phi'(z) - (\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma})^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{P}^*\mathbf{v}(z) + \mathbf{p}^*\psi_0(z)), \quad (18)$$

рівняння (11) переписуємо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}\mathbf{t}^{(1)}(x, 0) &= \Phi^+(x) + \mathbf{\Gamma}\Phi^-(x) - \tilde{\mathbf{q}}(x), \\ \mathbf{S}[\mathbf{u}'(x)] &= \Phi^+(x) - \Phi^-(x), \end{aligned} \quad (19')$$

де

$$\tilde{\mathbf{q}}(x) = -\mathbf{N}\mathbf{h}^*\theta'^+(x) + \mathbf{N}\bar{\mathbf{h}}^*\theta'^-(x). \quad (19'')$$

Використовуючи (8')–(8'''), (9')–(9''') і формулу (18), для суми особливостей вектор-функції $\Phi(z)$ знаходимо

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=1}^2 (\tilde{\mathbf{A}}^{(k)}\mathbf{f}_0^{(k)}(z) - \tilde{\mathbf{B}}^{(k)}\bar{\mathbf{f}}_0^{(k)}(z) + \tilde{\mathbf{c}}^{(k)}\theta_0^{(k)}(z) - \tilde{\mathbf{d}}^{(k)}\bar{\theta}_0^{(k)}(z)), \quad (19''')$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}^{(k)} &= \mathbf{S}\mathbf{A}^{(k)} - (\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma})^{-1}\mathbf{N}\mathbf{P}^*\mathbf{B}^{(k)}, & \tilde{\mathbf{B}}^{(k)} &= \mathbf{S}\bar{\mathbf{A}}^{(k)} - (\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma})^{-1}\mathbf{N}\mathbf{P}^*\bar{\mathbf{B}}^{(k)}, \\ \tilde{\mathbf{c}}^{(k)} &= \mathbf{S}\mathbf{w}^{(k)} - (\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma})^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{p}^*k_*^{(k)} + \mathbf{P}^*\mathbf{w}_*^{(k)}), \\ \tilde{\mathbf{d}}^{(k)} &= \mathbf{S}\bar{\mathbf{w}}^{(k)} - (\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma})^{-1}\mathbf{N}(-\mathbf{p}^*k_*^{(k)} + \mathbf{P}^*\bar{\mathbf{w}}_*^{(k)}). \end{aligned} \quad (19''''')$$

У покомпонентній формі вирази (19') запишемо так:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(1)}(x, 0) + N_{11}\sigma_{12}^{(1)}(x, 0) &= \Phi_1^+(x) + \gamma_1\Phi_1^-(x) - \tilde{q}_1(x), \\ S_{11}[u_1'(x)] + S_{12}[u_2'(x)] &= \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x). \end{aligned} \quad (20)$$

Друга компонента рівняння (19') не є незалежною, тому її не виписано. Використовуючи (20) і враховуючи, що, як показав чисельний аналіз, S_{11} і

γ_1 – дійсні константи, та задовольняючи граничні умови (1''') і (1''''), отримуємо таку крайову задачу для функції $\Phi_1(z)$:

$$\begin{aligned}\Phi_1^+(x) + \gamma\Phi_1^-(x) &= \tilde{q}_1(x) - C_0^*, & x \in \mathcal{M}, \\ \text{Im } \Phi_1^\pm(x) &= \text{Im}(\tilde{q}_1(x) - N_{11}\tau)/(1 + \gamma), & x \in L.\end{aligned}\quad (21)$$

Тут ми поклали $\gamma \equiv \gamma_1$, $C_0^* = \sigma + N_{11}\tau$.

Задачу (21) можна спростити, якщо ввести нову функцію за формулою

$$F(z) = \Phi_1(z) - c^*(\tilde{f}_2(z) + C_1^*f_t(z)/2) - C^*(\tilde{z}) + C_0^*/(1 + \gamma), \quad (22')$$

у якій

$$c^* = \frac{d_1^* - d_2^*}{1 - \gamma}, \quad C^*(\tilde{z}) = \tilde{p} \left(\frac{C_1^*}{2} \tilde{z} - C_2^* \right), \quad \tilde{p} = -2 \frac{d_2^* - \gamma d_1^*}{1 - \gamma^2}, \quad (22'')$$

$$d_1^* = - \sum_{j=1}^2 N_{1j} h_j^*, \quad d_2^* = \sum_{j=1}^2 N_{1j} \bar{h}_j^*. \quad (22''')$$

Тоді замість (21) одержуємо наступну крайову задачу:

$$\begin{aligned}F^+(x) + \gamma F^-(x) &= 0, & x \in \mathcal{M}, \\ \text{Im } F^\pm(x) &= q^*(x), & x \in L,\end{aligned}\quad (23')$$

у якій

$$q^*(x) = -\text{Im} \tilde{p} \left(\frac{C_1^*}{2} f_t(x) + \tilde{f}_2(x) \right). \quad (23'')$$

