УДК 517.95+511.2

М. М. Симотюк, О. М. Медвідь

ЗАДАЧА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ДАНИМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Досліджено коректність задачі з розподіленими даними для лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими комплексними коефіцієнтами. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку розглядуваної задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі.

Задачі з інтегральними умовами (їх називають також задачами з розподіленими даними) для рівнянь із частинними похідними почали вивчати порівняно недавно. Класи коректності задач з інтегральними умовами за часовою змінною t та умовами росту на нескінченності за іншими координатами для еволюційних систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами встановлено в [1, 7–9]. Для гіперболічних рівнянь у класах функцій, майже періодичних за просторовими змінними, у [3, §7.4; 11, §2.3] доведено розв'язність задач з інтегральними умовами для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компонентами яких є коефіцієнти рівняння та параметри області. Результати праць [3, §7.4; 11, §2.3] посилено в [5], де встановлено коректність задач з інтегральними умовами за виділеною змінною t для довільних рівнянь другого порядку за змінною t (без обмеження на тип) і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел, які є значеннями верхньої межі інтегрування в умовах (2). У пропонованій роботі узагальнено отримані в [5] результати на випадок широкого класу вагових функцій під знаком інтеграла. Основні результати роботи анонсовано в [2].

1. Використовуємо такі позначення: $\operatorname{mes} A$ – міра Лебега в $\mathbb{R}$ вимірної множини $A \subset \mathbb{R}$; Ω_p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$; $Q_p = (0,T) \times \Omega_p$; $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega_p$; $D = (-i\partial/\partial x_1, \ldots, -i\partial/\partial x_p)$; $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$; $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$; $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p$; $W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \ge 0, \gamma > 0$, – простір функцій, отриманий в результаті поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ik, x)$ за нормою

$$\|\varphi(x); W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\| = \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} |\varphi_k|^2 w_k^2(\alpha, \beta; \gamma)}, \qquad w_k(\alpha; \beta; \gamma) = (1 + |k|)^{\alpha} \exp(\beta |k|^{\gamma});$$

$C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ – простір функцій $u(t,x)$ таких, що при фіксованому $t \in [0,T]$ похідні $\partial^j u(t,x)/\partial t^j$, $0 \le j \le n$, належать до простору $W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0,T]$. Норму в просторі $C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ задаємо формулою

$$\|u(t,x); C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}; W^{\gamma}_{\alpha,\beta} \right\|.$$

2. Нехай $A_{q,j}(\xi)$, $q, j = 1, 2$, – многочлени зі сталими комплексними коефіцієнтами порядків $N_{q,j}$ відповідно; $g_j(t,k)$, $j = 1, 2$, $k \in \mathbb{Z}^p$, – розв'язки задач Коші $L_2(d/dt, k) g_j(t,k) = 0$, $g_j^{(q-1)}(0,k) = \delta_{j,q}$, $q = 1, 2$, відповідно, де $L_2(\lambda, k) \equiv \lambda^2 + A_{2,1}(k)\lambda + A_{2,2}(k)$; $\delta_{j,q}$ – символ Кронекера.

В області Q_p розглядаємо задачу

$$L_1\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) u(t,x) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_{1,1}(D)\frac{\partial u}{\partial t} + A_{1,2}(D) u = 0, \qquad (t,x) \in Q_p, \quad (1)$$

$$\int_0^{t_1} g_1(t,D)u(t,x)\,dt = \varphi_1(x), \quad \int_0^{t_1} g_2(t,D)u(t,x)\,dt = \varphi_2(x), \quad x \in \Omega_p, \tag{2}$$

де $0 < t_1 \leq T$, $g_j(t,D)$, $j = 1,2$, – псевдодиференціальні операції, дія яких на функцію $u(t,x) = \sum\limits_{|k|\geq 0} u_k(t)\exp(ik,x)$ задається формулою $g_j(t,D)u(t,x) = \sum\limits_{|k|\geq 0} g_j(t,k)u_k(t)\exp(ik,x)$.

3. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} u_k(t)\exp(ik,x). \tag{3}$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком такої задачі:

$$\frac{d^2u_k(t)}{dt^2} + A_{1,1}(k)\frac{du_k(t)}{dt} + A_{1,2}(k)u_k(t) = 0, \tag{4}$$

$$\int_0^{t_1} g_1(t,k)u_k(t)\,dt = \varphi_{1,k}, \qquad \int_0^{t_1} g_2(t,k)u_k(t)\,dt = \varphi_{2,k}, \tag{5}$$

де $\varphi_{1,k}, \varphi_{2,k}, k \in \mathbb{Z}^p$, – коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ відповідно.

Нехай $\{f_1(t,k), f_2(t,k)\}$ – така фундаментальна система розв'язків рівняння (4), що $f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{j,q}$, $j,q = 1,2$; $F_k(t,\tau)$ – функція, задана рівністю

$$F_k(t,\tau) = f_1(\tau,k)f_2(t,k) - f_2(\tau,k)f_1(t,k), \quad 0 \leq \tau \leq T, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{6}$$

Розв'язок задачі (4), (5) з класу $C^2[0,T]$ зображається формулою

$$u_k(t) = C_{k,1}f_1(t,k) + C_{k,2}f_2(t,k), \tag{7}$$

де сталі $C_{k,1}$, $C_{k,2}$ визначаються із системи рівнянь

$$C_{k,1}\int_0^{t_1} g_j(t,k)f_1(t,k)dt + C_{k,2}\int_0^{t_1} g_j(t,k)f_2(t,k)dt = \varphi_{j,k}, \quad j = 1,2, \tag{8}$$

визначник $\det\left\| \int_0^{t_1} g_j(t,k)f_q(t,k)dt \right\|_{j,q=1}^2$ якої позначимо через $\Delta(k,t_1)$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *в просторі* $C^2([0,T];W^\gamma_{\alpha,\beta})$ *необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta(k,t_1) \neq 0. \tag{9}$$

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення теореми 4.1 у [3, §4]. $\diamondsuit$

4. Надалі вважатимемо, що умова (9) справджується. Тоді для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ система (8) має єдиний розв'язок і на підставі (3) та (7) отримуємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} \frac{\exp(ik,x)}{\Delta(k,t_1)} \int_0^{t_1} (\varphi_{2,k}g_1(\tau,k) - \varphi_{1,k}g_2(\tau,k))F_k(t,\tau)d\tau. \tag{10}$$

Нехай $\lambda_{q,1}(k)$, $\lambda_{q,2}(k)$ – корені рівняння $L_q(\lambda,k) = 0$, $q = 1,2$. Відомо [6, с. 102], що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються такі оцінки:

$$\begin{gathered} -M_{q,2}(1+|k|^{\gamma_q}) \leq \operatorname{Re}\lambda_{q,j}(k) \leq M_{q,1}(1+|k|^{\gamma_q}), \qquad j,q = 1,2, \\ |\lambda_{q,j}(k)| \leq M_{q,3}(1+|k|^{\gamma_q}), \qquad j,q = 1,2, \end{gathered} \tag{11}$$

де $\gamma_q = \max\{N_{q,1}, N_{q,2}/2\}$, $q = 1, 2$,
$M_{q,1} = \max\{0; \sup\{\mathrm{Re}\,\lambda_{q,j}(k)/(1 + |k|^{\gamma_q}),\ j = 1, 2,\ k \in \mathbb{Z}^p\}\}$, $q = 1, 2$,
$M_{q,2} = -\min\{0; \inf\{\mathrm{Re}\,\lambda_{q,j}(k)/(1 + |k|^{\gamma_q}),\ j = 1, 2,\ k \in \mathbb{Z}^p\}\}$, $q = 1, 2$,
$M_{q,3} = \max\{0; \sup\{|\lambda_{q,j}(k)|/(1 + |k|^{\gamma_q}),\ j = 1, 2,\ k \in \mathbb{Z}^p\}\}$, $q = 1, 2$.
Нижче фігурують додатні сталі $C_j, j = 1, \ldots, 9$, які не залежать від k.

