УДК 621: 519

З. І. Васюник, Б. Й. Дацко

КЛАСИФІКАЦІЯ ПРОСТОРОВО-НЕОДНОРІДНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ У СИСТЕМАХ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ САМООРГАНІЗАЦІЙНИХ НЕЙРОМЕРЕЖЕВИХ АЛГОРИТМІВ

Запропоновано нову оригінальну методику дослідження характеру автоколивань у системах типу реакції-дифузії на основі самоорганізаційного нейромережевого алгоритму Кохонена. Проведено дослідження поведінки розв'язків модельної системи типу реакції-дифузії за допомогою цього алгоритму.

Багато фізичних, хімічних чи біологічних задач приводять до еволюційних рівнянь із частинними похідними, що залежать від параметра.

У достатньо загальному випадку широкий спектр нелінійних явищ, які виникають в еволюційних рівняннях, можна описати за допомогою системи реакції-дифузії

$$\tau_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = l^2 \Delta\theta - q(\theta, \eta, \nu), \tag{1}$$

$$\tau_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = L^2 \Delta\eta - Q(\theta, \eta, \nu), \tag{2}$$

де τ_θ, τ_η і l, L – характерні часи і довжини системи, а q і Q – нелінійні функції.

Будемо вважати, що при всіх значеннях параметра ν з деякого інтервалу система має стаціонарний однорідний стан, тобто нуль-ізокліни системи мають єдину точку перетину, а при деякому критичному значенні ν_c з цього інтервалу стаціонарний стан втрачає стійкість.

Лінійний аналіз стійкості є доволі тривіальною задачею, у той час, як втрати стійкості і еволюції нетривіальних розв'язків (вторинні та подальші біфуркації) є суттєво складнішою проблемою. Відшукання нових методів їх дослідження і побудова біфуркаційних діаграм залишаються актуальними задачами як з фізичної, так і з математичної точок зору.

Оригінальну ідею побудови біфуркаційних діаграм для систем типу реакції-дифузії на основі теореми Гопфа запропоновано в роботі [1]. Основні припущення теореми Гопфа полягають у тому, щоб існував стаціонарний розв'язок еволюційної системи та щоб матриця Якобі мала пару комплексно-спряжених власних чисел λ і $\overline{\lambda}$,

$$\lambda(\nu) = \alpha(\nu) + i\omega(\nu),$$

таких, щоб при критичному значенні $\nu = \nu_c$

$$\omega(\nu_c) = \omega > 0, \qquad \alpha(\nu_c) = 0, \qquad \alpha'(\nu_c) \neq 0, \tag{3}$$

причому всі інші $n-2$ власні числа повинні мати строго від'ємну уявну частину $\omega(\nu)$. Якщо виконується ця остання умова, то умова (3) означає, що при переході ν через критичне значення ν_c відбувається втрата стійкості стаціонарного розв'язку. Тоді система (1), (2) має сім'ю періодичних розв'язків. Точніше, існує деяке $\varepsilon_H > 0$ та аналітична функція

$$\nu^H(\varepsilon) = \sum_{i=2}^{\infty} \nu_i^H \varepsilon_i, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_H,$$

 ISSN 0130-9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2004. – 47, № 4. – С. 166-171.

така, що для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_H)$ система (1), (2) при $\nu = \nu^H(\varepsilon)$ має періодичний розв'язок $p_\varepsilon(t)$. Період $T^H(\varepsilon)$ розв'язку $p_\varepsilon(t)$ є аналітичною функцією:

$$T^H(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega_0} \left[1 + \sum_{i=2}^{\infty} \tau_i^H \varepsilon^i \right], \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_H.$$

Якщо для системи скінченної розмірності виконуються умови, аналогічні умовам теореми Гопфа, то від стаціонарного стану при $\nu = \nu_c$ відгалужується періодичний розв'язок, тобто відбувається біфуркація народження циклу в розподіленій системі. Для цього випадку в [4] доведено теорему про народження граничного циклу за умови, що система належить до параболічних систем. Для цього використовувалась ідея зведення нескінченновимірної задачі до задачі скінченної розмірності за допомогою теореми про центральний многовид [5].

