УДК 517.95

П. Я. Пукач

ЗМІШАНА ЗАДАЧА В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Досліджується перша змішана задача для слабко нелінійного гіперболічного рівняння другого порядку в області $Q = \Omega \times (0,T)$, де $\Omega \subset \mathbb{R}_x^n$ – необмежена область. Розглянуто випадок зростання коефіцієнтів еліптичного оператора. Отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку в соболевських просторах локально інтегровних функцій з довільною поведінкою на нескінченності.

Вступ. Задачі для нелінійних гіперболічних рівнянь вигляду $u_{tt} - \Delta u + A|u|^\rho = f$, $\rho > 0$ в необмежених областях розглядали у багатьох працях [4, 6–12]. При цьому припускали обмеженість коефіцієнтів еліптичного оператора. Результати існування і єдиності розв'язку задач в необмежених областях у цих працях отримано за припущень про певну поведінку розв'язку, початкові дані та праву частину рівняння на нескінченності або без таких припущень. У роботі [2] вивчено змішану задачу для слабко нелінійної системи гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними. Зазначимо, що при обгрунтуванні відповідних результатів у цій праці використано певні ідеї праць [1, 5], у яких розглянуто задачі для еліптичних і параболічних рівнянь в необмеженій області.

Отримані у цій праці класи існування та єдиності узагальненого розв'язку змішаної задачі для нелінійного гіперболічного рівняння є соболєвськими просторами локально інтегровних функцій з довільною поведінкою на нескінченності. Припускається певний ріст коефіцієнтів еліптичного оператора рівняння. Аналогічні класи коректності розв'язку задач для напівлінійних параболічних та еліптичних рівнянь отримано в [1, 5].

1. Постановка задачі. Основні результати. В області $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}_x^n$, $0 < T < +\infty$, розглядаємо задачу

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + |u_t|^{p-2} u_t = f(x,t), \quad p > 2, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

$$u_t|_{t=0} = u_1(x), \tag{3}$$

$$u|_S = 0, \tag{4}$$

де $S = \partial\Omega \times (0,T)$ – бічна поверхня області Q. Стосовно області Ω припускаємо наступне:

1) Ω – необмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$;

2) $\Omega_R = \Omega \cap \{ x : |x| < R \}$ – зв'язна множина для довільного $R > 0$;

3) $\operatorname{dist}(\partial\Omega_{R_1}, \partial\Omega_{R_2}) > 0$ для довільних R_1 і R_2 таких, що $0 < R_1 < R_2$, причому $\bigcup\limits_{R>0} \Omega_R = \Omega$.

Позначимо далі $Q_{R,\tau} = \Omega_R \times (0,\tau)$, $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$ для довільних $R > 0$, $\tau \in (0,T]$, $S_R = \partial\Omega_R \times (0,T)$.

У цій праці використовуватимемо такі соболєвські простори функцій:

$$H_0^1(\Omega_R) = \left\{ u \in H^1(\Omega_R) : u|_{\partial\Omega_R} = 0 \right\}, \quad \|u\|^2_{H_0^1(\Omega_R)} = \int\limits_{\Omega_R} |\nabla u|^2 \, dx,$$

$$H^1_{0,\text{loc}}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in H^1(\Omega_R) \ \forall R > 0, \ u|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$L^r_{\text{loc}}(\overline{Q}) = \{ u \in L^r(Q_{R,T}) \ \forall R > 0 \}, \quad r \in (1, +\infty).$$

Означення. *Узагальненим* розв'язком задачі (1)–(4) називаємо функцію u, яка задовольняє умови (2), (4) та інтегральну тотожність

$$\int\limits_{Q_\tau} \left[-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + |u_t|^{p-2} u_t v - f v \right] dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} u_t(x,\tau) v(x,\tau) dx - \int\limits_{\Omega} u_1(x) v(x,0) dx = 0 \qquad (5)$$

для довільного $\tau \in (0,T]$ і для довільної функції v такої, що $\operatorname{supp} v$ – обмежена множина, $v \in L^2((0,T);\ H^1_{0,\text{loc}}(\overline{\Omega})) \cap L^p_{\text{loc}}(\overline{Q})$, $v_t \in L^2_{\text{loc}}(\overline{Q})$.

