

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ І НАПРУЖЕНЬ В НЕОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНКАХ У РІЗНИХ ПОСТАНОВКАХ

Пропонуються підходи до визначення термонапруженого стану певних класів оболонок у класичній, уточненій і просторовій постановках. У класичній постановці розглядаються задачі про деформацію оболонок обертання, нековелих циліндричних оболонок і пологих прямокутних у плані оболонок. Наведено розв'язок задачі про визначення прогинів у двошарових циліндричній та конічній оболонках і кільцевій пластині. У рамках уточненої моделі прямолінійного елемента, доповненої врахуванням температурного обчислення за товщиною, розв'язано задачу про деформацію тришарової параболічної оболонки обертання із заповнювачем. На основі співвідношень просторової теорії пружності анізотропного тіла розв'язано задачі про визначення температурних полів і напружень у шаруватих циліндричних оболонках. Запропоновано підхід до розв'язування задач про деформацію довгих порожнистих циліндрів при дії температури, яка періодично змінюється у часі.

Проблеми термомеханіки пружних оболонок зі змінними параметрами належать до числа актуальних напрямків сучасної механіки деформівного твердого тіла. З розв'язанням задач, які виникають у цій області, пов'язано ряд питань фундаментального та прикладного характеру. До них відносяться побудова моделей деформування оболонок неоднорідної структури, їх реалізація за допомогою ефективних математичних методів, розв'язання конкретних задач та аналіз одержаних результатів. Велику роль у розв'язанні вказаного кола питань відіграли дослідження Львівської школи з термомеханіки. Результати проведених досліджень, виконаних під науковим керівництвом академіка НАН України Я. С. Підстригача, знайшли відображення в численних публікаціях, у тому числі й у монографіях [17–23, 5, 13].

Відмітимо багатогранність одержаних результатів, які стосуються як визначення температурних полів, так і викликаних ними полів напружень, деформацій і переміщень. При цьому враховано такі ускладнюючі фактори: нестационарність температурних впливів, термочутливість розглядуваних об'єктів, неідеальність термомеханічного контакту, наявність включень, покриттів, тонких прошарків тощо. Значна увага приділялась застосуванню побудованих термомеханічних моделей і методів розрахунку до розв'язання прикладних задач, у тому числі й задач оптимізації.

У цій роботі на основі різних моделей розглядаються питання про визначення стаціонарного термонапруженого стану оболонок. На основі класичної моделі побудовано розв'язувальні системи рівнянь для тонкостінних оболонок, зібраних з анізотропних шарів змінної товщини [8], які записуються у вигляді

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \alpha} = \sum_{n=0}^4 \mathbf{B}_n \frac{\partial^n \mathbf{N}}{\partial \beta^n} + \mathbf{f}(\alpha, \beta),$$

$$\mathbf{N} = \{N_\alpha, \hat{S}_\alpha, \hat{Q}_\alpha, M_\alpha, u_\alpha, u_\beta, w, \vartheta_\alpha\}. \quad (1)$$

Тут α, β – лінії головних кривин на координатній поверхні $\gamma = 0$. Компонентами шуканого вектора \mathbf{N} є величини, через які формулюються граничні умови на контурі $\alpha = \text{const}$, а саме: $N_\alpha, \hat{S}_\alpha, \hat{Q}_\alpha$ – зусилля, M_α – згинний момент, u_α, u_β, w – переміщення, ϑ_α – кут повороту нормального елемента. Елементи матриць \mathbf{B}_n залежать від геометричних і механічних параметрів, а компоненти вектора \mathbf{f} – від інтегральних характеристик тем-

пературного поля, яке вважається заданим. Із системи (1) можна одержати відповідні рівняння для ряду важливих часткових випадків. Наприклад, вибираючи за α довжину s дуги меридіана координатної поверхні оболонки обертання, а за β – центральний кут θ у її поперечному перерізі, отримуємо розв’язувальну систему рівнянь для оболонок обертання. Аналогічно відповідну систему рівнянь записуємо для циліндричних оболонок довільного обрису, якщо за α прийняти довжину напрямної вихідної поверхні, а за β – довжину осі. Для пологих оболонок, прямокутних у плані, величини α , β ототожнюємо з декартовими координатами x , y на площині, а головні кривини розглядаємо як сталі величини.

У подальшому розглядатимемо оболонки, механічні та геометричні параметри яких є функціями тільки від координати α . Тоді, за певних граничних умов, подаючи шукані функції і відомі навантаження у вигляді відрізків рядів Фур’є за β , системи рівнянь типу (1) можна звести до ряду незв’язаних між собою систем звичайних диференціальних рівнянь восьмого порядку. При цьому задовольняються умови замкнутості оболонок обертання, вільного опирання контурів $\beta = \text{const}$ для неколових циліндричних і пологих оболонок. Одновимірні крайові задачі розв’язують стійким чисельним методом [8], що забезпечує високу точність результатів.