Використавши (4), (5'), (13''), (19''') і (22'), записуємо такий вираз для суми всіх особливостей функції $F(z)$:

$$\begin{aligned}F_0(z) &= \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{N_k^*} \sum_{j=1}^2 \left(\tilde{A}_{1j}^{(k)} R_{jn}'^{(k)} \ln(z - \zeta_{jn}^{(k)}) + (\tilde{c}_1 - c^*) Q_n^{*(k)} \ln(z - \zeta_n^{*(k)}) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{B}_{1j}^{(k)} \bar{R}_{jn}^{(k)} \ln(z - \bar{\zeta}_{jn}^{(k)}) - (\tilde{d}_1^{(k)} - c^*) Q_n^{*(k)} \ln(z - \bar{\zeta}_n^{*(k)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{A}_{1j}^{(k)} R_{jn}^{(k)}}{z - \zeta_{jn}^{(k)}} - \frac{\tilde{B}_{1j}^{(k)} \bar{R}_{jn}^{(k)}}{z - \bar{\zeta}_{jn}^{(k)}} \right),\end{aligned}\quad (23''')$$

де $Q_n^{*(k)} = -Q_n^{(k)}/4\pi k_*^{(k)}$.

Для поведінки функції $F(z)$ на нескінченності з (22') випливає така формула:

$$F(z) = -\frac{\tilde{p}C_1^*}{2} z + \left\{ \frac{C_0^*}{1 + \gamma} + \tilde{p} \left(C_2^* - \frac{C_1^*}{2} \beta_0 \right) \right\} + O(1/z), \quad z \rightarrow \infty. \quad (23''')$$

Таким чином, задачу зведено до визначення функції $F(z)$, аналітичної у всій площині, за винятком особливих точок, у яких поведінка функції визначається з (23''') і (23''''), та ділянок $\mathcal{M} + L$, на яких граничні значення функції повинні задовольняти рівняння (23').

Побудуємо розв'язок крайової задачі (23'). Ця задача є неоднорідною змішаною задачею Діріхле – Рімана, загальний розв'язок якої у класі визначених вище функцій можна побудувати на основі [1] та [5] у вигляді

$$F(z) = X(z) \left(\mathcal{P}(z) + iQ(z)Y(z) + \Phi(z) \right), \quad (24')$$

де

$$X(z) = \frac{e^{i\varphi(z)}}{f(z)p(z)}, \quad p(z) = \prod_{l=2}^{(I+J)/2} (z - d_l), \quad (24'')$$

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{2\pi} \int_L \frac{q_*^+(x) + q_*^-(x)}{Y^+(x)(x-z)} dx + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{q_*^+(x) - q_*^-(x)}{x-z} dx,$$

$$q_*^\pm(x) = \frac{q^*(x)}{X^\pm(x)}, \quad x \in L, \quad (24''')$$

$$\varphi(z) = -\varepsilon Z(z) \int_M \frac{dx}{Z(x)(x-z)} - iZ(z) \sum_{k=1}^{(I+J)/2} \int_{L_k} \frac{h_k(x) dx}{Z^+(x)(x-z)}, \quad \varepsilon = \frac{\ln \gamma}{2\pi}, \quad (24''')$$

$$Z(z) = \prod_{i=1}^I (z - a_i)^{1/2} \prod_{j=1}^J (z - b_j)^{1/2}, \quad Y(z) = \prod_{i=1}^I (z - a_i)^{-1/2} \prod_{j=1}^J (z - b_j)^{1/2}, \quad (24''')$$

$h_1(x) = n_1^*$; $h_l(x) = n_l^* + H(d_l - x)$; $H(x)$ – функція Гевісайда; n_l^* – цілі числа; $d_l \in L_l$ – невідомі полюси функції $X(z)$. Рівняння для визначення цих полюсів знайдемо, прирівнявши до нуля всі коефіцієнти в степеневому розкладі функції $\Phi(z)$ на нескінченності (це означає, що функція на нескінченності обмежена). Використовуючи формулу (24''') і враховуючи поведінку інтегралів типу Коші на нескінченності [1], виводимо рівняння для визначення n_l^* та d_l :

$$\varepsilon \int_M \frac{x^{l-2}}{Z(x)} dx + i \sum_{k=1}^{(I+J)/2} \int_{L_k} \frac{h_k(x)}{Z^+(x)} x^{l-2} dx = 0, \quad l = 2, \dots, (I+J)/2. \quad (25')$$

Для функцій $\mathcal{P}(z)$ і $Q(z)$, що фігурують у розв'язку (24'), мають місце такі вирази:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z) &= \mathcal{P}^*(z) + \tilde{\mathcal{P}}(z), & \tilde{\mathcal{P}}(z) &= \mathcal{P}_*(z) + \bar{\mathcal{P}}(z), \\ Q(z) &= Q^*(z) + \tilde{Q}(z), & \tilde{Q}(z) &= Q_*(z) - \bar{Q}_*(z), \end{aligned} \quad (25'')$$