Стосовно коефіцієнтів правої частини рівняння (1) і початкових даних припускатимемо виконання таких умов.

(A) Функції a_{ij} належать до простору $C(\overline{\Omega})$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ для всіх $x \in \Omega$ і для довільних $i,j = 1,...,n$; $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0 |\xi|^2$, $a_0 > 0$, для довільного вектора $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$ і для всіх $x \in \Omega$; $|a_{ij}(x)| \leq M(1 + |x|^\alpha)$ при $|x| \to +\infty$, де $M > 0$, $0 \leq \alpha < 1 - \frac{(p-2)n}{2p}$, $i,j = 1,...,n$.

(F) $f \in L^q_{\text{loc}}(\overline{Q})$, $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(U) $u_0 \in H^1_{0,\text{loc}}(\overline{\Omega})$, $\quad u_1 \in L^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(F)**, **(U)**, $n < \frac{2p}{p-2}$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок* u *задачі* (1)–(4), *для якого*

$$u \in C([0,T]; H^1_{0,\text{loc}}(\overline{\Omega})), \quad u_t \in C([0,T]; L^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega})) \cap L^p_{\text{loc}}(\overline{Q}). \qquad (6)$$

Лема. *Нехай* u^1, u^2 *– узагальнені розв'язки задачі* (1)–(4) *та задачі, яка відрізняється від* (1)–(4) *лише тим, що у правій частині* (1) *замість* f *стоїть* $\overline{f} \in L^q_{\text{loc}}(\overline{Q})$ *відповідно. Тоді для довільних* τ, R, R_0 *таких, що* $0 < R_0 < R$, $\tau \in (0,T]$,

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \left|u_t^1 - u_t^2\right|^2 \Big|_{t=\tau} dx + C_1 \int\limits_{\Omega_{R_0}} \left|\nabla(u^1 - u^2)\right|^2 \Big|_{t=\tau} dx + C_2 \int\limits_{Q_{R_0,\tau}} \left|u_t^1 - u_t^2\right|^p dxdt \leq$$

$$\leq \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\beta \left(C_3 R^{n+(\alpha-1)\frac{2p}{p-2}} + C_4 \int\limits_{Q_{R,\tau}} \left|f - \overline{f}\right|^q dxdt \right), \qquad (7)$$

де $\beta > \frac{2p}{p-2}$ *– довільне число;* C_1, C_2, C_3, C_4 *– додатні сталі, які залежать лише від* n, p, β.

Д о в е д е н н я леми. Нехай $R > R_0 > 0$, $\tau \in (0,T]$ – довільні числа. Визначимо функцію φ так: $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{R^2-|x|^2}{R}, |x| \le R, \\ 0, |x| > R. \end{cases}$ Зауважимо, що для функції φ справджується наступна оцінка:

$$R - |x| \le \varphi(x) \le 2(R - |x|). \tag{8}$$

Нехай u^1, u^2 – узагальнені розв'язки задачі (1)–(4) та задачі (1)–(4), у правій частині рівняння (1) якої функція f замінена на $\overline{f} \in L^q_{\text{loc}}(\overline{Q})$. Покладемо далі $w = u^1 - u^2$ та здійснимо процедуру регуляризації, описану в [3, с. 238, 239].

Зафіксуємо $s_0, s_1 \in [0,T]$, $s_0 < s_1$. Нехай θ_k – неперервна кусково-лінійна функція на $[0,T]$, $\theta_k = 0$ при $t > s_1 - \frac{1}{k}$ і при $t < s_0 + \frac{1}{k}$; $\theta_k = 1$, якщо $s_0 + \frac{2}{k} < < t < s_1 - \frac{2}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Нехай ρ_l, $l = 1, 2, \ldots$, – регуляризуюча послідовність у просторі нескінченно диференційовних в $\mathbb{R}$ функцій з компактним носієм така, що $\rho_l(t) = \rho_l(-t)$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_l(t)dt = 1$, $\operatorname{supp} \rho_l \subset \left[-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right]$ для довільного $l \in \mathbb{N}$. Поклавши $v = ((\theta_k w_t) * \rho_l * \rho_l)\theta_k \varphi_R^\beta$, $\beta > \frac{2p}{p-2}$, віднімемо від інтегральної рівності для функцій u^1, f, що аналогічна до (5), відповідну інтегральну рівність для u^2, $\overline{f}$. На підставі певних викладок і перетворень, аналогічних до зроблених в [3, с. 238, 239], після граничного переходу при $l, k \to \infty$ отримаємо