Як приклад розглянемо задачу про деформацію двошарових рівномірно нагрітих оболонок обертання з різними співвідношеннями механічних параметрів шарів. Матеріал кожного шару є ізотропним з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.3$. Внутрішній шар має модуль пружності E_1 , коефіцієнт лінійного температурного розширення α_1 , товщину h . Для зовнішнього шару ці характеристики мають значення E_2 , α_2 , H . Було розглянуто циліндричні й конічні оболонки та кільцеві пластини з однаковою довжиною твірної початкової поверхні, яка описується рівнянням $r = r_0 + as$, $s_0 \leq s \leq s_N$, де r – відстань від осі обертання, $a = \text{const}$. Задачу розв’язано для таких значень геометричних параметрів:

$$a = 1, r_0 = 10h, s_0 = 10h, s_N = 110h \text{ – для пластини};$$

$$a = \sqrt{2}/2, s_0 = 0, s_N = 100h, r_0 = 50(1 - \sqrt{2}/2)h \text{ – для конічної оболонки};$$

$$a = 0, r_0 = 50h, s_0 = 0, s_N = 100h \text{ – для циліндричної оболонки}$$

(де h – одиниця довжини, при цьому $H = h$).

Дослідження проведено для чотирьох варіантів структури:

$$1) \quad E_1 = 0.7E_0, \quad \alpha_1 = 24\alpha_0, \quad E_2 = 2E_0, \quad \alpha_2 = 12\alpha_0;$$

$$2) \quad E_1 = E_0, \quad \alpha_1 = 16\alpha_0, \quad E_2 = 2E_0, \quad \alpha_2 = 12\alpha_0;$$

$$3) \quad E_1 = 0.7E_0, \quad \alpha_1 = 24\alpha_0, \quad E_2 = E_0, \quad \alpha_2 = 16\alpha_0;$$

$$4) \quad E_1 = E_0, \quad \alpha_1 = 16\alpha_0, \quad E_2 = E_0, \quad \alpha_2 = 8\alpha_0.$$

Вказаним значенням механічних параметрів можна поставити у відповідність таку структуру за товщиною:

1) дюраль – сталь;

2) мідь – сталь;

3) дюраль – мідь;

4) мідь – титан.

У табл. 1, де $x = (s - s_0)/(s_N - s_0)$; T – температура, наведено значення прогину при шарнірному закріпленні контурів.

Таблиця 1

x	$w / 10^4 \alpha_0 T h$			
	Варіант структури			
	1	2	3	4
Пластина				
0.1	0.1784	0.1817	-0.0324	-0.2763
0.3	0.4136	0.4139	-0.0730	-0.6210
0.5	0.5046	0.4992	-0.0875	-0.7423
0.7	0.4379	0.4297	-0.0750	-0.6347
0.9	0.2726	0.1893	-0.0329	-0.2783
Конічна оболонка				
0.1	0.0995	0.0860	0.1202	0.0716
0.3	0.1346	0.1186	0.1724	0.1077
0.5	0.1561	0.1437	0.2099	0.1318
0.7	0.1937	0.1723	0.2513	0.1569
0.9	0.1363	0.1260	0.1719	0.0972
Циліндрична оболонка				
0.1	0.0929	0.0828	0.1142	0.0663
0.3	0.0989	0.0877	0.1280	0.0803
0.5	0.0977	0.0864	0.1256	0.0784
0.7	0.0989	0.0877	0.1280	0.0803
0.9	0.0929	0.0828	0.1142	0.0663

З аналізу даних табл. 1 випливає, що найбільші значення прогинів циліндричної і конічної оболонок досягаються для третього варіанту структури. Максимальні значення прогинів пластини мають місце в її центральному перерізі, причому для першого, другого та третього, четвертого варіантів структури вони відрізняються знаками. У конічній оболонці найбільші прогини досягаються поблизу граничного контуру більшого радіуса. У циліндричній оболонці прогин вздовж твірної майже не змінюється.

