УДК 539.3

В. С. Попович, Ю. В. Токовий

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТЕРМОЧУТЛИВОЇ СМУГИ

Побудовано розв'язок плоскої задачі термопружності для термочутливої смуги. При цьому розвинуто методику аналітико-числового розв'язування нелінійної задачі теплопровідності для вказаної області. Відповідну задачу термопружності зведено до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду, яке розв'язано методом послідовних наближень.

Вступ. Визначення і дослідження компонентів термопружного стану елементів конструкцій, які піддаються одночасній дії високих температур і значних силових навантажень є актуальною проблемою. Вони можуть бути виконані лише на основі математичних моделей, що враховують залежність характеристик матеріалу від температури [8, 9]. У цьому випадку математична модель поширення тепла є нелінійною задачею теплопровідності [8, 15], а відповідна задача термопружності – крайовою задачею для диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами [9]. Для побудови їх розв'язків використовують переважно числові методи [8]. У той же час незаперечну цінність мають аналітичні чи аналітико-числові розв'язки таких задач [15], оскільки є зручними для якісного аналізу й можуть слугувати як критерії оцінки достовірності числових розв'язків.

Постановка задачі. Розглянемо віднесену до декартової системи координат X, Y смугу, виготовлену з ізотропного термочутливого матеріалу (теплофізичні й пружні характеристики змінюються зі зміною температури). Шляхом нормування розмірних змінних за деяким характерним розміром l_0, перейдемо до безрозмірних змінних $x = X/l_0$, $y = Y/l_0$. Нехай смуга $D = \{(x,y) \in \in (-\infty,\infty) \times [0,2b]\}$ має задану початкову температуру t_n і, починаючи з часу $\tau = 0$ через межі $y = 0, 2b$ конвективно обмінюється теплом із оточуючими середовищами сталих температур t_{c1} і t_{c2} відповідно. За таких умов розподіл температури в області D залежить лише від часу τ та координати y і визначається з нелінійної задачі теплопровідності, яка описується рівнянням

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{t0}\lambda_t^*(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) = l_0^2 C_{V0} C_V^*(T)\frac{\partial T}{\partial \tau}, \tag{1}$$

умовами теплообміну за законом Ньютона

$$\lambda_{t0}\lambda_t^*(T)\frac{\partial T}{\partial y} + (-1)^i \alpha_i l_0 \left(T - T_{ci}\right) = 0, \quad i = \left\{ \begin{array}{l} 1,\, y = 0, \\ 2,\, y = 2b, \end{array} \right. \tag{2}$$

та початковою умовою

$$T|_{\tau=0} = T_n, \tag{3}$$

де $\{T_{ci}, T_n, T\} = \{t_{ci}, t_n, t\}/t_0$, $i = 1,2$; t – температурне поле; t_0 – вибране нами деяке відлікове значення температури; α_1 і α_2 – відповідно коефіцієнти теплообміну на сторонах $y = 0$, $y = 2b$. Коефіцієнти теплопровідності $\lambda_t(t)$ та об'ємна теплоємність $C_V(t)$ – задані функції температури, подані у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$, де величини з нижнім індексом «0» є розмірними, а з верхнім символом «*» – безрозмірні функції від безрозмірної температури, причому $\chi^*(T_n) = 1$, тобто χ_0 – значення відповідної характеристики матеріалу за початкової температури T_n.

 ISSN 0130-9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2004. – 47, № 4. – С. 172-179.

Вважаємо, що смуга D знаходиться у пружній рівновазі. Тому розподіл у ній напружень, спричинених температурним полем $T = T(y,\tau)$, яке є розв'язком задачі (1)–(3), та зовнішніми зусиллями

$$\sigma_y\big|_{y=0} = -p_1(x), \quad \sigma_y\big|_{y=2b} = -p_2(x), \quad \sigma_{xy}\big|_{y=0} = q_1(x), \quad \sigma_{xy}\big|_{y=2b} = q_2(x), \qquad (4)$$

визначатимемо з плоскої квазістатичної задачі термопружності, яка описується [1, 11] рівняннями рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \qquad (x,y) \in D, \qquad (5)$$