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_R} \Big(|w_t|^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) w_{x_i} w_{x_j} \Big)\Big|_{t=\tau} \varphi^\beta \, dx + \int\limits_{Q_{R,\tau}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) w_{x_i} w_t (\varphi^\beta)_{x_j} dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_{R,\tau}} (|u_t^1|^{p-2} u_t^1 - |u_t^2|^{p-2} u_t^2)(u_t^1 - u_t^2)\varphi^\beta dxdt = \int\limits_{Q_{R,\tau}} (f - \overline{f}) w_t \varphi^\beta dxdt. \tag{9}$$

Оцінимо інтеграли рівності (9) при $\frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = 1$:

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_R} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) w_{x_i} w_{x_j} \Big|_{t=\tau} \varphi^\beta dx \quad \ge \quad \frac{a_0}{2} \int\limits_{\Omega_R} |\nabla w|^2 \Big|_{t=\tau} \varphi^\beta dx,$$

$$\int\limits_{Q_{R,\tau}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) w_{x_i} w_t (\varphi^\beta)_{x_j} dxdt \ \le M \int\limits_{Q_{R,\tau}} \sum_{i,j=1}^n w_{x_i} w_t \frac{\varphi^{\frac{\beta}{2}} \varphi^{\frac{\beta}{p}}}{\varphi^{\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{p}}} (\varphi^\beta)_{x_j} R^\alpha dxdt \le$$

$$\le M \Big(\int\limits_{Q_{R,\tau}} |\nabla w|^2 \varphi^\beta dxdt \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{Q_{R,\tau}} |w_t|^p \varphi^\beta dxdt \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int\limits_{Q_{R,\tau}} \sum_{j=1}^n \Big| \frac{(\varphi^\beta)_{x_j} R^\alpha}{\varphi^{\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{p}}} \Big|^{p_1} dxdt \Big)^{\frac{1}{p_1}} \le$$

$$\le \widetilde{C}_1 \delta_1 \int\limits_{Q_{R,\tau}} |\nabla w|^2 \varphi^\beta dxdt + \delta_2 \int\limits_{Q_{R,\tau}} |w_t|^p \varphi^\beta dxdt \ + \widetilde{C}_2 \int\limits_{Q_{R,\tau}} \frac{\beta \varphi^{(\beta-1)p_1} R^{\alpha p_1}}{\varphi^{\beta(p_1-1)}} dxdt \le$$

$$\le \widetilde{C}_1 \delta_1 T \int\limits_{\Omega_R} |\nabla w|^2 \varphi^\beta dx + \delta_2 \int\limits_{Q_{R,\tau}} |w_t|^p \varphi^\beta dxdt \ + \ \widetilde{C}_3 \int\limits_{Q_{R,\tau}} \varphi^{\beta - p_1} R^{\alpha p_1} dxdt \le$$

$$\le \widetilde{C}_1 \delta_1 T \int\limits_{\Omega_R} |\nabla w|^2 \varphi^\beta dxdt + \delta_2 \int\limits_{Q_{R,\tau}} |w_t|^p \varphi^\beta dxdt \ + \ \widetilde{C}_4 R^{\beta - \frac{2p}{p-2} + \frac{2p\alpha}{p-2} + n},$$

де δ_1, δ_2 – довільні достатньо малі додатні сталі, $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \widetilde{C}_3, \widetilde{C}_4$ – деякі додатні сталі, що залежать від n, p, β. Зауважимо, що в останній оцінці використано нерівність Юнга та властивість (8). Оцінимо наступні інтеграли рівності (9):

$$\int\limits_{Q_{R,\tau}} (|u_t^1|^{p-2} u_t^1 - |u_t^2|^{p-2} u_t^2)(u_t^1 - u_t^2)\varphi^\beta dxdt \ge 2^{2-p} \int\limits_{Q_{R,\tau}} |w_t|^p \varphi^\beta dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_{R,\tau}} (f-\overline{f})w_t\varphi^\beta dxdt \le C_\delta \int\limits_{Q_{R,\tau}} \left|f-\overline{f}\right|^q \varphi^\beta dxdt + \delta \int\limits_{Q_{R,\tau}} |w_t|^p \varphi^\beta dxdt,$$

де стала $C_\delta > 0$, а сталу $\delta > 0$ можна вибрати як завгодно малою.