Для розрахунку напружено-деформованого стану анізотропних неоднорідних оболонок з низькою жорсткістю на поперечний зсув і обтиснення доцільно використовувати уточнені моделі. Однією з найбільш поширених є модель прямолінійного елемента для всього пакета оболонки в цілому [7–9]. У випадку, коли коефіцієнт лінійного температурного розширення значно перевищує аналогічні коефіцієнти в тангенціальних напрямках, а також для суттєво неоднорідних за товщиною стосовно температурних властивостей оболонок припущення про збереження довжини прямолінійного елемента може призвести до певних похибок. Тому доцільно доповнити вибрану уточнену модель урахуванням температурного обтиснення [9], що може внести значні зміни як у величини напружень і переміщень, так і в характер їх розподілу. Для нормальних переміщень i -го шару u_γ^i , $\gamma_{i-1} \leq \gamma \leq \gamma_i$ $i = 1, 2, \dots, N$, маємо

$$u_\gamma^i = u_\gamma^i(\gamma_{i-1}) + \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma} \alpha_3^i T d\gamma,$$

де γ – координата, яка відраховується по нормалі до вихідної поверхні; α_3^i – коефіцієнт лінійного температурного розширення у вказаному напрямку. Після виконання умови неперервності u_γ^i за товщиною отримаємо

$$u_\gamma^i = w + w_T^i, \quad w = u_\gamma(\gamma_0), \quad w_T^i = \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma} \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_3^j T d\gamma. \quad (2)$$

Згідно з поданням (2) маємо в загальному випадку нелінійний розподіл напружень і деформацій за товщиною оболонки. Це враховується у виразах для інтегральних характеристик температурного поля, які входять у вільні члени розв'язувальної системи рівнянь [9]. Для оболонок обертання розроблено підхід до визначення напружено-деформованого стану з урахуванням як поперечних зсувів, так і температурного обтиснення. На його основі була розв'язана задача про деформацію тришарової параболічної оболонки обертання. Рівняння твірної її серединної поверхні в декартовій системі координат z, r задавали у вигляді

$$\begin{aligned} z &= ar^2 + b, & a &= d(r_N^2 - r_0^2)^{-1}, & b &= -r_0 d(r_N^2 - r_0^2)^{-1}, \\ d &= z(r_N) - z(r_0), & r_0 &\leq r \leq r_N. \end{aligned} \quad (3)$$

Контур $r = r_0$ жорстко закріплений, а контур $r = r_N$ – вільний. Товщина зовнішніх шарів однакова і дорівнює h , а заповнювача – H . Розрахунки виконано для таких значень геометричних параметрів, віднесених до одиниці довжини l_0 : $r_0 = 10$, $r_N = 60.5$, $d = 29.4$, $H = 0.88$, $h = 0.06$. Матеріали шарів є ізотропними з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.3$. Модуль пружності несучих шарів має значення $E = 1.8 E_0$, коефіцієнт лінійного температурного розширення $\alpha_T = 0.5 \alpha_0$. Для заповнювача ці величини мають значення $E^1 = 0.8 \cdot 10^{-3} E_0$, $\alpha_T^1 = 40 \alpha_0$. Розв'язок задачі одержано для рівномірного розподілу температури за товщиною і двох варіантів її зміни вздовж твірної. У табл. 2 наведено значення нормального переміщення u_γ^\pm на зовнішній (індекс «+») і внутрішній (індекс «-») поверхнях пакета.

Таблиця 2

$\frac{r}{l_0}$	$u_\gamma^+ / 10^2 \alpha_0 T_0 l_0$	$u_\gamma^- / 10^2 \alpha_0 T_0 l_0$	$\frac{r}{l_0}$	$u_\gamma^+ / 10^2 \alpha_0 T_0 l_0$	$u_\gamma^- / 10^2 \alpha_0 T_0 l_0$
	$T = T_0 (r_N - r)(r_N - r_0)^{-1}$			$T = T_0 (r - r_0)(r_N - r_0)^{-1}$	
13.19	0.5388	0.3650	22.62	0.2272	0.0519
27.67	0.3908	0.2160	35.25	0.3768	0.2019
51.66	0.1008	-0.0750	47.87	0.5424	0.3681
60.50	0.7317	-0.1029	60.50	0.9054	0.7392

Наведені дані свідчать про значний градієнт нормального переміщення за товщиною оболонки. Залежно від характеру зміни температури вздовж твірної суттєво міняється розподіл переміщення. На вільному контурі прогини лицьових поверхонь навіть можуть відрізнятись знаками.

Розв'язання задач термопружності для оболонок із композитних матеріалів вимагає застосування ускладнених математичних моделей їх деформування. Це зумовлено суттєвою неоднорідністю і анізотропією теплофізичних характеристик і значною відносною товщиною. Сучасні методи створення композитних оболонкових елементів конструкцій дають можливість реалізувати різні типи їх структур [14]. Це відкриває можливість вибору раціональних схем армування за товщиною і тим самим ефективно враховувати специфічні властивості композитних матеріалів для керування напруженим станом оболонок. Вказане має особливе значення для дослідження впливу температурних полів на деформацію анізотропних неоднорідних тіл. Це зумовлено тим, що взаємодія вказаних факторів може викликати значні напруження, які в багатьох випадках визначають функціонування конструкційних елементів. Тому доцільним є використання співвідношень просторової задачі теорії пружності, що дозволяє обґрунтовано враховувати змінюваність за товщиною таких факторів, як кути та густина армування, залежність теплофізичних параметрів від температури, та оцінювати їх

вплив на розподіл полів напружень і переміщень. У зв'язку зі значними труднощами, що виникають при розв'язанні таких задач з доведенням до конкретних результатів, слід обмежитись їх певними класами.