рівнянням суцільності в деформаціях

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad (6)$$

та фізичними співвідношеннями

$$Ee_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) + \alpha ET, \qquad Ee_y = \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) + \alpha ET,$$

$$Ee = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha ET, \qquad Ge_{xy} = \sigma_{xy}. \qquad (7)$$

Тут σ_j, σ_{xy}, $j = x, y, z,$ – компоненти тензора напружень; $E(T)$, $G(T)$, $\nu(T)$, $\alpha(T)$ – відповідно залежні від температури модуль пружності та зсуву й коефіцієнти Пуассона та лінійного температурного видовження, подані у такій же формі, що й теплофізичні характеристики, тобто $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$. Вважаємо, що зовнішні зусилля (4) задовольняють загальні статичні умови рівноваги та умови $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \{p_i, q_i\} = 0$, $i = 1, 2$. Задачу термопружності (4)–(7) вважаємо квазістатичною [11], тобто залежність напружень від часу приймаємо за параметричну, що дозволяє знехтувати інерційними складовими в рівняннях руху й записувати їх у вигляді (5).

Розв'язання задачі теплопровідності. Увівши критерії Біо $\mathrm{Bi}_i = \alpha_i l_0 / \lambda_{t0}$, число Фур'є $\mathrm{Fo} = a_0 \tau / l_0^2$ ($a_0 = \lambda_{t0}/C_{V0}$) та змінну Кірхгофа у вигляді

$$\Theta = \int\limits_{T_n}^{T} \lambda_t^*(\gamma) d\gamma, \qquad (8)$$

зведемо задачу (1)–(3) до наступної задачі для змінної Θ:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = \frac{1}{a^*(\Theta)} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{Fo}}, \qquad (9)$$

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - \mathrm{Bi}_1 \left(T(\Theta) - T_{c1} \right) \right)\bigg|_{y=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mathrm{Bi}_2 \left(T(\Theta) - T_{c2} \right) \right)\bigg|_{y=2b} = 0, \quad (10)$$

$$\Theta\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \qquad (11)$$

де $a^* = \lambda_t^* / C_V^*$; $T(\Theta)$ – залежність температури від Θ, визначена з інтегрального рівняння (8) для конкретного $\lambda_t^*(T)$.

У припущенні, що $\lambda_t^*(T) \approx C_V^*(T)$ ($a^* \approx 1$), рівняння (9) є лінійним

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{Fo}}. \qquad (12)$$

Шляхом заміни [13, 14]

$$T(\Theta)\big|_{y=0} = (1 + \kappa_1)\, \Theta\big|_{y=0} + T_n, \qquad T(\Theta)\big|_{y=2b} = (1 + \kappa_2)\, \Theta\big|_{y=2b} + T_n,$$

де $\kappa_i,\ i=1,2,$ – невідомі поки-що параметри, здійснимо лінеаризацію умов (10), звівши їх до вигляду

$$\left.\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}-\mathrm{Bi}_1^*\left(\Theta-T_{c1}^*\right)\right)\right|_{y=0}=0,\qquad \left.\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\mathrm{Bi}_2^*\left(\Theta-T_{c2}^*\right)\right)\right|_{y=2b}=0, \tag{13}$$

де $\mathrm{Bi}_i^*=(1+\kappa_i)\,\mathrm{Bi}_i\,,\ T_{ci}^*=(T_{ci}-T_n)/(1+\kappa_i)\,,\ i=1,2\,.$

Для розв'язання задачі (11)–(13) використаємо інтегральне перетворення Лапласа [7, 10] за часовою змінною. Розв'язавши задачу в просторі зображень і повернувшись до оригіналу з використанням теореми про розклад мероморфної функції в околі ізольованого полюса, знайдемо змінну Кірхгофа у вигляді

