УДК 519.21

Г. М. Перун

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З НЕПЕРЕРВНИМИ ЗБУРЕННЯМИ

За допомогою функції Ґріна встановлено існування розв'язку неоднорідної задачі Діріхле для лінійного стохастичного рівняння другого порядку параболічного типу з неперервними збуреннями.

Розв'язок задачі Діріхле за допомогою функції Ґріна для лінійного параболічного детермінованого рівняння побудовано в [4], а розв'язок більш загальних крайових задач досліджено в праці [8].

Вивченню розв'язку задачі Коші для лінійних параболічних рівнянь з коефіцієнтами, що не залежать від фазових змінних і які є функціями типу «білий шум», встановленню умов існування першого і другого моментів розв'язків присвячена праця [2].

У статті [6] розв'язок задачі Коші для рівняння параболічного типу зі змінними та випадковими коефіцієнтами при молодших похідних побудовано методом потенціалів і досліджено їхні диференціальні властивості.

У праці [1] за допомогою рядів Фур'є встановлено існування і єдиність узагальненого розв'язку задач Діріхле та Неймана для диференціального рівняння 2-го порядку дивергентного вигляду, коефіцієнти якого при молодших похідних містять «білий шум». Задача Діріхле для одновимірного квазілінійного рівняння теплопровідності, яке містить «білий шум», вивчалась у [3].

Питання існування розв'язку задачі Коші для квазілінійного рівняння параболічного типу з неперервними збуреннями біля молодших похідних у нелінійностях розглядалось у [5].

Пропонована робота присвячена побудові розв'язанню неоднорідної задачі Діріхле для лінійного стохастичного рівняння другого порядку.

Нехай (Ω, F, P) – ймовірнісний простір, $\{F_t, t \geq 0\}$ – потік неспадних σ-алгебр, $w(t,\omega)$ – стандартний скалярний вінерівський процес, вимірний відносно σ-алгебри F_t при кожному $t \in [0,T)$. Випадкова функція $u(t,x,\omega)$, яка визначена на $[0,T) \times G \times \Omega = Q \times \Omega$, де G – обмежена область в E_n з межею S, є F_t-вимірною відносно σ-алгебри борелівських множин при всіх $(t,x) \in Q$. Розглянемо задачу Діріхле для лінійного стохастичного рівняння 2-го порядку параболічного типу

$$L[u(t,x,\omega)] = b(t,x,\omega)u(t,x,\omega)dw(t,\omega), \quad (x,t) \in Q, \quad \omega \in \Omega, \tag{1}$$

де $L[u] = d_t u(t,x,\omega) - \left[\sum_{|k|\leq 2} a_k(t,x) D_x^k u(t,x,\omega)\right] dt$, з умовами

$$u(t,x,\omega)|_{t=0} = \varphi(x,\omega), \quad x \in G, \quad \omega \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(t,x,\omega)|_\Gamma = \psi(t,z,\omega), \quad z \in \Gamma, \Gamma = (0,T) \times S, \quad x \to z \quad \text{зсередини} \quad G. \tag{3}$$

Тут d_t – стохастичний диференціал Іто, функції φ, $\psi(t,z,\omega)$, $b(t,z,\omega)$ є F_t-вимірними, крім того, з імовірністю 1

$$\int_0^T |b(t,x,\omega)|^2 dt < +\infty. \tag{4}$$

Розв'язок задачі будемо шукати в просторі $\mathcal{L}(G)$-вимірних функцій $u(t,x,\omega)$, які мають скінченну норму

$$\|u(t,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(G)} = \int\limits_G M|u(t,x,\omega)|^2 dx, \tag{5}$$

де M – операція математичного сподівання.