у яких

$$\mathcal{P}^*(z) = C_0 + C_1 z + \dots + C_m z^m, \quad Q^*(z) = D_0 + D_1 z + \dots + D_n z^n. \quad (25''')$$

Тут $m = J + (I + N)/2 - 1$, $n = I + (N + J)/2 - 1$;

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_*(z) &= \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{N_k^*} \sum_{j=1}^2 \left(E_{knj}^{(1)} \ln(z - \zeta_{jn}^{(k)}) + E_{kn}^{(2)} \ln(z - \zeta_n^{*(k)}) + \right. \\ &\quad \left. + E_{knj}^{(3)} \ln(z - \bar{\zeta}_{jn}^{(k)}) + E_{kn}^{(4)} \ln(z - \bar{\zeta}_n^{*(k)}) + \frac{E_{knj}^{(5)}}{z - \zeta_{jn}^{(k)}} + \frac{E_{knj}^{(6)}}{z - \bar{\zeta}_{jn}^{(k)}} \right), \end{aligned} \quad (25''')$$

$$\begin{aligned} Q_*(z) &= \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{N_k^*} \sum_{j=1}^2 \left(\frac{E_{knj}^{(1)}}{Y(\zeta_{jn}^{(k)})} \ln(z - \zeta_{jn}^{(k)}) + \frac{E_{kn}^{(2)}}{Y(\zeta_n^{*(k)})} \ln(z - \zeta_n^{*(k)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_{knj}^{(3)}}{Y(\bar{\zeta}_{jn}^{(k)})} \ln(z - \bar{\zeta}_{jn}^{(k)}) + \frac{E_{kn}^{(4)}}{Y(\bar{\zeta}_n^{*(k)})} \ln(z - \bar{\zeta}_n^{*(k)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_{knj}^{(5)}}{Y(\zeta_{jn}^{(k)})(z - \zeta_{jn}^{(k)})} + \frac{E_{knj}^{(6)}}{Y(\bar{\zeta}_{jn}^{(k)})(z - \bar{\zeta}_{jn}^{(k)})} \right), \end{aligned} \quad (25''')$$

де

$$E_{knj}^{(1)} = \frac{\tilde{A}_{1j}^{(k)} R'_{jn}^{(k)}}{X(\zeta_{jn}^{(k)})}, \quad E_{kn}^{(2)} = \frac{(\tilde{c}_1^{(k)} - c^*) Q_n^{*(k)}}{X(\zeta_n^{*(k)})}, \quad E_{knj}^{(3)} = -\frac{\tilde{B}_{1j}^{(k)} \bar{R}'_{jn}^{(k)}}{X(\bar{\zeta}_{jn}^{(k)})},$$

$$E_{kn}^{(4)} = -\frac{(\tilde{d}_1^{(k)} - c^*)Q_n^{*(k)}}{X(\bar{\zeta}_n^{*(k)})}, \quad E_{knj}^{(5)} = \frac{\tilde{A}_{1j}^{(k)}R_{jn}^{(k)}}{X(\zeta_{jn}^{(k)})}, \quad E_{knj}^{(6)} = -\frac{\tilde{B}_{1j}^{(k)}\bar{R}_{jn}^{(k)}}{X(\bar{\zeta}_{jn}^{(k)})}.$$

Константи C_k , D_k у формулах (25''') визначаємо з умов на нескінченності (23''') для функції $F(z)$, умов однозначності переміщень, які згідно з другою формулою з (20) і (22') мають вигляд

$$\int_{a'_n}^{a_n} \{F^+(x) - F^-(x) + c^*(\theta'^+(x) - \theta'^-(x))\} dx = 0, \quad n = (N + I)/2, \quad (26')$$

(тут a'_n і a_n позначають ліву та праву вершини n -ї тріщини відповідно) та умов рівності нулеві функції $F(z)$ у полюсах d_l , які згідно з (24') запишемо так:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(d_l) + \xi_1 Q(d_l) + \Phi^-(d_l) &= 0, \\ \mathcal{P}'(d_l) + \xi_l Q'(d_l) + \xi_l' Q(d_l) + \Phi'^-(d_l) &= 0, \quad \xi_l = i Y^-(d_l). \end{aligned} \quad (26'')$$