Для досліджень як приклад виберемо модельну систему [2]

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = l^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \theta^2 - \eta + 1, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = L^5 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \eta(\eta - (\theta - \nu)^3), \tag{5}$$

яка за своїми властивостями аналогічна моделі Гірера – Мейнхарта [3] і в якій при різному співвідношенні характерних довжин і часів реалізується велика кількість автохвильових явищ.

Криву нейтральної стійкості для цієї системи, яка відділяє область однорідних і неоднорідних розв'язків, знаходимо з нерівності [3]

$$-2\theta < -d(2\eta - (\theta - \nu)^3) - 2\sqrt{d\,[3\eta(\theta - \eta)^2 - 2\theta(2\eta - (\theta - \nu)^3)]}.$$

Для отримання кривої втрати стійкості неоднорідних розв'язків використовували ідею, закладену в теоремі Гопфа: аналізували власні значення напівдискретної системи, що апроксимує вихідну систему (4), (5) на основі методу прямих, в околі точки існування стійких дисипативних структур і знаходили критичну точку, в якій виконуються умови теореми Гопфа. Дослідження проводили для широкого діапазону відношення довжин $d = l^2/L^2$ (результати наведено в роботі [1]).

У цій роботі запропоновано іншу методику дослідження характеру коливань, які виникають у системах (1), (2): застосовано один із різновидів нейромережевих алгоритмів – карти Кохонена (Self-Organizing Maps, SOM) [6, 7].

У загальному випадку нейронні сітки складаються з одного або кількох шарів нейронів, які виконують різноманітні функції. Формально нейрон є математичною моделлю простого процесора, який має кілька входів і один вихід. Вектор вхідних сигналів перетворюється нейроном у вихідний сигнал з використанням трьох функціональних блоків: локальної пам'яті, блоку підсумовування і блоку нелінійного перетворення.

Особливістю сітки Кохонена є те, що вона виконує класифікацію даних і складається з одного шару нейронів. Число входів кожного нейрона дорівнює розмірності вхідного образу. Кількість самих нейронів визначається тим ступенем детальності, з якою необхідно виконати кластеризацію вхідного набору. При достатній кількості нейронів і вдалих параметрах навчання нейронна сітка Кохонена може не тільки виділити основні групи образів, але й встановити тонку структуру отриманих кластерів. При цьому близьким вхідним даним будуть відповідати близькі карти нейронної активності.

Отже, самоорганізаційні карти Кохонена можна розглядати як активне середовище, здатне самоорганізовуватися і адаптуватися до тієї вхідної інформації, яку воно обробляє. Крім того, такий метод дозволяє подати результати в надзвичайно зручній для сприйняття формі, спроектувавши вхідні вектори x розмірності $N (N \gg 4)$ на двовимірну карту розмірності N так, що вектори, близькі в багатомірному просторі, знаходяться поруч і на двовимірній SOM–карті.

Роботу алгоритму, який використовують у картах Кохонена, схематично можна описати таким чином. У початковий момент часу ваговим коефіцієнтам нейронів присвоюють випадкові значення, рівномірно розподілені на одиничному інтервалі. Попередньо нормалізований вхідний вектор подають на кожен нейрон двомірної мережі та визначають його віддаль до кожного нейрона

$$d_j = \|x - \omega_j\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \omega_{ij})} \,, \tag{6}$$

де j – індекс нейрона в мережі, i – індекс підсумовування за компонентами вектора, ω_{ij} – вага зв'язку, який з'єднує компоненту i вхідного вектора з вхідним нейроном j. Для кожного вхідного вектора x шукають нейрон c, віддаль якого до вхідного вектора є найменшою, тобто визначають найближчий до вхідного сигналу нейрон (нейрон-«переможець»):

$$c \equiv \|x - \omega_c\| = \min_j d_j \,.$$

Подальше навчання нейрона відбувається за правилом

$$\omega_j(t+1) = \begin{cases} \omega_j(t) + \alpha(t) h_{cj}(t) \left[x(t) - \omega_j(t)\right], & j \in N_c, \\ \omega_j(t), & j \notin N_c, \end{cases} \tag{7}$$

де N_c характеризує окіл нейрона-«переможця», $\alpha(t)$ – характерний час навчання мережі, $h_{cj}(t)$ – адаптація нейронів-сусідів з околу N_c. Тобто навчання зумовлює як зменшення віддалі між вхідним сигналом і положенням нейрона-«переможця», так і зменшення віддалі між вхідним вектором і ваговим вектором сусідів.