У цій роботі розглядаються окремі класи задач для товстостінних шаруватих анізотропних циліндрів. Для знаходження напружень і переміщень потрібна інформація про розподіл температури в досліджуваних тілах. Це пов'язано з розв'язанням крайових задач теплопровідності з урахуванням ускладнюючих факторів. Так, у ряді випадків слід враховувати залежність теплофізичних характеристик від температури [12, 13]. Розглянемо стаціонарну задачу про визначення у порожнистому циліндрі температури T , сталої в осьовому напрямку z і змінної в радіальному r і коловому θ напрямках [3]. Тут z, r, θ – циліндричні координати. Температурне поле в такому циліндрі знаходимо з нелінійного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_N, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (4)$$

де $\lambda_{rr}, \lambda_{\theta\theta}$ – коефіцієнти теплопровідності в радіальному і коловому напрямках, які є функціями температури. Будемо розглядати випадок, коли $\lambda_{rr} = \lambda_1 \lambda(T), \lambda_{\theta\theta} = \lambda_2 \lambda(T)$, де λ_1, λ_2 – сталі величини. Граничні умови на лицьових циліндричних поверхнях у загальному випадку є також нелінійними і записуються у вигляді

$$\lambda_{rr}(T) \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha(T - T_0(\theta)), \quad r = r_0, \quad r = r_N. \quad (5)$$

Виконаємо лінеаризацію рівняння (4), використовуючи змінну Кірхгофа $\psi = \int_0^T \lambda(T) dT$. Тоді одержуємо лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (6)$$

Після відокремлення змінних розв'язок рівняння (6) отримуємо у вигляді

$$\psi = C_{10} + C_{20} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(C_{1k} \cos k\theta + C'_{1k} \sin k\theta) r^{k\sqrt{\lambda_2/\lambda_1}} + (C_{2k} \cos k\theta + C'_{2k} \sin k\theta) r^{-k\sqrt{\lambda_2/\lambda_1}} \right]. \quad (7)$$

Надалі обмежимося випадком симетричного відносно діаметра $\theta - \pi$ нагріву, що дає можливість покласти $C'_{1k} = C'_{2k} = 0$. Також приймемо лінійну залежність $\lambda(T)$ від температури [13]: $\lambda(T) = a_0 + a_1 T$. Тоді

$$T = -\frac{a_0}{a_1} + \frac{1}{a_1} \sqrt{a_0^2 + 2a_1 \psi}. \quad (8)$$

Підставивши рівність (8) у (5), одержуємо нелінійне відносно C_{1k}, C_{2k} рівняння з функціональними коефіцієнтами, яке після лінеаризації за допомогою методу Ньютона [1] в n -му наближенні запишемо таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial r} - \frac{\alpha}{\sqrt{a_0^2 + 2a_1 \psi_n}} \psi_{n+1} = \\ = \alpha \left[-\frac{a_0}{a_1} \sqrt{a_0^2 + 2a_1 \psi_n} - T_0(\theta) \right] \quad \text{при} \quad r = r_0, \quad r = r_N. \end{aligned} \quad (9)$$

Після відокремлення у рівнянні (9) змінної θ з урахуванням зображення

(7) одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь, порядок якої визначається числом утримуваних членів у рядах Фур'є. Розв'язуючи одержану систему алгебричних рівнянь, визначаємо в кожному наближенні сталі C_{1k}, C_{2k} , а за ними згідно з (7) – вираз для температури.

Напружений стан термочутливого циліндра визначаємо з системи рівнянь з частинними похідними [3]

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial r} = \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{B}_1 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \theta} + \mathbf{B}_2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\sigma}}{\partial \theta^2} + \mathbf{f},$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_r, \tau_{r\theta}, u_r, u_\theta\}, \quad \mathbf{B}_p = \|b_{ij}^{(p)}(r, \theta)\|,$$

$$r_0 \leq r \leq r_N, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (10)$$

У співвідношеннях (10) $\sigma_r, \tau_{r\theta}$ – напруження, u_r, u_θ – переміщення.