Враховуючи наведені вище оцінки та використовуючи (8), отримаємо

$$(R-R_0)^\beta \Bigg(\int\limits_{\Omega_{R_0}} |w_t|^2\big|_{t=\tau} dx + \widetilde{C}_5 \int\limits_{\Omega_{R_0}} |\nabla w|^2\big|_{t=\tau} dx + \widetilde{C}_6 \int\limits_{Q_{R_0,\tau}} |w_t|^p \, dxdt \Bigg) \le$$

$$\le \widetilde{C}_7 R^{\beta+n+(\alpha-1)\frac{2p}{p-2}} + \widetilde{C}_8 R^\beta \int\limits_{Q_{R,\tau}} \left|f-\overline{f}\right|^q dxdt, \quad \widetilde{C}_5, \widetilde{C}_6, \widetilde{C}_7, \widetilde{C}_8 > 0.$$

З останньої нерівності легко отримати (7). Лему доведено. $\Diamond$

Д о в е д е н н я теореми 1. *Існування.* Виберемо послідовність областей $\{\Omega^k\}$ таку, що $\Omega^k \supset \Omega_k$, $\operatorname{dist}(\partial\Omega^k\backslash\partial\Omega,\ \partial\Omega^{k+1}\backslash\partial\Omega) > 0$, $\partial\Omega^k \subset C^1$, $k \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega^k = \Omega$, $\operatorname{dist}(O,\ \partial\Omega^k\backslash\partial\Omega) \ge k$, де O – початок координат. Позначимо $Q^k = \Omega^k \times (0,T)$, $S^k = \partial\Omega^k \times (0,T)$. Розглянемо в Q^k, $k \in \mathbb{N}$, задачу

$$u_{ktt} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{kx_i})_{x_j} + |u_{kt}|^{p-2} u_{kt} = f^k(x,t), \quad p > 2, \tag{10}$$

$$u_k|_{t=0} = u_0^k(x), \tag{11}$$

$$u_{kt}|_{t=0} = u_1^k(x), \tag{12}$$

$$u_k|_{S^k} = 0. \tag{13}$$

Зазначимо, що у рівнянні (10) функції $f^k(x,t) = \begin{cases} f(x,t), |x| \le k, \\ 0, |x| > k. \end{cases}$ Крім того, замість функції u_0 розглянуто u_0^k, де $u_0^k(x) = u_0(x)\cdot\xi_k(x)$, $\xi_k \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\xi_k(x) = \begin{cases} 1, |x| \le k-1, \\ 0, |x| > k, \end{cases}$ $0 \le \xi_k(x) \le 1$. Зрозуміло, що функції $u_0^k \in H_0^1(\Omega^k)$ і $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|u_0^k - u_0\right\|_{H_0^1(\Omega^k)} = 0$. Замість початкової функції u_1 розглянуто функцію u_1^k – звуження функції u_1 на Ω^k, $u_1^k \in L^2(\Omega^k)$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|u_1^k - u_1\right\|_{L^2(\Omega^k)} = 0$.

Під узагальненим розв'язком задачі (10)–(13) розуміємо функцію u_k, яка задовольняє (11), (13) та інтегральну тотожність, аналогічну до тотожності (5), що розглядається в області Q^k, причому функція v вибирається так, що

$$v \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega^k)) \cap L^p(Q^k), \quad v_t \in L^2(Q^k).$$

Зауважимо, що за умов теореми існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (10)–(13) в Q^k [3, с. 234].