Теорема 1. *Припустимо, що*

1) *рівняння* (1) *рівномірно параболічне в області* Q, *а межа області* G *належить класу* $C^{(1+\alpha)}$;

2) *коефіцієнти* $a_k(t,x)$ *визначені в* Q *і неперервні за* t *рівномірно щодо* x, *крім того, належать класу* $C_x^{(\alpha)}(Q)$;

3) *функція* $b(t,x,\omega)$ – *вимірна відносно* σ*-алгебри* F_t, *задовольняє умову* (4), *сумовна за нормою* (5);

4) *функції* φ *і* ψ – F_t*-вимірні випадкові функції, сумовні за введеною нормою* (5) *в області* G *і на межі* S ;

5) *крайова функція* $\psi(t,z,\omega)$ *з імовірністю 1 допускає продовження* $\psi^*(t,x,\omega)$ *з межі* Γ *в область* Q, *яка має стохастичний диференціал, і* $L[\psi^*(t,x,\omega)]$ – F_t*-вимірна та сумовна за нормою* (5) *функція;*

6) *випадкові величини* $b(t,x,\omega)$ *і* $\psi^*(t,x,\omega)$ *є незалежними для всіх* $(t,x)\in Q$.

Тоді з імовірністю 1 існує розв'язок задачі (1)–(3), *для якого справджується оцінка*

$$\|u(t,x,\omega)\|_{\mathcal{L}(G)} \le c\Bigg[\|\psi\|_{\mathcal{L}(\Gamma)} + \|\varphi\|_{\mathcal{L}(G)} + \Bigg(\int\limits_0^t \Big(\|d_\tau(\psi(\tau,x,\omega))\|^2_{\mathcal{L}(\Gamma)} +$$

$$+\sum_{|k|\le 2} \|D_x^k\psi(\tau,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(\Gamma)}\Big)d\tau\Bigg)^{1/2} + \|\psi\|_{\mathcal{L}(\Gamma)}\Bigg(\int\limits_0^t \|b\|^2_{\mathcal{L}(\Gamma)}d\tau\Bigg)^{1/2}\Bigg] e^{\frac{c_0^2}{2}\int\limits_0^t \|b\|^2 d\tau}, \tag{6}$$

де c_0 – *додатна стала з оцінок функції Ґріна* [4].

Д о в е д е н н я. Зведемо неоднорідну задачу (1)–(3) до однорідної, покладаючи

$$u(t,x,\omega) = \psi^*(t,x,\omega) + v(t,x,\omega),$$

де функція $v(t,x,\omega)$ є F_t-вимірною і з імовірністю 1 на межі Γ перетворюється в нуль: $v|_\Gamma = 0$, $t>0$.

Умови **1**), **2**) гарантують існування функції Ґріна $\mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)$ однорідної крайової задачі для відповідного детермінованого рівняння $L[u]=0$. За її допомогою поставимо у відповідність задачі (1)–(3) лінійне стохастичне неоднорідне інтегральне рівняння

$$u(t,x,\omega) = F(t,x,\omega) + \int\limits_0^t \mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)b(\tau,\xi,\omega)u(\tau,\xi,\omega)\psi^*(\tau,\xi,\omega)d\xi d\omega, \tag{7}$$

де

$$F(t,x,\omega) = \psi^*(t,x,\omega) - \int\limits_0^t\int\limits_G \mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)L[\psi^*]d\xi d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_G \mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)b(\tau,x,\xi)\psi^*(\tau,\xi,\omega)d\xi dw(\tau)+\int_G \mathcal{E}(t,0,x,\xi)\widetilde{\varphi}(\xi)d\xi,$$

а $L[\psi^*(t,x,\omega)]=\left(d_t-\sum_{|k|\le 2}a_k(t,x)D_x^k\right)\psi^*$, $\quad\widetilde{\varphi}(\xi,\omega)=\varphi(x)-\psi^*(0,x)$.

Існування розв'язку інтегрального рівняння (7) доведемо методом послідовних наближень, які визначаються рекурентним співвідношенням

$$u_m(t,x,\omega)=F(t,x,\omega)+\int_0^t\int_G \mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)b(\tau,\xi,\omega)u_{m-1}(\tau,\xi,\omega)d\xi dw,\quad m=1,2,\ldots,\tag{8}$$

у якому $u_0(t,x,\omega)=F(t,x,\omega)$.