Елементи матриць \mathbf{B}_p з огляду на те, що термомеханічні параметри залежать від температури, яка є функцією від r, θ , теж є функціями двох змінних. Компоненти вектора \mathbf{f} визначаються як законом розподілу температури, так і термомеханічними параметрами. Розв'язок системи рівнянь (10) шукаємо у вигляді відрізків рядів Фур'є за коловою координатою θ :

$$\{\sigma_r(r, \theta), u_r(r, \theta)\} = \sum_{k=0}^N \{\sigma_{rk}(r), u_{rk}(r)\} \cos k\theta,$$

$$\{\tau_{r\theta}(r, \theta), u_\theta(r, \theta)\} = \sum_{k=1}^N \{\tau_{r\theta k}(r), u_{\theta k}(r)\} \sin k\theta. \quad (11)$$

Записуючи в аналогічному вигляді також і вільні члени системи (10), після відокремлення змінної θ одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь порядку $4N + 2$, яку розв'язуємо стійким чисельним методом.

Також були розв'язані задачі про термонапружений стан довільно неоднорідних у радіальному напрямку порожнистих циліндрів з перпендикулярною до осі однією площиною пружної симетрії [2]. За основні шукані функції, крім $\sigma_r, \tau_{r\theta}, u_r, u_\theta$, прийнято також температуру T і тепловий

потік у радіальному напрямку $\lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r}$. Побудовано розв'язувальні системи звичайних диференціальних рівнянь шостого порядку для осесиметричної складової і дванадцятого порядку – для пропорційних $\cos k\theta$ і $\sin k\theta$ несесиметричних складових температурного поля. Розв'язано ряд конкретних задач, у яких проаналізовано розподіл температури, напружень і переміщень залежно від характеру неоднорідності теплофізичних параметрів і несиметрії температурних впливів.

Запропоновано та реалізовано підхід до розв'язування задач про напружений стан термочутливих композитних циліндрів з однією площиною пружної симетрії [4]. Розв'язання задач виконано за допущення, що коефіцієнти теплопровідності не залежать від температури, а модулі пружності, коефіцієнти Пуассона та лінійного температурного розширення складових композита в загальному випадку апроксимуються кубічними поліномами від температури. Проаналізовано напружено-деформований стан циліндра, густина армування якого змінюється за товщиною. Також розв'язано задачу для порожнистого циліндра, неоднорідність якого зумовлена зміною кута армування у радіальному напрямку.

Розв'язування задач про деформування анізотропних неоднорідних циліндрів при дії нестационарних температурних полів пов'язано зі значними труднощами, які виникають при виконанні як початкових, так і граничних умов. Тому доцільно розглянути такі етапи поширення тепла, коли вплив

початкових умов є незначним, що зумовлено достатньою віддаленістю їх від початкового моменту часу. До таких задач теплопровідності без початкових умов належать і задачі про визначення температурних полів при асимптотичному тепловому режимі [12, 17, 21]. У роботі [11] досліджено вплив термочутливості теплофізичних характеристик на напружений стан шаруватих циліндрів при граничних умовах, які відповідають асимптотичному осесиметричному тепловому режиму. До таких задач також належать задачі про визначення напружень у тілах, викликаних дією змінної в часі за гармонічним законом температури [17, 24].

Розглянемо задачу про осесиметричний термонапружений стан анізотропних неоднорідних у радіальному напрямку порожнистих циліндрів при дії періодично змінюваних у часі температурних полів. Матеріал кожного шару має одну площину пружної симетрії, яка є перпендикулярною до осі циліндра. Циліндри мають таку довжину, яка дозволяє розглядати цей клас задач у рамках плоскої деформації. Співвідношення узагальненого закону Гука для кожного шару записуються у вигляді [10]

$$\begin{aligned} e_z &= a_{11}\sigma_z + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_r + a_{14}\tau_{r\theta} + \alpha_{11}T, \\ e_\theta &= a_{12}\sigma_z + a_{22}\sigma_\theta + a_{23}\sigma_r + a_{24}\tau_{r\theta} + \alpha_{22}T, \\ e_r &= a_{13}\sigma_z + a_{23}\sigma_\theta + a_{33}\sigma_r + a_{34}\tau_{r\theta} + \alpha_{33}T, \\ e_{r\theta} &= a_{14}\sigma_z + a_{24}\sigma_\theta + a_{34}\sigma_r + a_{44}\tau_{r\theta} + \alpha_{23}T, \end{aligned} \quad (12)$$

де $e_z, e_\theta, e_r, e_{r\theta}$ – деформації; $\sigma_z, \sigma_\theta, \sigma_r, \tau_{r\theta}$ – напруження; $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{44}$ – пружні характеристики; $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$ – коефіцієнти лінійного температурного розширення; α_{23} – коефіцієнт температурного зсуву.