Розглянемо тепер послідовність задач вигляду (10)–(13) для $k = 1, k = 2, ...$, доозначивши u_k нулем на $Q\backslash Q^k$. Отримаємо послідовність розв'язків задачі (1)–(4) в Q, яку для зручності знову позначимо через $\{u_k\}$. Покажемо, що $\{u_k\}$ є фундаментальною у просторі $C([0,T]; H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$ послідовністю, а $\left\{\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\}$ – фундаментальною в $C([0,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) \cap L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Розглянемо різницю $u_l - u_m$, $l, m \in \mathbb{N}$, $m > l$, в області $Q_{R,\tau}$, $l > R > R_0$, і використаємо доведену вище лему, врахувавши, що $f^l - f^m \equiv 0$ в $Q_{R,\tau}$. Аналогічно до (7) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \left(\left|\frac{\partial}{\partial t}(u_l - u_m)\right|^2 + C_1|\nabla(u_l-u_m)|^2 \right)\Big|_{t=\tau} dx + C_2 \int\limits_{Q_{R_0,\tau}} \left|\frac{\partial}{\partial t}(u_l-u_m)\right|^p dxdt \le$$

$$\leq \frac{1}{(R-R_0)^\beta} C_3 R^{\beta+n-\frac{2p}{p-2}} + C_4 \left\| u_0^l - u_0^m \right\|_{H_1^0(\Omega_{R_0})} + C_5 \left\| u_1^l - u_1^m \right\|_{L^2(\Omega_{R_0})} . \quad (14)$$

Оскільки $n < \frac{2p}{p-2}$, то з (14) за належного вибору достатньо великого $R > 0$

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big(\Big| \frac{\partial}{\partial t}(u_l - u_m) \Big|^2 + C_1 \Big| \nabla (u_l - u_m) \Big|^2 \Big) \Big|_{t=\tau} dx + C_2 \int\limits_{Q_{R_0,\tau}} \Big| \frac{\partial}{\partial t}(u_l - u_m) \Big|^p dxdt \leq \varepsilon$$

для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$. Отже, $\{u_k\}$ є фундаментальною послідовністю у просторі $C([0,T]; H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$, тобто

$$u_k \to u \quad \text{сильно в} \quad C([0,T]; H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) ,$$

а послідовність $\left\{ \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\}$ є фундаментальною у просторі $C([0,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) \cap L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, тобто

$$u_{k_t} \to u_t \quad \text{сильно в} \quad C([0,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) \cap L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) .$$

При цьому для функції u , очевидно, виконуються умови $(2), (4)$. Отже, u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) в сенсі інтегральної тотожності (5), для якого виконуються включення (6).

Єдиність отриманого розв'язку випливає з нерівності (14) при $R \to +\infty$, якщо розглянути два довільних розв'язки u^1 та u^2 задачі (1)–(4) і врахувати, що $n < \frac{2p}{p-2}$, $u^1\big|_{t=0} = u^2\big|_{t=0}$, $u_t^1\big|_{t=0} = u_t^2\big|_{t=0}$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Отримаємо тепер достатні умови існування та єдиності періодичного за просторовими змінними узагальненого розв'язку задачі (1)–(4).

Через $e^i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ позначимо n -вимірний вектор, i -та координата якого дорівнює 1, а всі решта є нулями, $i \in \{1, ..., n\}$.

Теорема 2. *Нехай виконуються усі умови теореми* 1, $\alpha = 0$ *та існують такі числа* $\zeta > 0$, $s \in \{1, ..., n\}$, *що:*
а) $x \pm \zeta e^s \in \Omega$ *для довільних* $x \in \Omega$ *;*
б) $a_{ij}(x + \zeta e^s) = a_{ij}(x)$ *для всіх* $x \in \Omega$, $i, j = 1, ..., n$ *;*
в) $f(x + \zeta e^s, t) = f(x, t)$ *для майже всіх* $(x, t) \in Q$ *;*
г) $u_0(x + \zeta e^s) = u_0(x)$, $u_1(x + \zeta e^s) = u_1(x)$ *для майже всіх* $x \in \Omega$.