Теорема 2. *Нехай справджується умова* (9) *і нехай для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k, t_1)| \geq (1 + |k|)^{-\omega} \exp(-\delta|k|^{\gamma}), \quad \omega, \delta, \in \mathbb{R}, \quad \gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}. \tag{12}$$

Якщо $\varphi_j(x) \in W^{\gamma}_{\xi_j+\alpha+\omega,\eta+\beta+\delta}$, $\xi_j = 5\gamma_1 + j\gamma_2$, $j = 1, 2$, $\eta = (2M_{1,1} + M_{2,1})T$, *то в просторі* $C^2([0, T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який зображається рядом* (10) *і неперервно залежить від* $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$.

Д о в е д е н н я. На підставі нерівностей (11) з леми 12.7.7 у [10, с. 162] випливає, що виконуються такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]} |f_q^{(j-1)}(t, k)| \leq C_1 w_k(\gamma_1(2 + j - q); M_{1,1}T; \gamma_1), \quad j = 1, 2, 3, \quad q = 1, 2, \tag{13}$$

$$\max_{t\in[0,T]} |g_q(t, k)| \leq C_2 w_k(\gamma_2(3 - q); M_{2,1}T; \gamma_2), \qquad q = 1, 2. \tag{14}$$

З нерівностей (13), (14) та формули (6) отримуємо, що

$$\begin{aligned} &\max_{t\in[0,T]} \left| \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} \int\limits_0^{t_1} g_q(\tau, k) F_k(t, \tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq C_3 w_k(\gamma_2(3 - q); M_{2,1}T; \gamma_2) w_k(5\gamma_1; M_{1,1}T; \gamma_1), \qquad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{15}$$

З нерівностей (12), (13)–(15) та формули (10) випливає, що

$$\max_{t\in[0,T]} |u_k^{(q)}(t)| \leq C_4 \sum_{j=1}^{2} |\varphi_{j,k}| w_k(\xi_j + \omega; \delta + \eta; \gamma), \qquad q = 0, 1, 2. \tag{16}$$

Із формул (3), (16) та нерівності трикутника для норми дістаємо оцінку

$$\left\| u(t, x); C^2([0, T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta}) \right\| \leq \sum_{q=0}^{2} \sqrt{\sum_{|k|\geq 0} \max_{t\in[0,T]} |u_k^{(q)}(t)|^2 w_k^2(\alpha; \beta; \gamma)} \leq$$

$$\leq C_5 \sum_{j=1}^{2} \sqrt{\sum_{|k|\geq 0} |\varphi_{j,k}|^2 w_k^2(\xi_j + \alpha + \omega; \eta + \beta + \delta; \gamma)} = C_5 \sum_{j=1}^{2} \left\| \varphi_j; W^{\gamma}_{\xi_j+\alpha+\omega,\eta+\beta+\delta} \right\|,$$

з якої випливає доведення теореми. $\Diamond$

5. З'ясуємо, коли виконується нерівність (12).

Теорема 3. *Для майже всіх (щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_1 \in (0, T]$ *нерівність* (12) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\omega > 5(p + 2\gamma)$, $\delta \geq 2(M_{1,2} + M_{2,2})T$, $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Д о в е д е н н я. Легко перевірити, що визначник $\Delta(k, t_1)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, як функція змінної $t_1 \in [0, T]$ є розв'язком такої задачі Коші:

$$S\left(\frac{d}{dt_1}, k\right) \Delta(k, t_1) = 0, \quad \left.\frac{d^{j-1}\Delta(k, t_1)}{dt_1^{j-1}}\right|_{t_1=0} = 2\delta_{j,5}, \qquad j = 1, \ldots, 5,$$

$$\frac{d^5\Delta(k,t_1)}{dt_1^5}\Big|_{t_1=0} = -5(A_{1,1}(k)+A_{2,1}(k)),$$

де $S(\lambda,k)=\lambda(\lambda+A_{1,1}(k)+A_{2,1}(k))L_1(\lambda-\lambda_{2,1}(k),k)L_1(\lambda-\lambda_{2,2}(k),k)$.