Для визначення констант C_m , D_n з умов на нескінченності (23''') необхідно розкласти функцію $F(z)$ в ряд за степенями z . Використовуючи (15')–(15'''), (16), (24'')–(24'''''), отримуємо

$$\begin{aligned} Z(z) &\rightarrow z^{(I+J)/2}(1 + \zeta_1/z + \dots), \quad Y(z) \rightarrow z^{(J-I)/2}(1 + \eta_1/z + \eta_2/z^2 + \dots), \\ 1/f(z)p(z) &\rightarrow z^{-m}(1 + \nu_1/z + \nu_2/z^2 + \dots), \\ \theta'(z) &\rightarrow (C_1^* \beta_1/2 + \tilde{\beta}_1)/z + O(1/z^2), \quad \varphi(z) \rightarrow \alpha_0 + \alpha_1/z + \alpha_2/z^2 + \dots, \\ \eta_1 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^I a_i - \sum_{j=1}^J b_j \right), \quad \dots, \quad \zeta_1 = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^I a_i + \sum_{j=1}^J b_j \right), \quad \dots, \\ \nu_1 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N c_k + \sum_{j=1}^J b_j \right) + \sum_{l=2}^{(I+J)/2} d_l, \quad \dots, \\ \alpha_0 &= \mathcal{A}_{(I+J)/2}, \quad \alpha_1 = \mathcal{A}_{(I+J)/2+1} + \mathcal{A}_{(I+J)/2} \zeta_1, \\ \alpha_2 &= \mathcal{A}_{(I+J)/2+2} + \mathcal{A}_{(I+J)/2+1} \zeta_1 + \mathcal{A}_{(I+J)/2} \zeta_2, \quad \dots, \\ \mathcal{A}_k &= \varepsilon \int_M \frac{x^{k-1} dx}{Z(x)} + i \sum_{j=1}^{(I+J)/2} \int_{L_j} \frac{h_j(x)}{Z^+(x)} x^{k-1} dx = 0, \quad k = (I+J)/2, \dots, \\ X(z) &\rightarrow z^{-m} e^{i\alpha_0} (1 + \rho_1/z + \rho_2/z^2 + \dots), \\ \rho_1 &= \nu_1 + i\alpha_1, \quad \rho_2 = \nu_2 + i\alpha_2 + i\nu_1\alpha_1 - \alpha_1^2/2. \end{aligned} \quad (27)$$

Підставляючи одержані вище вирази в (24'), для $z \rightarrow \infty$ отримуємо

$$\begin{aligned} F(z) &= ze^{i\alpha_0} \{C_{m+1} + iD_{n+1} + \{C_m + i(D_n + D_{n+1}\eta_1) + (C_{m+1} + iD_{n+1})\rho_1\}/z + \\ &\quad + \{C_{m-1} + i(D_{n-1} + D_n\eta_1 + D_{n+1}\eta_2) + (C_m + i(D_n + D_{n+1}\eta_1))\rho_1 + \\ &\quad + (C_{m+1} + iD_{n+1})\rho_2\}/z^2\} + O(z^{-2}). \end{aligned} \quad (28)$$

Використовуючи умови (23''') та одну з умов (26'), виводимо рівняння для визначення шести констант:

$$\begin{aligned} C_{m+1} + iD_{n+1} &= -(\tilde{p}C_1^*/2)e^{-i\alpha_0}, \\ C_m + \rho_1(C_{m+1} + iD_{n+1}) + i(D_n + \eta_1 D_{n+1}) &= \\ &= \{C_0^*/(1 + \gamma) + \tilde{p}(C_2^* - C_1^*\beta_0/2)\} e^{-i\alpha_0}, \end{aligned}$$

$$C_{m-1} + \rho_2(C_{m+1} + iD_{n+1}) + \rho_1\{C_m + i(D_n + \eta_1 D_{n+1})\} + \\ + i(D_{n-1} + D_n \eta_1 + D_{n+1} \eta_2) = -c^*(C_1^* \beta_1 / 2 + \tilde{\beta}_1) e^{-i\alpha_0}. \quad (29)$$

Для того щоб одержаний розв'язок мав фізичний сенс, повинні виконуватися такі додаткові умови:

$$[u'_2(b_j)] = 0, \quad \sigma_{22}^{(1)}(x, 0) \leq 0, \quad x \in L, \quad [u_2(x)] \geq 0, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (30)$$

Перше з рівнянь у (30) означає, що береги тріщини змикаються плавно. Решта нерівностей вказують на те, що нормальні напруження в областях контакту є стискуючими, а береги тріщини не налягають один на другий.

Використовуючи вирази (15')–(15'''), (20) і (22'), після нескладних перетворень виводимо

$$\sigma_{22}^{(1)}(x, 0) = F^+(x) + \gamma F^-(x) + (1 + \gamma) \tilde{p} \{ \tilde{f}_2(x) + C_1^* f_t^+(x) / 2 \} - \sigma, \quad x \in L, \quad (31')$$

$$\sigma_{22}^{(1)}(x, 0) + N_{11} \sigma_{12}^{(1)}(x, 0) = (1 + \gamma) F(x) + \\ + (1 + \gamma) \tilde{p} \{ \tilde{f}_2(x) + C_1^* f_t^+(x) / 2 \} - \sigma - N_{11} \tau, \quad x \in U, \quad (31'')$$

$$S_{11} [u'_1(x)] + S_{12} [u'_2(x)] = F^+(x) - F^-(x) + \\ + 2c^* \{ \tilde{f}_2^+(x) + C_1^* f_t^+(x) / 2 \}, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (31''')$$