Як результат відображення вектора x на двовимірну область, побудовану з нейронів, встановлюється карта областей з однаковими властивостями, тобто подібні вхідні вектори будуть розміщені близько один від одного. Отримуємо своєрідну класифікацію вхідних даних, суть якої полягає в тому, що спонтанно, без попереднього навчання, проходить розшарування інформації, яку містять вхідні вектори, на кластери за певними внутрішніми закономірностями, які містяться у вхідних даних. Подальша обробка вихідних векторів за встановленим правилом приводить до навчання нейронної мережі та відображення цих даних у межах того чи іншого кластера. Тобто відображення такої інформації системою нейронів характеризується адаптацією системи до цієї інформації.

Навчання базується на двох принципах:

а) конкурентне навчання: вектор прототипу, найбільш подібний до вектора даних, модифікується так, щоб він до нього був ще ближчим;

б) групове навчання: не тільки найбільш подібний вектор прототипу, але і його сусіди на карті переміщуються до вектора даних. Цим шляхом карта самоорганізується.

Крім цього, навчання можна проводити в два етапи: спочатку навчаючи сусідні нейрони по великому колу, а потім по малому, включаючи в процес навчання тільки найближчих сусідів. Використовуючи більший кінцевий радіус у навчанні, карта стає жорсткішою і краще зберігає топологію набору даних.

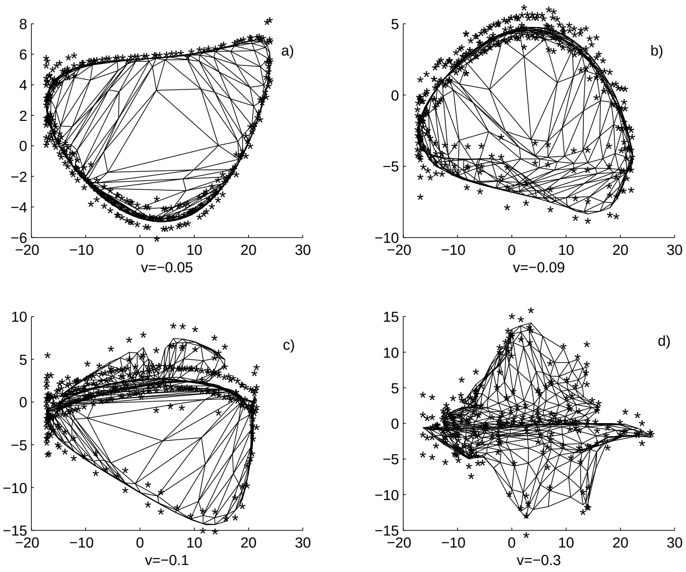

Рис. 1: SOM-сітка при сталому $d = 0.02$, але різних значеннях параметра біфуркації

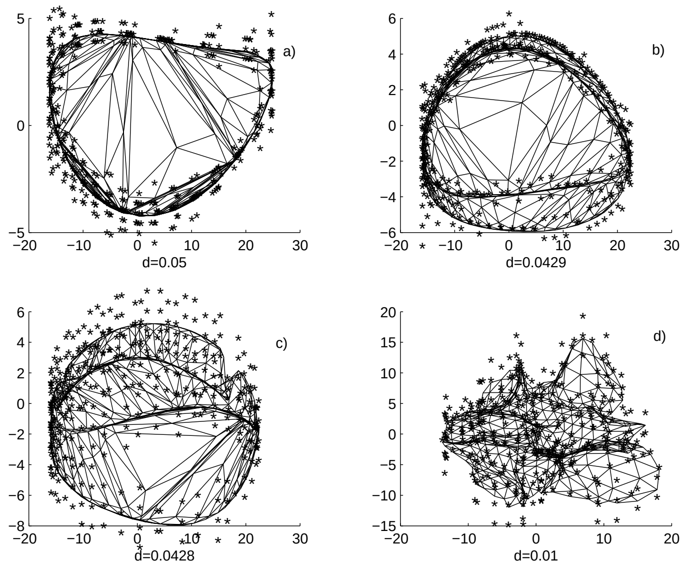

Рис. 2: SOM-сітка при параметрі біфуркації $\nu = -0.375$ для різних відношень довжин $d = l^2/L^2$.