Позначимо: $\mu_j(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, $j=1,\ldots,6$, – корені многочлена $S(\mu,k)$, $B_S(k)=1+\max\limits_{1\le j\le 6}|\mu_j(k)|$, $\Lambda_S(k)=\min\limits_{1\le j\le 6}\operatorname{Re}\mu_j(k)$, $\psi_S(k)=\max\limits_{t\in[0,T]}\exp(-\Lambda_S(k)t)$,

$$P_{S,\Delta}(k)=\max_{1\le j\le 6}\left\{B_S^{-j}(k)\left|d^{j-1}\Delta(k,t_1)/dt_1^{j-1}\big|_{t_1=0}\right|\right\}.$$

Зі структури коренів $\mu_j(k)$, $j=1,\ldots,6$, формул (11) і початкових умов для функції $\Delta(k,t_1)$ дістаємо, що

$$B_S(k)\le C_6(1+|k|^\gamma),\quad \Lambda_S(k)\ge -2(M_{1,2}+M_{2,2})(1+|k|^\gamma),$$

$$\psi_S(k)\le C_7\exp(2(M_{1,2}+M_{2,2})T|k|^\gamma),\;\; P_{S,\Delta}(k)\ge 2B_S^{-5}(k)\ge 2(C_6(1+|k|^\gamma))^{-5}.$$

Нехай $E_{\omega,\delta}(k)\equiv\{t_1\in[0,T]:\,|\Delta(k,t_1)|<w_k^{-1}(\omega;\delta;\gamma)\}$, $k\in\mathbb{Z}^p$. За лемою із [4] отримуємо, що для $\omega>5(p+2\gamma)$, $\delta\ge 2(M_{1,2}+M_{2,2})T$

$$\operatorname{mes}E_{\omega,\delta}(k)\le C_8B_S(k)\left(\frac{w_k^{-1}(\omega;\delta;\gamma)\psi_S(k)}{P_{S,\Delta}(k)}\right)^{1/5}\le$$

$$\le C_9(1+|k|)^\gamma\left(\frac{w_k^{-1}(\omega;\delta-2(M_{1,2}+M_{2,2})T;\gamma)}{(1+|k|)^{-5\gamma}}\right)^{1/5}\le$$

$$\le C_9(1+|k|)^{\gamma+(5\gamma-\omega)/5}\le C_9(1+|k|)^{-p-\varepsilon_1},\quad \varepsilon_1=(\omega-5(p+2\gamma))/5>0. \qquad (17)$$

З нерівності (17) випливає, що для $\omega>5(p+2\gamma)$, $\delta\ge 2(M_{1,2}+M_{2,2})T$ ряд $\sum\limits_{|k|\ge 0}\operatorname{mes}E_{\omega,\delta}(k)$ є збіжним. За лемою Бореля–Кантеллі [3, с. 17] міра Лебега в $\mathbb{R}$ множини тих чисел t_1 , які належать до нескінченної кількості множин $E_{\omega,\delta}(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, дорівнює нулеві. $\diamondsuit$

З теорем 2, 3 випливає наступне твердження про розв'язність задачі (1), (2) для майже всіх чисел $t_1\in(0,T]$.