Щоб встановити збіжність послідовності $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ у просторі $\mathcal{L}(G)$, оцінимо за нормою (5) члени еквівалетного ряду

$$u_0+(u_1-u_0)+\cdots+(u_m-u_{m-1})+\ldots.\tag{9}$$

Розглянемо норму нульового наближення

$$\|u_0(t,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(G)}=\int_G M\Big|\psi^*(t,x,\omega)+\int_G \mathcal{E}(t,0,x,\xi)\widetilde{\varphi}(\xi)d\xi-\tag{10}$$

$$-\int_0^t\int_G \mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)L[\psi^*(\tau,\xi,\omega)]d\xi d\tau+\int_0^t\int_G \mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)b(\tau,\xi,\omega)\psi^*(\xi,\tau,\omega)d\xi dw(\tau,\omega)\Big|^2dx.$$

Зобразимо $|\mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)|=|\mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)|^{1/2}|\mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)|^{1/2}$. Скористаємось нерівностями

$$\int_G|\mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)|d\xi\le c_0,\quad \int_G|\mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)|dx\le c_0,$$

властивістю другого момента інтеграла Вінера–Іто, застосуємо нерівність Гельдера для інтегралів і далі продовжимо оцінку (10):

$$\frac14\|u_0(t,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(G)}\le\Bigg\{\int_G M|\psi^*(t,x,\omega)|^2dx+\int_G\Bigg(\int_G|\mathcal{E}(t,0,x,\xi)|d\xi\times$$

$$\times\int_G|\mathcal{E}(t,0,x,\xi)|d\xi\cdot M|\widetilde{\varphi}(x)|^2d\xi\Bigg)dx+$$

$$+\int_G\Bigg(\int_0^t\int_G|\mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)|d\xi\int_G|\mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)|M|L[\psi^*(\tau,\xi,\omega)]|^2d\xi d\tau\Bigg)dx+$$

$$+\int_G\Bigg(\int_0^t\int_G|\mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)|d\xi\int_G|\mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)|M|b(\tau,\xi,\omega)\psi^*(\tau,\xi,\omega)|^2d\xi d\tau\Bigg)dx\Bigg\}.$$

Змінивши порядок інтегрування за x і ξ, дістанемо

$$\frac14\|u_0(t,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(G)}\le\Big\{\|\psi^*(t,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(G)}+c_0^2\Big(\|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathcal{L}(G)}+$$

$$+\int\limits_0^t \|L[\psi^*(\tau,x,\omega)]\|^2_{\mathcal{L}(G)}d\tau+\int\limits_0^t \|b(\tau,x,\omega)\psi^*(\tau,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}}d\tau\Bigg)\Bigg\}.$$

Врахувавши умову **6**) з формулювання теореми та ввівши позначення

$$\sup_{0<\tau<t}\|\psi^*(\tau,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(G)}=\psi_0(t),\qquad \int\limits_0^t \|L[\psi^*(\tau,x,\omega)]\|^2_{\mathcal{L}(G)}d\tau=\psi_1(t),$$

$$\int\limits_0^t \|b(s,x,\omega)]\|^2_{\mathcal{L}(G)}ds=b_0(t),$$

остаточно дістанемо

$$\frac{1}{4}\|u_0(t,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(G)}\le$$

$$\le\{\|\psi^*(t,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(G)}+c_0^2(\|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathcal{L}(G)}+\psi_1(t)+\psi_0(t)\int\limits_0^t \|b(\tau,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(G)}d\tau)\}=$$

$$=\{\|\psi^*(t,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(G)}+c_0^2(\|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathcal{L}(G)}+\psi_1(t)+\psi_0(t)b_0(t))\}.\qquad (10_0)$$

Враховуючи нерівність (10_0), оцінимо далі

$$\frac{1}{4}\|u_1-u_0\|^2_{\mathcal{L}(G)}\le\frac{1}{4}c_0^2\int\limits_0^t \|b\|^2_{\mathcal{L}(G)}\|u_0(\tau,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(G)}d\tau)\le$$

$$\le\frac{1}{4}\left(c_0^2\|\psi^*\|^2_{\mathcal{L}(G)}+(c_0^2)^2\left(\|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathcal{L}(G)}b_0(t)+\psi_1(t)b_0(t)+\frac{1}{2}\psi_0(t)b_0^2(t)\right)\right),\qquad (10_1)$$

де $\int\limits_0^t b_0(t)\|b(\tau,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}}d\tau=\int\limits_0^t \frac{d}{d\tau}\frac{b_0^2(\tau)}{2}d\tau=\frac{1}{2}b_0^2(t)$.