Підставляючи сюди (24')–(24'''), знаходимо

$$\sigma_{22}^{(1)}(x, 0) = (X^+(x) + \gamma X^-(x)) (P(x) + I_1(x)) + iY^+(x) (X^+(x) - \gamma X^-(x)) (Q(x) + \\ + I_2(x)) + (1 + \gamma) \operatorname{Re} \{ \tilde{p} (\tilde{f}_2(x) + C_1^* f_t^+(x) / 2) \} - \sigma, \quad x \in L, \quad (32')$$

$$\sigma_{22}^{(1)}(x, 0) + N_{11} \sigma_{12}^{(1)}(x, 0) = (1 + \gamma) X(x) \{ (P(x) + I_1(x)) + iY(x) (Q(x) + \\ + I_2(x)) \} + (1 + \gamma) \tilde{p} (\tilde{f}_2(x) + C_1^* f_t^+(x) / 2) - \sigma - N_{11} \tau, \quad x \in U. \quad (32'')$$

$$\operatorname{Im} S_{12} [u'_2(x)] = \frac{-2 \operatorname{ch} \pi \varepsilon}{f^*(x) p(x)} \{ (P(x) + I_1(x)) \cos \varphi^*(x) - Y(x) (Q(x) + \\ + I_2(x)) \sin \varphi^*(x) \} + 2 \operatorname{Im} \{ c^* (\tilde{f}_2^+(x) + C_1^* f_t^+(x) / 2) \}, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (32''')$$

Тут позначено

$$f^*(x) = -if^+(x), \quad x \in \mathcal{M}, \\ I_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{q_*^+(t) - q_*^-(t)}{t - x} dt, \quad I_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q_*^+(t) + q_*^-(t)}{Y^+(t)(t - x)} dt. \quad (33')$$

Використовуючи формули (14''), (24''), (24'''), (24''') та формули Сохоцького – Племелья, для граничних значень функції $X(z)$ на ділянках \mathcal{M} і L отримуємо

$$X^+(x) = -\gamma X^-(x) = \frac{\sqrt{\gamma} e^{i\varphi^*(x)}}{f^+(x) p(x)}, \quad x \in \mathcal{M}, \\ X^\pm(x) = \frac{\cos(\pi h_k(x))}{f(x) p(x)} e^{\pm i\varphi(x)}, \quad x \in L_k, \quad (33'')$$

де

$$\tilde{\varphi}(x) = -iZ^+(x) \left(\varepsilon \int_{\mathcal{M}} \frac{dt}{Z(t)(t - x)} + i \sum_{k=1}^{(I+J)/2} \int_{L_k} \frac{h_k(t)}{Z^+(t)(t - x)} dt \right), \quad x \in L, \quad (33''')$$

$$\varphi^*(x) = -Z(x) \left(\varepsilon \int_{\mathcal{M}} \frac{dt}{Z(t)(t - x)} + i \sum_{k=1}^{(I+J)/2} \int_{L_k} \frac{h_k(t)}{Z^+(t)(t - x)} dt \right), \quad x \in \mathcal{M}. \quad (33''')$$

З формул (24''') і (33'') знаходимо такі значення для підінтегральних функцій у (33'):

$$\begin{aligned} q_*^+(x) + q_*^-(x) &= 2 \cos(\pi h_k(x)) q^*(x) f(x) p(x) \operatorname{ch} \tilde{\varphi}(x), \\ q_*^+(x) - q_*^-(x) &= -2 \cos(\pi h_k(x)) q^*(x) f(x) p(x) \operatorname{sh} \tilde{\varphi}(x), \quad x \in L_k. \end{aligned} \quad (33''''')$$

Для коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) у вершинах тріщин, які визначаються за формулами

$$K_1(a_i) - iK_2(a_i) = \lim_{x \rightarrow a_i} \{ \sigma_{22}^{(1)}(x, 0) - i\sigma_{12}^{(1)}(x, 0) \} \sqrt{|a_i - x|},$$

використовуючи (32''), отримуємо

$$K_1(a_i) = -\operatorname{Re} N_{11}, \quad K_2(a_i) = -\frac{(1 + \gamma)Y_i^*}{(\operatorname{Im} N_{11})f(a_i)p(a_i)} (Q(a_i) + I_2(a_i)), \quad (34)$$

де

$$Y_i^* = \cos(\pi I^*) \prod_{n=1}^{i-1} |a_i - a_n|^{-1/2} \prod_{n=i+1}^I |a_i - a_n|^{-1/2} \prod_{j=1}^J |a_i - b_j|^{-1/2},$$

I^* – кількість повністю закритих тріщин справа від a_i .

Використовуючи перше з рівнянь (30) і рівняння (32''') та враховуючи, що $\varphi^*(b_j) = 0$ згідно з (33'''''), отримуємо систему трансцендентних рівнянь для знаходження довжин зон контакту або величин b_j :

$$P(b_j) + I_1(b_j) = 0, \quad j = 1, \dots, J. \quad (35)$$

Ця система рівнянь має безліч розв'язків, та обрати необхідно такі, що задовольняють нерівності в (30).