Тоді задача (1)–(4) *має єдиний узагальнений розв'язок* u *, що є періодичною за змінною* x_s *з періодом* ζ *функцією.*

Д о в е д е н н я. На підставі теореми 1 існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (1)–(4).Оскільки функція $u(x+\zeta e^s, t)$, $(x, t) \in Q$ також є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4), то з єдиності узагальненого розв'язку відразу випливає, що $u(x + \zeta e^s, t) = u(x, t)$ для майже всіх $(x, t) \in Q$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

2. Висновки. У праці досліджено змішану задачу для нелінійного гіперболічного рівняння другого порядку, що моделює коливні процеси в середовищі з опором [12], в необмеженій за просторовими змінними області. Запропонований підхід, на відміну від вивчення аналогічної задачі в обмеженій області, вимагає додаткових умов на структуру області, модифікації методу Гальоркіна, методу компактності, спеціального вибору зрізаючої функції, дозволяє довести існування та єдиність узагальненого розв'язку змішаної задачі без обмежень на його поведінку при $|x| \to \infty$. Можливим видається в подальшому за допомогою викладеного у праці методу дослідити змішану задачу для загальної слабко нелінійної системи гіперболічних рівнянь другого порядку, нелінійного гіперболічного рівняння високого порядку та варіаційну нелінійну нерівність для гіперболічного оператора другого порядку в необмеженій за просторовими змінними області.

1. *Бокало Н. М.* Задача Фурье для полулинейных параболических уравнений произвольного порядка в неограниченных областях // Нелинейные граничные задачи. – 2000. – Вып. 10. – С. 9–15.
2. *Лавренюк С. П., Оліскевич М. О.* Метод Гальоркіна для гіперболічних систем першого порядку з двома незалежними змінними // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 10. – С. 1356–1370.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 587 с.
4. *Agre K., Rammaha M. A.* Global solutions to boundary value problems for a nonlinear wave equation in high space dimensions// Differ. and Integral Equat. – 2001. – **14**. – P. 1315–1331.
5. *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1989. – **106**, No. 3. – P. 217–241.
6. *Carpio A.* Existence of global solutions to some nonlinear dissipative wave equations // J. Math. Pures Appl. – 1994. – **73**, No. 5. – P. 471–488.
7. *D'Ancona P., Manfrin R.* A class of locally solvable semilinear equations of weakly hyperbolic type// Ann. mat. pura ed appl. – 1995. – **168**. – P. 355–372.
8. *Dragieva N.A.* A hyperbolic equation with two space variables with strong nonlinearity // Godishnik Vish. Uchebn. Zaved. Prilozhna Mat. – 1987. – **23**, No. 4. – P. 95–106.
9. *Georgiev V., Todorova G.* Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and sourse terms // J. Differ. Equat. – 1994. – **109**. – P. 295–308.
10. *Li M.-R., Tsai L.-Y.* Existence and nonexistence of global solutions of some system of semilinear wave equations// Nonlinear Anal. – **54.** – 2003. – P. 1397–1415.
11. *Pecher H.* Sharp existence results for self – similar solutions of semilinear wave equations // Nonlinear Differ. Equat. and Appl. – 2000. – **7**. – P. 323–341.
12. *Vittilaro E.* Global nonexistence theorems for a class of evolution equation with dissipation // Arch. Ration. Mech. and Anal. – **149**. – 1999, No. 2.– P. 155–182.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВОЗРАСТАЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Работа посвящена исследованию первой смешанной задачи для слабо нелинейного гиперболического уравнения второго порядка в области $Q = \Omega \times (0,T)$, *где* $\Omega \subset \mathbb{R}_x^n$ – *неограниченная область. Рассмотрен случай возрастания коэффициентов эллиптического оператора. Получены условия существования и единственности обобщенного решения в соболевских пространствах локально интегрируемых функций с произвольным поведением на бесконечности.*

MIXED PROBLEM IN UNBOUNDED DOMAIN FOR WEAKLY NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATION WITH GROWING COEFFICIENTS

The paper is devoted to investigation of the first mixed problem for weakly nonlinear hyperbolic equation of the second-order in the domain $Q = \Omega \times (0,T)$, *where* $\Omega \subset \mathbb{R}_x^n$ *is the unbounded domain. We study the case of growth of elliptic operator coefficients. Conditions of existence and uniqueness of the generalized solution in the Sobolev spaces of local integrable functions with arbitrary behavior at infinity have been obtained.*

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
16.10.03