$$\Theta=\frac{\mathrm{Bi}_1\bar{T}_{c1}\left(1+\mathrm{Bi}_2^*(2b-y)\right)+\mathrm{Bi}_2\bar{T}_{c2}\left(1+\mathrm{Bi}_1^*y\right)}{\mathrm{Bi}_1^*+\mathrm{Bi}_2^*+2b\mathrm{Bi}_1^*\mathrm{Bi}_2^*}-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b\mathrm{Bi}_1\bar{T}_{c1}\left(\cos\mu_n\frac{2b-y}{2b}+\frac{2\mathrm{Bi}_2^*b}{\mu_n}\sin\mu_n\frac{2b-y}{2b}\right)\exp\left(-\frac{\mu_n^2}{4b^2}\mathrm{Fo}\right)}{\mu_n^2\left(\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}+\frac{\mu_n^2-4\mathrm{Bi}_1^*\mathrm{Bi}_2^*b^2}{2\mu_n}\left(\cos\mu_n-\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}\right)\right)+\left(\mathrm{Bi}_1^*+\mathrm{Bi}_2^*\right)\frac{b\sin\mu_n}{\mu_n}}-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b\mathrm{Bi}_2\bar{T}_{c2}\left(\cos\mu_n\frac{y}{2b}+\frac{2\mathrm{Bi}_1^*b}{\mu_n}\sin\mu_n\frac{y}{2b}\right)\exp\left(-\frac{\mu_n^2}{4b^2}\mathrm{Fo}\right)}{\mu_n^2\left(\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}+\frac{\mu_n^2-4\mathrm{Bi}_1^*\mathrm{Bi}_2^*b^2}{2\mu_n}\left(\cos\mu_n-\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}\right)\right)+\left(\mathrm{Bi}_1^*+\mathrm{Bi}_2^*\right)\frac{b\sin\mu_n}{\mu_n}}, \tag{14}$$

де $\bar{T}_{ci}=T_{ci}-T_n\,,\ i=1,2\,,\ \mu$ – корені характеристичного рівняння

$$\mathrm{ctg}\mu=\frac{\mu^2-4b^2\mathrm{Bi}_1^*\mathrm{Bi}_2^*}{2\mathrm{b}(\mathrm{Bi}_1^*+\mathrm{Bi}_2^*)\mu}.$$

Якщо сторона $y=0$ є теплоізольованою, тобто $\mathrm{Bi}_1=0$, то

$$\Theta=T_{c2}^*-2b\mathrm{Bi}_2\bar{T}_{c2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\mu_n\frac{y}{2b}\exp\left(-\frac{\mu_n^2}{4b^2}\mathrm{Fo}\right)}{\mu_n^2\left(\left(1+b\mathrm{Bi}_2^*-\frac{\mu_n}{2}\right)\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}+\frac{\mu_n\cos\mu_n}{2}\right)},$$

де μ – корені характеристичного рівняння

$$\mathrm{ctg}\mu=\frac{\mu}{2\mathrm{b}\mathrm{Bi}_2^*}.$$

Якщо, наприклад, $\lambda_t^*(t)=1+k_\lambda(T-T_n)$, то $\Theta=(T-T_n)+k_\lambda\,(T-T_n)^2/2$, звідки отримуємо формулу для обчислення температури

$$T=\frac{\sqrt{1+2k_\lambda\Theta}-1}{k_\lambda}+T_n. \tag{15}$$

Вираз змінної Кірхгофа (14), крім вхідних даних задачі теплопровідності, містить два вільних параметри $\kappa_i,\ i=1,2$, які використаємо для задоволення з заданою точністю нелінійних граничних умов (10). Враховуючи виконання умов (10) і вираз для температури (15), для знаходження параметрів κ_i отримуємо систему рівнянь

$$\left.\left(k_\lambda\left(1+\kappa_i\right)^2\Theta^2+2\kappa_i\Theta\right)\right|_{\substack{y=0,\ i=1\\ y=2b,\, i=2}}=0. \tag{16}$$

Розв'язок задачі термопружності. Визначимо напруження у смузі D, викликані знайденим температурним полем і прикладеними зовнішніми зусиллями (4). Для цього зведемо задачу (4)–(7), використовуючи метод безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги й суцільності в напруженнях [4, 6], до двох ключових рівнянь на так звані визначальні напруження, за які виберемо σ_y й сумарні напруження $\sigma=\sigma_x+\sigma_y$. Щоб отримати перше ключове рівняння, з використанням співвідношень (7) подамо рівняння суцільності (6) у напруженнях:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1-\nu}{2G}\sigma+\alpha(1+\nu)T\right)+\frac{1-\nu}{2G}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}=\frac{\sigma_y}{2}\frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{1}{G}\right), \tag{17}$$