Частковий випадок. Для чисельного аналізу розглянемо одну тріщину з відкритою ділянкою (c, b) і правою зоною контакту (b, a). Таким чином, функції, що фігурують в розв'язку теплової задачі (15')–(15'''), мають наступний вигляд:

$$f_t(z) = f(z) = \sqrt{(z - c)(z - b)}, \quad (36')$$

$$H_*(z, \chi) = \ln \frac{\sqrt{(\chi - c)(z - b)} - \sqrt{(\chi - b)(z - c)}}{\sqrt{(\chi - c)(z - b)} + \sqrt{(\chi - b)(z - c)}}, \quad (36'')$$

$$H_0(\chi) = -\ln \frac{\sqrt{\chi - c} - \sqrt{\chi - b}}{\sqrt{\chi - c} + \sqrt{\chi - b}}. \quad (36''')$$

Вираз для $q^*(x)$ згідно з (15''), (15''') і (23'') подамо так:

$$q^*(x) = -\operatorname{Re} \tilde{p} \left(\frac{q_2^\infty}{2k} f_t(x) + \tilde{f}_2^*(x) \right), \quad (36''''')$$

де

$$\tilde{f}_2^*(x) = -i \tilde{f}_2(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k_*^{(k)}} \sum_{n=1}^{N_k^*} Q_n^{(k)} \operatorname{Im} (H_*(x, \zeta_n^{*(k)})). \quad (36''''')$$

Для функцій, що визначаються за формулами (33')–(33'''''), виводимо такі вирази:

$$\varphi^*(x) = \varepsilon \ln \left| \frac{\sqrt{b - x} - \sqrt{(1 - \lambda)(a - x)}}{\sqrt{b - x} + \sqrt{(1 - \lambda)(a - x)}} \right|, \quad x \in \mathcal{M}, \quad (37')$$

$$\tilde{\varphi}(x) = 2\varepsilon \arctan \sqrt{\frac{(1 - \lambda)(a - x)}{x - b}}, \quad x \in L, \quad (37'')$$

де $\lambda = (a - b)/\ell$, $\ell = a - c$;

$$I_1(x) = -\frac{1}{\pi} \int_b^a \frac{q^*(t)f(t) \operatorname{sh} \tilde{\varphi}(t)}{t-x} dt, \quad (37''')$$

$$I_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_b^a \frac{q^*(t)f(t) \operatorname{ch} \tilde{\varphi}(t)}{iY^+(t)(t-x)} dt. \quad (37'''')$$

Для КІН у вершині тріщини, який визначається за формулою (34), знаходимо

$$K_2(a) = -\frac{1+\gamma}{\operatorname{Im} N_{11} \sqrt{\ell}} (Q(a) + I_2(a)). \quad (38)$$

Довжина зони контакту визначається з рівняння (35) при $J = 1$.

Як відомо з розв'язку термопружної задачі для ізотропного матеріалу [10], нерівності в (30) будуть виконуватися тільки тоді, коли тепловий потік направлений в матеріал з меншим коефіцієнтом термічної дистортивності. Це є результатом того, що тріщина вважається ідеально теплоізолюваною, а зони контакту – ідеально теплопровідними. Очевидно, що аналогічні умови повинні бути і для зосереджених теплових джерел в анізотропному середовищі. Щоб їх одержати, розглянемо поведінку стискуючих напружень, що визначаються за формулою (32'), в околі точки b . З формули (36'') виводимо

$$H_*(x, \chi) = -2 \sqrt{\frac{\chi-c}{(\chi-b)(b-c)}} \sqrt{x-b} + O((x-b)^{3/2}), \quad x \rightarrow b. \quad (40')$$

Підставляючи (40') в формули (36''') і (36''''), що визначають функцію $q^*(x)$, знаходимо поведінку функції в точці b :

$$q^*(x) = -\operatorname{Re} \tilde{p} \left(Q^* + \frac{q_2^\infty}{2k} \sqrt{b-c} \right) \sqrt{x-b} + O((x-b)^{3/2}), \quad x \rightarrow b, \quad (40'')$$

тут

$$Q^* = \frac{1}{\pi \sqrt{b-c}} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k_*^{(k)}} \sum_{n=1}^{N_k^*} Q_n^{(k)} \operatorname{Im} \left(\sqrt{\frac{\zeta_n^{*(k)} - c}{\zeta_n^{*(k)} - b}} \right). \quad (40''')$$

Застосовуючи формули для поведінки інтегралів типу Коші в особливих точках [1] до (37'''), запишемо

$$I_1(x) = I_1(b) + Q_*(x-b) \ln(x-b), \quad x \rightarrow b, \quad (40''')$$

де

$$Q_* = -\frac{\operatorname{sh} \pi \varepsilon}{\pi} \sqrt{b-c} \operatorname{Re} \tilde{p} \left(Q^* + \frac{q_2^\infty}{2k} \sqrt{b-c} \right). \quad (40''''')$$