Теорема 4. *Нехай* $\varphi_j(x)\in W^\gamma_{\xi_j+\alpha+\varepsilon,\eta+\beta}$, $j=1,2$, $\gamma=\max\{\gamma_1,\gamma_2\}$, $\eta=2(M_{1,1}+M_{2,1}/2+M_{1,2}+M_{2,2})T$, $\xi_j=j\gamma_2+5(p+\gamma_1+2\gamma)$, $j=1,2$, $\varepsilon>0$. *Для майже всіх (щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}$ *) чисел* $t_1\in(0,T]$ *у просторі* $C^2([0,T];W^\gamma_{\alpha,\beta})$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який зображається рядом* (10) *і неперервно залежить від* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

6. Наведемо результати, отримані у часткових випадках задачі (1), (2).

Теорема 5. *Якщо для кожного* $k\in\mathbb{Z}^p$ λ*-корені рівнянь* $L_q(\lambda,k)=0$, $q=1,2$, *є дійсними, то задача* (1) , (2) *у просторі* $C^2([0,T];W^\gamma_{\alpha,\beta})$ *не може мати більше одного розв'язку.*

Теорема 6. *Нехай для всіх* $k\in\mathbb{Z}^p$ *корені* $\lambda_{q,1}(k)$, $\lambda_{q,2}(k)$, $q=1,2$, *є додатними і* $A_{q,1}(k)\le -m_q|k|^{\gamma_q}$, *де* $m_q>0$, $q=1,2$. *Для довільного* $\nu>0$, *для всіх чисел* $t_1\ge\nu$, *для всіх векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$\Delta(k,t_1)\ge\frac{1}{2}\nu^2(t_1-\nu)^2\exp\left(\frac{\nu m_1|k|^{\gamma_1}+\nu m_2|k|^{\gamma_2}}{2}\right).$$

Теорема 7. *Нехай для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$ *корені* $\lambda_{q,1}(k)$, $\lambda_{q,2}(k)$, $q = 1, 2$, *є від'ємними. Для довільного* $t_1 \in (0, T]$ *для всіх векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$\Delta(k, t_1) \geq \frac{t_1^4}{12} \exp\big(-3TM_{1,2}(1+|k|^{\gamma_1}) - 3TM_{2,2}(1+|k|^{\gamma_2})\big).$$

Зауваження. Результати роботи можна перенести на випадок задач з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними високого порядку за змінною t.

1. *Виленц И. Л.* Классы единственности решения общей краевой задачи в слое для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1974. – № 3. – С. 195–197.
2. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Задача з розподіленими даними для рівнянь із частинними похідними // Тези доп. III Всеукр. наук. конф. «Нелінійні проблеми аналізу». – Івано-Франківськ, 2003. – С. 73.
3. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
4. *Симотюк М. М.* Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2002. – Вип. 7. – С. 96–107.
5. *Симотюк М. М., Медвідь О. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 92–101.
6. *Фаддеев Д. К., Сомінський І. С.* Збірник задач з вищої алгебри. – К.: Вища шк., 1971. – 316 с.
7. *Фардигола Л. В.* Влияние параметров на свойства решений интегральных краевых задач в слое // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 7. – С. 51–58.
8. *Фардигола Л. В.* Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральными условиями // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1546–1551.
9. *Фардигола Л. В.* Свойства T-устойчивости интегральной краевой задачи в слое // Теория функций, функ. анализ и их прил. – 1991. – № 55. – С. 78–80.
10. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. – М.: Мир, 1986. – Т. 2. – 456 с.
11. *Штабалюк П. И.* Почти–периодические решения дифференциальных уравнений гиперболического и составного типов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1984. – 146 с.

ЗАДАЧА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДАННЫМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Исследована корректность задачи с распределенными данными для линейных дифференциальных уравнений с частными производными с постоянными комплексными коэффициентами. Установлены условия существования и единственности решения рассматриваемой задачи. Доказаны метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, возникающих при построении решения задачи.

PROBLEM WITH DISTRIBUTED DATA FOR LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

The correctness of the problem with distributed data for linear partial differential equations with constant complex coefficients is investigated. The conditions of existence and uniqueness of solution of the problem are established. The metric theorems on estimations of small denominators of the problem are proved.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
03.10.03