беручи до уваги, що температурне поле, а отже, й залежні від нього пружні характеристики матеріалу, залежать лише від змінної y. Додавши $\partial^2\sigma_y/\partial x^2$ до обох частин співвідношення $\partial^2\sigma_x/\partial x^2=\partial^2\sigma_y/\partial y^2$, яке знайдено з рівнянь (5) шляхом вилучення дотичних напружень, отримаємо друге ключове рівняння

$$\Delta\sigma_y=\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}. \tag{18}$$

Для відшукання визначальних напружень слід доповнити рівняння (17), (18) двома крайовими умовами (4) для σ_y. Ще дві умови для похідних від цих напружень

$$\left.\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right|_{y=0}=-\frac{dq_1}{dx},\qquad \left.\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right|_{y=2b}=-\frac{dq_2}{dx} \tag{19}$$

отримуємо з рівнянь рівноваги (5) при $y=0,\,2b$ з урахуванням крайових умов (4) для дотичних напружень.

Для знаходження визначальних напружень застосуємо до рівнянь (17), (18) та умов (4), (19) інтегральне перетворення Фур'є [2] за координатою x. Тоді у просторі зображень одержимо систему рівнянь

$$\frac{d^2\bar\sigma_y}{dy^2}-s^2\bar\sigma_y=-s^2\bar\sigma,$$

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{1-\nu}{2G}\bar\sigma\right)-s^2\frac{1-\nu}{2G}\bar\sigma=\frac{\bar\sigma_y}{2}\frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{1}{G}\right)-2\pi\delta(s)\frac{d^2}{dy^2}\left(\alpha(1+\nu)T\right) \tag{20}$$

та умов

$$\left.\bar\sigma_y\right|_{y=0}=-\bar p_1,\quad \left.\bar\sigma_y\right|_{y=2b}=-\bar p_2,\quad \left.\frac{d\bar\sigma_y}{dy}\right|_{y=0}=-is\bar q_1,\quad \left.\frac{d\bar\sigma_y}{dy}\right|_{y=2b}=-is\bar q_2. \tag{21}$$

Тут величини з рискою – трансформанти Фур'є

$$\bar f=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\exp(-isx)dx,$$

s – параметр цього інтегрального перетворення, $\delta(s)$ – дельта-функція Дірака, $i=\sqrt{-1}$.

Розв'язавши перше з рівнянь (20) з урахуванням двох перших умов (21), знаходимо

$$\bar\sigma_y=-\bar p_1\mathrm{ch}sy+\left(\bar p_1\mathrm{ch}2bs-\bar p_2+s\int\limits_0^{2b}\bar\sigma(\xi)\mathrm{sh}s(2b-\xi)d\xi\right)\frac{\mathrm{sh}sy}{\mathrm{sh}2bs}-$$
$$-s\int\limits_0^{y}\bar\sigma(\xi)\mathrm{sh}s(y-\xi)d\xi. \tag{22}$$

З вимоги, щоб вираз (22) задовольняв дві останні з умов (21), знаходимо дві інтегральні умови

$$
\begin{aligned}
&s\int\limits_0^{2b}\bar\sigma(\xi)\mathrm{sh}s\xi d\xi=\bar p_1-\bar p_2\mathrm{ch}2bs+i\bar q_2\mathrm{sh}2bs,\\
&s\int\limits_0^{2b}\bar\sigma(\xi)\mathrm{ch}s\xi d\xi=-\bar p_2\mathrm{sh}2bs-i\bar q_1+i\bar q_2\mathrm{ch}2bs.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

З урахуванням формул (23) вираз (22) для $\bar\sigma_y$ запишемо у простішому вигляді:

$$
\bar\sigma_y=-\bar p_1\mathrm{ch}sy-i\bar q_1\mathrm{sh}sy-s\int\limits_0^{2b}\bar\sigma(\xi)\mathrm{sh}s(y-\xi)d\xi. \tag{24}
$$

Розв'язавши друге з рівнянь (20), отримаємо

$$
\bar\sigma=\frac{2G}{1-\nu}\left\{A\mathrm{ch}sy+B\mathrm{sh}sy+\Psi_T(y)+\frac{1}{2s}\int\limits_0^y\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{G}\right)\bar\sigma_y(\xi)\mathrm{sh}s(y-\xi)d\xi\right\}, \tag{25}
$$