Підставляючи (40')–(40''''') у вираз для напружень (32'), що діють у зоні контакту, та враховуючи рівняння (35), яке можна записати як $P(b) + I_1(b) = \mathcal{K} \lim_{x \rightarrow b} (x-b)$, виводимо

$$\sigma_{22}^{(1)}(x, 0) = -\sigma + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\sqrt{b-c}} \{ \mathcal{K} + Q_* \ln(x-b) \} \sqrt{x-b} + O(x-b), \quad x \rightarrow b. \quad (41)$$

Оскільки напруження в зоні контакту повинні бути стискуючими, то, як випливає з (41), теплові джерела $Q_n^{(k)}$ і тепловий потік q_2^∞ повинні задовольняти умову

$$Q_* < 0, \quad (42')$$

де Q_* визначається з формул (40''') і (40'''''). Коли зосереджені джерела тепла відсутні, то умову (42') можна переписати так:

$$q_2^\infty (\delta_2 - \delta_1) > 0, \quad (42'')$$

де $\delta_2 - \delta_1 = \frac{\operatorname{Re}(d_2^* - \gamma d_1^*)}{(1 + \gamma)k}$; δ_1, δ_2 – коефіцієнти термічної дистортивності для верхнього та нижнього анізотропних тіл у загальному випадку анізотропії. Коефіцієнти d_k^* визначаються за формулами (22'''). У випадку ізотропних тіл δ_k мають такий вигляд:

$$\delta_k = \begin{cases} \frac{\alpha_k(1 + \nu_k)}{k_k} & \text{для ПДС,} \\ \frac{\alpha_k}{k_k} & \text{для ПНС.} \end{cases}$$

Тут α_k, ν_k, k_k – коефіцієнти лінійного теплового розширення, Пуассона і теплопровідності верхнього та нижнього ізотропних тіл.

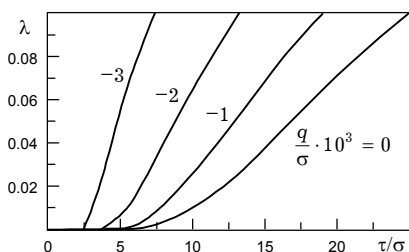


Рис. 2

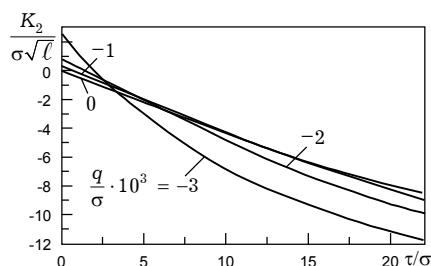


Рис. 3

Для чисельного аналізу за верхній і нижній матеріали відповідно вибрано ортотропний композит, термопружні характеристики якого наведено в [9], та склотекстоліт КАСТ-В [6]. Головні осі ортотропії збігаються з осями координат. На рис. 2 зображено залежності відносної довжини зони контакту λ від величини відносного механічного навантаження τ/σ для різних значень q/σ ($q \equiv q_2^\infty$, результати наведені в системі СИ) за відсутності зосереджених сил і джерел тепла. На рис. 3 побудовано залежності безрозмірного КІН у правій вершині тріщини $K_2/\sigma\sqrt{\ell}$ від τ/σ для трьох різних q/σ . Як видно, і λ , і абсолютна величина $K_2/\sigma\sqrt{\ell}$ зростають при збільшенні τ/σ та q/σ . Відмітимо, що для малих значень λ зі збільшенням абсолютної величини q/σ абсолютні значення КІН зменшуються для даного біматеріалу, а для великих λ – навпаки. На рис. 4 зображено залежності λ від Q/P для тріщини, що знаходиться під дією двох урівноважених зосереджених сил величини P , джерела і стоку тепла потужності Q , прикладених у верхній і нижній півплощинах у точках з координатами $(r, \pi/2)$ і $(r, 3\pi/2)$ у полярній системі координат із центром посередині тріщини. У верхній півплощині діє сила $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^{(1)}(0, P)$ і стік тепла $Q^{(1)} = -Q$, у нижній – сила $\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^{(2)}(0, -P)$ і джерело $Q^{(2)} = Q$. Для розглянутого біматеріалу для значень r , наведених на рис. 4, саме при такому розміщенні джерела і стоку виконується умова (42').