Проводячи аналогічні міркування і використовуючи оцінку (10_1), маємо

$$\frac{1}{4}\|u_2-u_1\|^2_{\mathcal{L}(G)}\le\frac{1}{4}\Bigg((c_0^2)^2\|\psi^*\|^2_{\mathcal{L}(G)}b_0(t)+$$
$$+(c_0^2)^3\left(\|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathcal{L}(G)}+\psi_1(t)\frac{b_0^2(t)}{2}+\psi_0(t)\frac{b_0^3(t)}{2\cdot 3}\right)\Bigg),\qquad (10_2)$$

$$\frac{1}{4}\|u_3-u_2\|^2_{\mathcal{L}(G)}\le\frac{1}{4}\Bigg((c_0^2)^3\|\psi^*\|^2_{\mathcal{L}(G)}\frac{b_0^2(t)}{2}+$$
$$+(c_0^2)^4\left(\|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathcal{L}(G)}+\psi_1(t)\frac{b_0^3(t)}{2\cdot 3}+\psi_0(t)\frac{b_0^4(t)}{2\cdot 3\cdot 4}\right)\Bigg).\qquad (10_3)$$

За індукцією проведемо оцінку загального члена:

$$\frac{1}{4}\|u_m-u_{m-1}\|^2_{\mathcal{L}(G)}\le$$

$$\le\frac{1}{4}\left(\|\psi^*\|^2_{\mathcal{L}(G)}\cdot\frac{(c_0^2b_0(t))^{m-1}}{(m-1)!}+c_0^2\left(\|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathcal{L}(G)}+\psi_1(t)+\frac{1}{m+1}b_0(t)\psi_0(t)\right)\frac{(c_0^2b_0(t))^m}{m!}\right)\le$$

$$\le\frac{1}{4}c_0^2\left(\|\psi^*\|^2_{\mathcal{L}(G)}+\|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathcal{L}(G)}+\psi_1(t)+b_0(t)\psi_0(t)\right)\frac{(c_0^2b_0(t))^m}{m!}.\qquad (10_m)$$

Отже, для суми ряду (9) справджується оцінка

$$\|u(t,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(G)} \le \|u_0\|^2_{\mathcal{L}(G)} + \sum_{n=1}^{\infty} \|u_m - u_{m-1}\|^2_{\mathcal{L}(G)} \le$$

$$\le \|\psi^*\|^2_{\mathcal{L}(G)} + c_0^2 \left(\|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathcal{L}(G)} + \psi_1(t) + \psi_0(t) b_0(t) \right) +$$

$$+ c_0^2 \left(\|\psi^*\|^2_{\mathcal{L}(G)} + \|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathcal{L}(G)} + \psi_1(t) + \psi_0(t) b_0(t) \right) e^{c_0^2 b_0(t)} \le$$

$$\le 2c_0^2 \left(\|\psi^*\|^2_{\mathcal{L}(G)} + \|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathcal{L}(G)} + \psi_1(t) + \psi_0(t) b_0(t) \right) e^{c_0^2 b_0(t)}. \tag{11}$$

Припустимо, що виконуються нерівності

$$\|\psi^*\|^2_{\mathcal{L}(G)} \le c\|\psi\|^2_{\mathcal{L}(\Gamma)}, \quad \|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathcal{L}(G)} \le \|\varphi\|^2_{\mathcal{L}(G)} + \|\psi(0,t)\|^2_{\mathcal{L}(\Gamma)},$$

$$\|L[\psi^*]\|^2_{\mathcal{L}(G)} \le c_1 \|L[\psi]\|^2_{\mathcal{L}(\Gamma)},$$

де c_1 , c_2 – додатні сталі.