де

$$
\Psi_T(y)=-\frac{2\pi\delta(s)}{s}\int\limits_0^y\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\alpha(1+\nu)T(\xi)\right)\mathrm{sh}s(y-\xi)d\xi.
$$

Підставивши співвідношення (24) у (25), отримаємо

$$
\begin{aligned}
\bar\sigma=\frac{2G}{1-\nu}\Bigg\{&A\mathrm{ch}sy+B\mathrm{sh}sy+\Psi_T(y)+\Psi_p(y)+\Psi_q(y)-\\
&-\frac12\int\limits_0^y\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{G(\xi)}\right)\mathrm{sh}s(y-\xi)\int\limits_0^\xi\bar\sigma(\eta)\mathrm{sh}s(\xi-\eta)d\eta d\xi\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{26}
$$

де

$$
\begin{aligned}
\Psi_p(y)&=-\frac{\bar p_1}{2s}\int\limits_0^y\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{G(\xi)}\right)\mathrm{ch}s\xi\mathrm{sh}s(y-\xi)d\xi,\\
\Psi_q(y)&=-\frac{i\bar q_1}{2s}\int\limits_0^y\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{G(\xi)}\right)\mathrm{sh}s\xi\mathrm{sh}s(y-\xi)d\xi,
\end{aligned}
$$

а сталі A, B визначаємо з інтегральних умов (23). Змінивши порядок інтегрування в інтегралі з формули (26), для зображення Фур'є сумарних напружень отримаємо таке інтегральне рівняння Вольтерра другого роду:

$$
\bar\sigma=\frac{2G}{1-\nu}\left\{A\mathrm{ch}sy+B\mathrm{sh}sy+\Psi_T(y)+\Psi_p(y)+\Psi_q(y)-\frac12\int\limits_0^y\bar\sigma(\eta)\Re d\eta\right\}, \tag{27}
$$

де

$$
\Re=\Re(\eta,\xi,y)=\int\limits_\eta^y\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{G(\xi)}\right)\mathrm{sh}s(y-\xi)\mathrm{sh}s(\xi-\eta)d\xi.
$$

Для побудови розв'язку рівняння (27) використаємо метод послідовних наближень [3], аналогічно, як це зроблено у роботах [5, 16]. Згідно з цим методом $\bar\sigma=\lim\limits_{n\to\infty}\bar\sigma_n$, де

$$
\sigma_n=\frac{2G}{1-\nu}\left\{A_n\mathrm{ch}sy+B_n\mathrm{sh}sy+\Psi_T(y)+\Psi_p(y)+\Psi_q(y)-\frac12\int\limits_0^y\bar\sigma_{n-1}(\eta)\Re d\eta\right\}, \tag{28}
$$

а для визначення сталих A_1, B_1 використовуємо формули (23) при $\bar{\sigma}_0 = 0$.

Знайшовши у такий спосіб зображення Фур'є визначального напруження $\bar{\sigma}$, з формули (24) визначимо $\bar{\sigma}_y$. Самі ж визначальні напруження σ та σ_y знайдемо з використанням оберненого інтегрального перетворення Фур'є [2]:

$$\{\sigma, \sigma_y\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_y\} \exp(isx) ds. \tag{29}$$

Після відшукання визначальних напружень σ та σ_y напруження σ_x знайдемо за формулою

$$\sigma_x = \sigma - \sigma_y, \tag{30}$$

а дотичні σ_{xy} – з використанням формули

$$4\sigma_{xy} = q_1 + q_2 - \int_0^{2b} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \operatorname{sgn}(y - \xi) d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \operatorname{sgn}(x - \eta) d\eta, \tag{31}$$

яку отримано шляхом інтегрування рівнянь рівноваги (5).

Результати числового аналізу. Досліджували термонапружений стан стальної смуги D, для якої $b = 1$, а теплофізичні й пружні характеристики залежать від безрозмірної температури [17]: $\lambda_t(T) = 41.51\,(1 - 0.27(T - T_n))$ [W/ m K], $\alpha(T) = 17.08 \cdot 10^{-6}(1 + 0.77(T - T_n))$ [K $^{-1}$], $\nu(T) = 0.4\,(1 - 0.2(T - T_n))$, $G(T) = 0.74 \cdot 10^5 \left(1 + 0.46(T - T_n) + 0.56(T - T_n)^2\right)$ [MPa]. Надалі, коли говоритимемо про змінні характеристики матеріалу, матимемо на увазі їх задання за наведеними формулами, а коли говоритимемо про постійні, – тоді йтиметься про такі значення цих характеристик, які відповідають початковому значенню температури T_n.