Використовуючи цей алгоритм проведено дослідження розв'язків системи (4), (5), отриманих у послідовні моменти часу на різних інтервалах інтегрування і з різними параметрами. Досліджували масиви даних, які складалися із 500 векторів, кожен з яких відповідав певному моменту часу та мав 200 компонент (200 точок дискретизації у просторі). Для кращої візуалізації результатів досліджень використано проекцію відстаней між нейронами на SOM-карті, тобто SOM-сітку.

На рис. 1, 2 зображено SOM-сітки розв'язків системи при різних параметрах системи, починаючи від регулярного коливного процесу (рис. 1,a і 2,a) і закінчуючи хаотичними коливаннями (рис. 1,d і 2,d). Рис. 1,$в$ і 2,$в$ відповідають параметрам, при яких у системі спостерігається відносно мале перевищення порога нестійкості або, як часто говорять, мала надкритичність. З ростом надкритичності просторово-часовий хаос у системі (4), (5) все більше ускладнюється і відповідно ускладнюється топологія SOM-сітки (рис. 1,c і 2,c). З аналізу рисунків випливає, що незважаючи на те, що параметри, при яких чисельно розв'язували систему, відрізняються, SOM-сітки мають значну подібність між собою для однакового типу коливань. Результати досліджень показали, що SOM-сітки для періодичних і стохастичних коливань при різних параметрах системи зберігають специфічну топологію, яка є характерною для виділених процесів у конкретній системі.

Розглянуту властивість можна використати для автоматичного комп'ютерного розпізнавання автоколивних процесів і побудови підобластей з просторово-часовим хаосом на біфуркаційних діаграмах.

Аналіз багатьох нелінійних дисипативних систем показує, що в них встановлюються складні режими поведінки, які тим не менше мають інваріантно-групову структуру. Навіть у порівняно простих дисипативних системах відбувається вихід на розв'язки якісно різних типів – стаціонарні, періодичні, багаточастотні та стохастичні. Їхнім математичним образом є гранична множина, до якої притягуються траєкторії у фазовому просторі системи – атрактор.

Запропонований підхід дає можливість автоматичного комп'ютерного розпізнавання і класифікації таких усталених режимів, причому не тільки для спрощених модельних систем, але й для систем довільної складності. А SOM-сітки чисельних розв'язків системи є аналогами атракторів системи та в якісно інший спосіб підтверджують інваріантність усталених режимів у нелінійних динамічних системах.

1. *Гафійчук В. В., Дацко Б. Й., Васюник З. І.* Дослідження різних типів біфуркації у системах типу реакція-дифузія // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 1. – С. 155–160.
2. *Гафійчук В. В., Щербаченко Т. М., Васюник З. І.* Математичне моделювання просторово-часової самоорганізації у системах типу реакція-дифузія // Доп. АН України. – 1992. – № 7. – С. 14–20.
3. *Кернер Б. С., Осипов В. В.* Самоорганизация в активных распределенных системах // Успехи физ. наук. – 1990. – **160**, № 9. – С. 1–73.
4. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1976. – С. 134–154.
5. *Хессард Б., Казаринов Н., Вен И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – М.: Мир, 1985. – 280 с.
6. *Kohonen T.* Self-organizing map. – Berlin: Springer-Verlag, 1995.
7. *Kohonen T., Kasaki S., Lagus K.* Self-organization of a massive document collection // IEEE Trans. Neural Networks. – 2000. – **11**, No. 3. – P. 574–585.

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ В СИСТЕМАХ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ С ПОМОЩЬЮ САМООРГАНИЗАЦИОННЫХ НЕЙРОСЕТЕВЫХ АЛГОРИТМОВ

Предложен новый оригинальный метод исследования характера автоколебаний в системах типа реакции-диффузии на основании самоорганизационного алгоритма Кохонена. Проведено исследование поведения решений модельной системы с помощью этого алгоритма.

CLASSIFICATION OF SPATIALLY-INHOMOGENEOUS SOLUTIONS IN THE SYSTEM OF REACTION-DIFFUSION TYPE BASED ON SELF-ORGANIZING ALGORITHM

New original method for estimation of auto-oscillation character in the systems of reaction-diffusion, based on the Kohonen self-organizing algorithm, is proposed. A concrete model system is considered by this method.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
09.09.03