Температуру визначаємо з рівняння теплопровідності

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q, \quad r_0 \leq r \leq r_N, \quad (13)$$

де τ – часова координата; ρ – густина матеріалу шару; c – його питома теплоємність; q – об'ємна густина теплового потоку. Теплофізичні параметри кожного шару є функціями від радіальної координати.

За основні невідомі вибираємо величини, через які формулюються умови ідеального термомеханічного контакту суміжних шарів: $\sigma_r, \tau_{r\theta}, u_r, u_\theta,$

$T, \psi = \lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r}$. Тоді, приймаючи за вихідні співвідношення просторової задачі теорії пружності в циліндричних координатах і рівняння теплопровідності (13), будемо систему рівнянь з частинними похідними

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta} - 1 \right) \sigma_r + \frac{\Delta_4}{r\Delta} \tau_{r\theta} + \frac{a_{11}}{r^2 \Delta} u_r + \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial \tau^2} + \frac{1}{r\Delta} (\alpha_{11} a_{12} - \alpha_{22} a_{11}) T, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{2}{r} + \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \delta_1 \sigma_r + \delta_2 \tau_{r\theta} - \frac{\Delta_2}{r\Delta} u_r + \left(\alpha_{33} + \frac{\Delta_1 \alpha_{11} + \Delta_2 \alpha_{22}}{\Delta} \right) T, \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} &= \delta_3 \sigma_r + \delta_4 \tau_{r\theta} - \frac{\Delta_4}{r\Delta} u_r + \left(\alpha_{23} + \frac{\Delta_3 \alpha_{11} + \Delta_4 \alpha_{22}}{\Delta} \right) T, \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{1}{\lambda_{rr}} \psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \psi + \rho n \frac{\partial T}{\partial \tau} - q. \end{aligned} \quad (14)$$

У цих рівняннях позначено

$$\begin{aligned}\Delta &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2, & \Delta_1 &= a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}, & \Delta_2 &= a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}, \\ \Delta_3 &= a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22}, & \Delta_4 &= a_{12}a_{14} - a_{11}a_{24}, \\ \delta_1 &= a_{33} + \Delta^{-1}(a_{13}\Delta_1 + a_{23}\Delta_2), & \delta_2 &= a_{34} + \Delta^{-1}(a_{13}\Delta_3 + a_{23}\Delta_4), \\ \delta_3 &= a_{34} + \Delta^{-1}(a_{14}\Delta_1 + a_{24}\Delta_2), & \delta_4 &= a_{44} + \Delta^{-1}(a_{14}\Delta_3 + a_{24}\Delta_4).\end{aligned}$$

Враховуючи періодичний характер зміни температури в часі, відокремимо змінні в рівняннях (14). Для цього подамо шукані функції у вигляді

$$\begin{aligned}\{\sigma_r, \tau_{r\theta}, u_r, u_\theta, T, \psi\} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \cos \omega t + \\ &+ \{x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\} \sin \omega t.\end{aligned}\quad (15)$$

В аналогічному вигляді запишемо густину теплового потоку:

$$q = q_1(r) \cos \omega t + q_2(r) \sin \omega t.$$

Тоді для кожного шару маємо систему звичайних диференціальних рівнянь дванадцятого порядку

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dr} &= \mathbf{A}(r, \omega)\mathbf{x} + \mathbf{f}, & \mathbf{x} &= \{x_1, x_2, \dots, x_6, x_7, x_8, \dots, x_{12}\}, \\ \mathbf{f} &= \mathbf{f}(q_1, q_2), & r_{i-1} &\leq r \leq r_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.\end{aligned}\quad (16)$$

Елементи матриці \mathbf{A} визначаємо через механічні та теплофізичні параметри шарів. Запропонований вибір шуканих функцій дає можливість найбільш просто задовольнити умови ідеального термомеханічного спряження шарів. У точках $r = r_0$, $r = r_N$ необхідно виконати по шість граничних умов, які відображають характер навантаження і теплообміну на лицьових поверхнях. Крайові задачі для системи рівнянь (16) розв'язуємо стійким чисельним методом. Для часткового випадку $\omega = 0$ маємо задачу для циліндра, температура якого не змінюється в часі.