Нехай термонапружений стан спричинений температурним полем (15) за умов асимптотичного теплового режиму [12], тобто за досить великих значень Fo, коли внеском ряду у формулі для змінної Кірхгофа (14) можна знехтувати. Тоді

$$\Theta = \frac{\mathrm{Bi}_1 \bar{T}_{c1} \left(1 + \mathrm{Bi}_2^*(2b - y)\right) + \mathrm{Bi}_2 \bar{T}_{c2} \left(1 + \mathrm{Bi}_1^* y\right)}{\mathrm{Bi}_1^* + \mathrm{Bi}_2^* + 2b\mathrm{Bi}_1^*\mathrm{Bi}_2^*}. \tag{32}$$

Розрахунки виконано за температур $t_{c2} = t_n = 273\,\mathrm{K}$, $t_{c1} = 673\,\mathrm{K}$. Значення температури t_n вибрано за відлікове: $t_0 = 273\,\mathrm{K}$, завдяки чому відповідні безрозмірні значення температури є такими: $T_n = T_{c2} = 1$, $T_{c1} = 2.465$. Якщо, наприклад, $\mathrm{Bi}_1 = 1.0$, $\mathrm{Bi}_2 = 0.1$ та $k_\lambda = -0.27$, то за змінних теплофізичних характеристик матеріалу із системи рівнянь (16), де Θ має вигляд (32), знаходимо параметри $\kappa_1 = 0.22$, $\kappa_2 = 0.17$. Тоді змінна Кірхгофа $\Theta =$ 1.11 - 0.1y, а безрозмірна температура

$$T = -3.7\sqrt{0.4 + 0.06y} + 4.7, \tag{33}$$

розподіл якої показано на рис. 1 суцільною лінією. Зауважимо, що у випадку постійних теплофізичних характеристик матеріалу легко знаходимо температурне поле у вигляді

$$T = 2.35 - 0.11y \tag{34}$$

(на рис. 1 показано штриховою лінією). Як відомо [1], у вільному від силових навантажень тілі температурне поле (34), яке є лінійною функцією координати, не спричинює термонапружень за сталих пружних характеристик матеріалу.

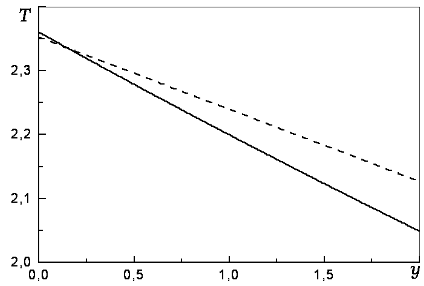

Рис. 1

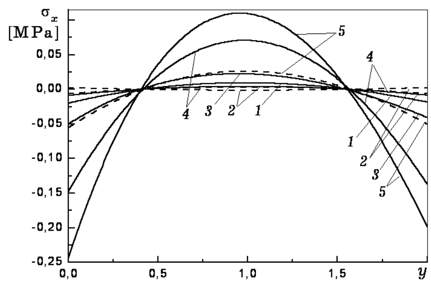

Рис. 2

Визначаючи термонапружений стан у смузі D, вважаємо, що напруження спричинені лише температурним полем, тобто $p_i = q_i = 0$, $i = 1,2$.

Для розрахунку напружень, обмежилися значенням $n = 1$ у формулі (28), оскільки за розглянутих у прикладі умов задачі точного розв'язку досягаємо вже першим наближенням.

На рис. 2 наведено розподіли напружень σ_x за змінною y у випадку сталих пружних характеристик матеріалу (крива *1*), за змінних лише коефіцієнта Пуассона (криві *2*), модуля зсуву (крива *3*), коефіцієнта лінійного температурного видовження (криві *4*) і, нарешті, коли всі пружні характеристики матеріалу залежать від температури (криві *5*). При цьому криві, накреслені суцільною лінією, відповідають температурному полю (33), а штриховою – (34). Для усіх перелічених випадків напруження σ_x біля країв смуги є стискуючими, а ближче до середини – розтягуючими. Як бачимо, температурне поле (34) викликає напруження в області D тільки за змінних коефіцієнтів Пуассона або лінійного температурного видовження, або ж усіх пружних характеристик у комплексі, а залежність від температури самого лише модуля зсуву не призводить до виникнення напружень. У випадку температурного поля (33) напруження наявні як для нетермочутливого тіла (крива *1*), так і за залежних від температури хоча б однієї чи усіх пружних характеристик матеріалу (криві *2–5*).