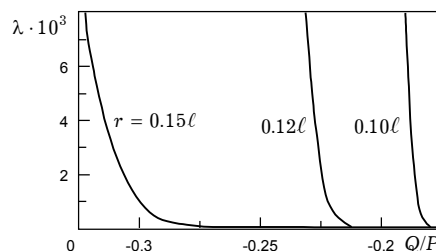


Рис. 4

Для чисельного аналізу за верхній і нижній матеріали відповідно вибрано ортотропний композит, термопружні характеристики якого наведено в [9], та склотекстоліт КАСТ-В [6]. Головні осі ортотропії збігаються з осями координат. На рис. 2 зображено залежності відносної довжини зони контакту λ від величини відносного механічного навантаження τ/σ для різних значень q/σ ($q \equiv q_2^\infty$, результати наведені в системі СИ) за відсутності зосереджених сил і джерел тепла. На рис. 3 побудовано залежності безрозмірного КІН у правій вершині тріщини $K_2/\sigma\sqrt{\ell}$ від τ/σ для трьох різних q/σ . Як видно, і λ , і абсолютна величина $K_2/\sigma\sqrt{\ell}$ зростають при збільшенні τ/σ та q/σ . Відмітимо, що для малих значень λ зі збільшенням абсолютної величини q/σ абсолютні значення КІН зменшуються для даного біматеріалу, а для великих λ – навпаки. На рис. 4 зображено залежності λ від Q/P для тріщини, що знаходиться під дією двох урівноважених зосереджених сил величини P , джерела і стоку тепла потужності Q , прикладених у верхній і нижній півплощинах у точках з координатами $(r, \pi/2)$ і $(r, 3\pi/2)$ у полярній системі координат із центром посередині тріщини. У верхній півплощині діє сила $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^{(1)}(0, P)$ і стік тепла $Q^{(1)} = -Q$, у нижній – сила $\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^{(2)}(0, -P)$ і джерело $Q^{(2)} = Q$. Для розглянутого біматеріалу для значень r , наведених на рис. 4, саме при такому розміщенні джерела і стоку виконується умова (42').

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Kim G. S., Martinyak P. M. Термопружність кусково-однорідного тіла із закритою міжфазною тріщиною при наявності контактної термоопору між її берегами // Доп. НАН України. – 1996. – № 10. – С. 84–88.
3. Лехницький С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
5. Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М. Давление системы штампов на упругую полуплоскость при общих условиях контактного сцепления и скольжения // Прикл. математика и механика. – 1988. – 52, № 2. – С. 284–293.
6. Прусов И. А. Термоупругие анизотропные пластинки. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1978. – 200 с.
7. Уздалев А. И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1967. – 168 с.
8. Харун І. В., Лобода В. В. Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил і моментів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – 45, № 2. – С. 103–113.
9. Choi H. J., Thangjitham S. Thermally-induced interlaminar crack-tip singularities in laminated anisotropic composites // Int. J. Fract. – 1993. – 60. – P. 327–347.
10. Comninou M., Dundurs J. On the Barber boundary conditions for thermoelastic contact // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1979. – 46, No. 4. – P. 849–853.
11. Herrmann K. P., Loboda V. V. Contact zone models for an interface crack in a thermomechanically loaded anisotropic bimaterial // J. Therm. Stresses. – 2001. – 24. – P. 479–506.

МЕЖФАЗНЫЕ ТРЕЩИНЫ С ЗОНАМИ КОНТАКТА В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ В ПОЛЕ УДАЛЕННОЙ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ, СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ И ТЕПЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

Рассмотрена плоская задача для бесконечной плоскости (пространства), которая состоит из двух разнородных анизотропных полуплоскостей (полупространств), на линии (в плоскости) стыка которых находятся межфазные трещины, которые допускаются полностью открытыми, закрытыми и частично закрытыми с открытыми идеально теплоизолированными ненагруженными участками и гладкими и идеально теплопроводными зонами контакта. В качестве нагрузки задаются сосредоточенные силы и тепловые источники, которые приложены в произвольных точках плоскости, а также равномерно распределенные сдвиговые и растягивающие усилия и тепловой поток, которые действуют на бесконечности. Решение задачи построено в замкнутой форме методами теории функций комплексной переменной. Получена система трансцендентных уравнений для определения длин зон контакта и выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещин. Численный анализ проведен для одной трещины с одной зоной контакта под действием двух сосредоточенных сил и тепловых источников, а также термомеханической нагрузки на бесконечности.

INTERFACE CRACKS WITH CONTACT ZONES IN ANISOTROPIC MEDIUM IN FIELD OF REMOTE THERMOMECHANICAL LOADING AND CONCENTRATED FORCES AND HEAT SOURCES

The plane problem for an infinite plane (space), which consists of two dissimilar anisotropic half-planes (half-spaces) with cracks on the interface is considered. The cracks are assumed as fully open, closed and partially closed with perfectly thermally insulated unloaded open parts and frictionless perfectly heat conducting contact zones. Concentrated forces and heat sources, which are applied at arbitrary points of plane, as well as uniformly distributed shear and tension stresses and heat flux, applied at infinity are considered as loading. The solution to the problem is obtained in a closed form by the method of complex-function theory. A set of transcendental equations for determination of the contact zone lengths and the expression for stress intensity factors at the crack tips are obtained. The numerical analysis is carried out for a single crack with one contact zone under the influence of two concentrated forces and heat fluxes and thermomechanical loading at infinity as well.

Дніпропетр. нац. ун-т, Дніпропетровськ

Одержано
24.01.03