Розглянуто конкретну задачу про дію температурного поля на порожнистий одношаровий циліндр з композитного матеріалу. На внутрішній поверхні $r = r_0$ підтримується температура $T = T_0 + T_1 \cos \omega t$, а на зовнішній поверхні $r = r_N$ відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем

$$\lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} = -\beta(T - T_c).$$

Тут β – коефіцієнт теплообміну, T_c – стала в часі температура навколишнього середовища. Значення термофізичних характеристик циліндра визначали на основі співвідношень механіки композитних матеріалів [14, 16, 25]. Для розрахунків вибрано такі параметри складових композиту, що відповідають вуглепоксидному матеріалу: $E_a = 4 \cdot 10^{11}$ Мпа; $E_m = 4 \cdot 10^9$ Мпа; $\nu_a = 0.21$; $\nu_m = 0.38$; $\alpha_a = 4.8 \cdot 10^{-6} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$; $\alpha_m = 80 \cdot 10^{-6} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$, $\lambda_a = 20$ Вт/(м \cdot °С), $\lambda_m = 0.2$ Вт/(м \cdot °С), $\rho = 1.4 \cdot 10^3$ кг/м 3 , $n = 3.1 \cdot 10^3$ м 2 /(с $^2 \cdot$ °С). Коефіцієнт теплообміну дорівнює $\beta = 800$ Вт/(м $^2 \cdot$ °С), внутрішні джерела тепла відсутні. Густина армування дорівнює $\mu = 0.5$. Кут армування змінюється за товщиною за законом [14] $\cos 2\varphi = \frac{d}{r}$, $d = \text{const}$. У зв'язку з цим співвідношення узагальненого закону Гука записуються у такому ж вигляді, як і для тіла з однією площиною пружної симетрії. Обчислення виконано для $r_0 = 0.08$ м, $r_N = 0.10$ м, $d = 0.075$ м, $T_0 = 200$ °С, $T_1 = 50$ °С, $T_c = 20$ °С, $\omega = \frac{\pi}{300}$ с $^{-1}$. Лицьова поверхня $r = r_N$ вільна від навантажень, а при $r = r_0$

колові переміщення відсутні. Результати розв'язання задачі наведено у табл. 3 і на рис. 1–3.

У табл. 3 наведено значення температури на лицьовій $r = r_0$ і серединній $r = (r_0 + r_N)/2$ поверхнях в окремі моменти часу. На зовнішній поверхні температура $T(r_N) \approx 25^\circ\text{C}$ є близькою до температури оточуючого середовища, що можна пояснити прийнятим значенням коефіцієнта теплообміну.

Таблиця 3

r	T, °C			
	4ωπ ⁻¹ t, с			
	0	1	2	3
(r ₀ + r _N)/2	103.21	107.98	111.59	113.56
r _N	250.00	235.36	200.00	164.64
	4	5	6	7
(r ₀ + r _N)/2	102.79	104.02	100.41	100.08
r _N	150.00	164.64	200.00	235.36

З наведених у табл. 3 даних випливає, що при $(r_0 + r_N)/2 \leq r \leq r_N$ температура майже не змінюється в часі.

На рис. 1 наведено розподіл за товщиною амплітудних значень $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_1^1$ колових напружень $\sigma_\theta(r, \tau) = \sigma_0(r) + \sigma_1(r) \cos \omega\tau + \sigma_1^1(r) \sin \omega\tau$. Врахування періодичності температури в часі може призвести до зміни значень напружень на 25%. Відмітимо немонотонність зміни величин σ_1, σ_1^1 за товщиною оболонки.

На рис. 2 показано зміну за товщиною радіальних, $m = 3$, і колових переміщень, $m = 4$ (див. формулу (15)), для випадку, коли температура не залежить від часу, $T = T_0$.