Очевидною є суттєва відмінність між напруженнями, розрахованими з урахуванням термочутливості матеріалу й без такого врахування. Якщо за сталих усіх пружних характеристик матеріалу смуги термонапруження відсутні, то у випадку термочутливого матеріалу наявний напружений стан. Тому робимо висновок, що при дослідженні розподілів термонапружень у реальних термочутливих тілах моделювання їх нетермочутливими може призвести до значних неточностей.

Як бачимо з рисунка, напруження σ_x є самозрівноваженими для усіх випадків пружних характеристик. Цей висновок можна також обґрунтувати теоретично, використавши інтегральні умови рівноваги, наведені в додатку 2 роботи [6], які для нашої задачі є однорідними:

$$\int_0^{2b} \sigma_x dy = \int_0^{2b} y\sigma_x dy = \int_0^{2b} \sigma_{xy} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\sigma_y dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{xy} dx = 0. \qquad (35)$$

Оскільки термонапружений стан смуги залежить тільки від змінної y, то на основі умов (35) знаходимо $\sigma_y = \sigma_{xy} \equiv 0$, що підтвердили й числові розрахунки за формулами (29)–(31).

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.
2. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1977. – 288 с.

3. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 542 с.
4. *Вігак В. М.* Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності і термопружності // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 62–67.
5. *Вігак В. М., Калиняк Б. М.* Зведення одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних і термочутливих тіл до інтегральних рівнянь другого роду // Доп. НАН України. – 1998. – № 11. – С. 60–67.
6. *Вігак В. М., Юзв'як М. Й.* Метод прямого інтегрування рівнянь плоских задач пружності та термопружності для необмежених областей // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – 1999. – Вип. 4. – С. 9–33.
7. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1965. – 288 с.
8. *Коздоба Л. А.* Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Наука, 1975. – 226 с.
9. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 367 с.
10. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
11. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
12. *Підстригач Я. С.* Температурне поле в стінках постійної товщини при асимптотичному тепловому режимі // Температурні напруження в тонкостінних конструкціях. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1959. – С. 109–122.
13. *Попович В. С.* О решении задач теплопроводности термочувствительных тел, нагреваемых путем конвективного теплообмена // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1988. – Вып. 28. – С. 83–86.
14. *Попович В. С.* Аналітико-числовий розв'язок задачі теплопровідності термочутливої стінки за умов конвективного теплообміну // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 199–204.
15. *Постольник Ю. С., Огурцов А. П.* Металургійна термомеханіка. – Дніпропетровськ: Системні технології, 2002. – 633 с.
16. *Vihak V. M., Kalyniak B. M.* Reduction of one-dimensional elasticity and thermoelasticity problems in inhomogeneous and thermal sensitive solids to the solution of integral equation of Volterra type // Proc. 3 rd Int. Congr. «Thermal Stresses-99»: Cracow (Poland). – 1999. – P. 457–460.
17. *Nowinski J.* Transient thermoelastic problem for an infinite medium with a spherical cavity exhibiting temperature dependent properties // J. Appl. Mech. – 1962. – **29**, No. 2. – P. 197–205.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОЙ ПОЛОСЫ

Построено решение плоской задачи термоупругости для термочувствительной полосы. При этом развита методика аналитико-числового решения нелинейной задачи теплопроводности для указанной области. Соответствующая задача термоупругости сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое решено методом последовательных приближений.

CONSTRUCTION OF SOLUTION TO THE PLANE THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A THERMOSENSITIVE STRIP

The solution to the plane thermoelasticity problem for a thermosensitive strip is constructed. Thus the technique of the analytical-numerical solving of a nonlinear heat conductivity problem for the specified domain is advanced. The corresponding thermoelasticity problem is reduced to integral Volterra type equation of the second kind which is solved by a iteration method.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
01.09.03