Тоді

$$\|u\|^2_{\mathcal{L}(G)} \le 2c_0^2 \left(c_2 \|\psi\|^2_{\mathcal{L}(\Gamma)} + \|\varphi\|^2_{\mathcal{L}(G)} + c_1 \int_0^t \left(\|d_\tau \psi(\tau,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(\Gamma)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{|k|\le 2} \|D_x^k \psi(\tau,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(\Gamma)} \right) d\tau + c_1 \|\psi\|^2_{\mathcal{L}(\Gamma)} \int_0^t \|b\|^2_{\mathcal{L}(G)} d\tau \right) e^{c_0^2 b_0(t)}.$$

Позначивши $\max(2c_0^2 c_1, 2c_0^2 c_1) = c^2$, запишемо

$$\|u\|^2_{\mathcal{L}(G)} \le c^2 \left(\|\psi\|^2_{\mathcal{L}(\Gamma)} + \|\varphi\|^2_{\mathcal{L}(G)} + \int_0^t \left(\|d_\tau \psi(\tau,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(\Gamma)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{|k|\le 2} \|D_x^k \psi(\tau,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(\Gamma)} \right) d\tau + \|\psi\|^2_{\mathcal{L}(\Gamma)} \int_0^t \|b\|^2_{\mathcal{L}(G)} d\tau \right) e^{c_0^2 b_0(t)}.$$

Щоб отримати твердження теореми, скористаємося відомою нерівністю для чисел $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^{1/2} \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$. Остаточно дістанемо

$$\|u\|_{\mathcal{L}(G)} \le c \left\{ \|\psi\|_{\mathcal{L}(\Gamma)} + \|\varphi\|_{\mathcal{L}(G)} + \left(\int_0^t \left(\|d_\tau \psi(\tau,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(\Gamma)} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \sum_{|k|\le 2} \|D_x^k \psi(\tau,x,\omega)\|^2_{\mathcal{L}(\Gamma)} d\tau \right)^{1/2} + \|\psi\|_{\mathcal{L}(\Gamma)} \left(\int_0^t \|b\|^2_{\mathcal{L}(G)} d\tau \right)^{1/2} \right\} e^{\frac{1}{2} c_0^2 b_0(t)}. \diamondsuit$$

Отже, побудовано та оцінено розв'язок задачі Діріхле для рівняння, коефіцієнти якого зазнають неперервних збурень типу «білий шум», за допомогою функції Ґріна відповідної однорідної детермінованої задачі для рівняння другого порядку параболічного типу в просторі сумовних із квадратом функцій.

1. *Гихман И. И.* О смешанной задаче для стохастического уравнения параболического типа // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 3. – С. 367–377.
2. *Гихман И. И., Местечкина Т. М.* Задача Коши для уравнения параболического типа с коэффициентами типа «белый шум» // Теория случайных процессов. – 1987. – С. 19–28.
3. *Дороговцев А. Я., Ивасишен С. Д., Кукуш А. Г.* Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с «белым шумом» в правой части // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 1. – С. 13–20.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа – М.: Наука, 1967. – 736 с.
5. *Перун Г. М.* Про розв'язок задачі Коші для стохастичного рівняння параболічного типу з молодшими похідними у нелінійностях // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2002. – Вип. 134. – С. 87–91.
6. *Розовскй Б. Л.* О стохастических дифференциальных уравнениях в частных производных // Мат. сб. – 1975. – **96**(II). – С. 367–377.
7. *Царьков Е. Ф., Ясинский В. К.* Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. – Рига: Ориентир, 1992. – 301 с.
8. *Эйдельман С. Д., Ивасишен С. Д.* Исследование матрицы Грина однородной параболической граничной задачи // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1970. – **23**. – С. 179–234.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НЕПРЕРЫВНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

С помощью функции Грина доказано существование решения неоднородной задачи Дирихле для линейного уравнения 2-го порядка параболического типа с непрерывными возмущениями.

DIRICHLET PROBLEM FOR LINEAR STOCHASTIC EQUATION OF PARABOLIC TYPE WITH CONTINUOUS PERTURBATIONS

With the help of Green's function the existence of solution to the non-homogeneous Dirichlet problem for the linear second-order parabolic type equation with continuous perturbations is established.

Чернів. нац. ун-т
ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
01.09.03