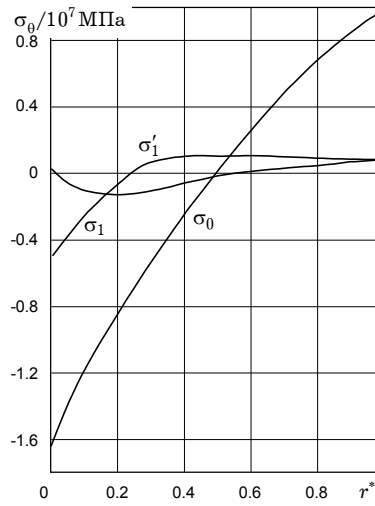


Рис. 1

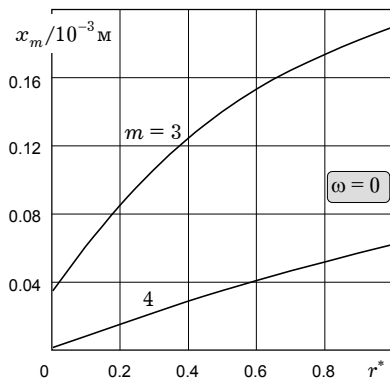


Рис. 2

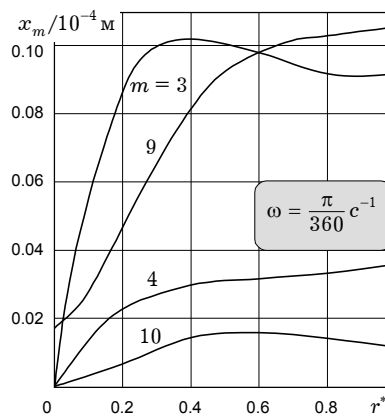


Рис. 3

На рис. 3 наведено розподіл переміщень, коли температура змінюється в часі. Значення колових переміщень, відсутніх в ортотропних оболонках, головні напрямки пружності яких співпадають з координатними, можуть становити близько 30% від величини радіальних. Переміщення для температури, яка змінюється у часі за законами $\cos \omega t$ і $\sin \omega t$, розподіляються по товщині за складними умовами. Слід також відмітити значний градієнт радіальних переміщень по товщині оболонки для прийнятих геометричних і теплофізичних параметрів, що не враховується рядом наближених моделей.

1. Бахвалов Н. С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 631 с.
2. Василенко А. Т. Несимметричные температурные поля и напряжения в цилиндрах из неоднородных композитов // Механика композитных материалов. – 1995. – 31, № 4. – С. 494–500.
3. Василенко А. Т., Григоренко Я. М., Микитюк Ю. І. Термонапружений стан неоднорідного циліндра при неосесиметричному нагріві // Доп. НАН України. – 1997. – № 5. – С. 58–62.
4. Василенко А. Т., Судаццова Г. К. Напряженное состояние термочувствительных толстостенных цилиндров из анизотропных композитов // Механика композитных материалов. – 1999. – 35, № 3. – С. 367–374.
5. Вигак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
6. Григорович Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 364 с.
7. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. – М.: Наука, 1992. – 336 с.
8. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – Методы расчета оболочек: В 5 т. – Т. 4.
9. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Голуб Г. П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1987. – 216 с.
10. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 216 с.
11. Калиняк Б. Вплив температурної залежності теплофізичних характеристик на термонапружений стан неоднорідних циліндричних тіл // Мат. проблеми механіки неоднорідних структур: В 2 т. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики НАН України, 2000. – Т. 1. – С. 232–235.
12. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
13. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
14. Композиционные материалы: Справочник / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
15. Корнев Б. Г. Задачи теории теплопроводности и термоупругости. – М.: Наука, 1980. – 400 с.
16. Кристинсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
17. Підстригач Я. С. Вибрані праці. – К.: Наук. думка, 1995. – 460 с.
18. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в тонких оболонках. – К.: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.
19. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
20. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 310 с.
21. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Семерак М. М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. – Киев: Наук. думка, 1981. – 342 с.
22. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
23. Подстригач Я. С., Швеиц Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 343 с.
24. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
25. Шленский О. Ф. Тепловые свойства стеклопластиков. – М.: Химия, 1973. – 221 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧКАХ В РАЗЛИЧНЫХ ПОСТАНОВКАХ

Предлагаются подходы к определению термонапряженного состояния определенных классов оболочек в классической, уточненной и пространственной постановках. В классической постановке рассматриваются задачи о деформации оболочек вращения, некруговых цилиндрических оболочек и пологих прямоугольных в плане оболочек. Приведено решение задач об определении прогибов в двухслойных цилиндрической и конической оболочках и кольцевой пластине. В рамках уточненной модели прямолинейного элемента, дополненной учетом температурного обжатия по толщине, решена задача о деформации трехслойной параболической оболочки вращения с заполнителем. На основании соотношений пространственной теории упругости анизотропного неоднородного тела решены задачи об определении температурных полей и напряжений в слоистых цилиндрических оболочках. Предложен подход к решению задач о деформации длинных полых цилиндров при действии температуры, периодически изменяющейся во времени.

DETERMINATION OF TEMPERATURE FIELDS AND STRESSES IN INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC SHELLS IN DIFFERENT STATEMENTS

The approaches for determination of thermo-stressed state of certain classes of shells in classical, refined and spatial statements is proposed. In a classical statement we consider the problems on deformation of shells of revolution, non-circular cylindrical shells and shallow rectangular shells. We propose the solution to problem on determination of deflections in the two-layered cylindrical and conic shells and ring plate. Within the scope of refined model of rectilinear element with regard for the temperature reduction across the thickness we solve the problem on deformation of a three-layered parabolic shell of revolution with filler. On the basis of relations of the 3D elasticity theory for an anisotropic inhomogeneous body the problems on determination of temperature fields and stresses in layered cylindrical shells were solved. The approach to solving the problems on deformation of long hollow cylinders under the action of temperature, which changed periodically in time, is proposed.

Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
04.02.01