УДК 517.956

І. Д. Пукальський

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ ВИРОДЖЕННЯМИ

У просторах класичних функцій зі степеневою вагою доведено існування і єдиність розв'язку задачі Коші для нерівномірно параболічних рівнянь без обмеження на степеневий порядок виродження коефіцієнтів. Встановлено оцінку розв'язку задачі у відповідних просторах.

Вступ. Вивчення задачі Коші для параболічних рівнянь проводилось багатьма математиками. Зокрема, в монографіях [2, 4] побудовано фундаментальні матриці розв'язків задачі Коші у випадку гладких коефіцієнтів та зі степеневими особливостями обмеженого порядку.

У цій роботі встановлено розв'язність у просторах класичних функцій зі степеневою вагою задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння без обмеження на степеневий порядок особливості.

1. Постановка задачі та основний результат. Розглянемо в області $\Pi = [0,T)\times\mathbb{R}^n$ задачу Коші для параболічного рівняння з дійсними коефіцієнтами

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[D_t - \sum_{|k|=2b} A_k(t,x)D_x^k - \sum_{|k|<2b} a_k(t,x)D_x^k\right] u(t,x) = f(t,x), \qquad (1)$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad (2)$$

$$D_x^k = D_{x_1}^{k_1}\dots D_{x_n}^{k_n}, \quad |k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

Порядок особливості коефіцієнтів оператора L будуть характеризувати функції: $s_1(q_1,t) = |t-t^{(0)}|^{q_1}$, якщо $|t-t^{(0)}| \le 1$, $s_1(q_1,t) \equiv 1$, якщо $|t-t^{(0)}| \ge 1$; $s_2(q_2,x) = |x-x^{(0)}|^{q_2}$, якщо $|x-x^{(0)}| \le 1$, $s_2(q_2,x) \equiv 1$, якщо $|x-x^{(0)}| \ge 1$; $|x-x^{(0)}| = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(0)})^2\right]^{1/2}$; $s(q;P) = s_1(q_1,t)s_2(q_2,x)$.

Нехай $\overline{\Omega}$ – довільна замкнена підобласть Π; $\Omega_0 = \{(t^{(0)},x), t^{(0)}\in[0,T], x\in\overline{\Omega}\} \cup [(t,x), x = x^{(0)}, t\in[0,T)]$; $P_\nu(t^{(\nu)},x^{(\nu)})$, $P_3(t^{(1)},x^{(2)})$ – довільні точки з Ω.

Позначимо через $C^{m+\alpha}(\gamma,\beta;q;\Pi)$ множину функцій $u(t,x)$, які визначені в $\overline{\Omega}$, мають неперервні частинні похідні в області $\Omega_1 \equiv \Omega\setminus\Omega_0$ вигляду $D_t^jD_x^ku$, $2bj+|k|\le m$, для яких є скінченною норма

$$\|u;\gamma,\beta;q;\Pi\|_{m+\alpha} = \|u;\gamma,\beta;q;\Pi\|_m + [|u;\gamma,\beta;q;\Pi|]_{m+\alpha} =$$

$$= \sup_{P\in\overline{\Omega}} \sum_{2bj+|k|\le m} s((2bj+q)\gamma+|k|(\gamma-\beta);P)|D_t^jD_x^ku(P)| + \sum_{2bj+|k|=m}\left\{\sup_{P_1,P_3\in\overline{\Omega}} s((2bj+q)\gamma+\right.$$

$$+(|k|+\alpha)(\gamma-\beta);\widetilde{P}_1)|x^{(1)}-x^{(2)}|^{-\alpha}|D_t^jD_x^ku(P_1) - D_t^jD_x^ku(P_3)| +$$

$$\left. + \sup_{P_2,P_3\in\overline{\Omega}} s((2bj+q+\alpha)\gamma+|k|(\gamma-\beta);\widetilde{P}_2)|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2b}}|D_t^jD_x^ku(P_2) - D_t^jD_x^ku(P_3)|\right\},$$

$$S(r,\widetilde{P}_\nu) = \min(s(r,P_\nu), s(r,P_3)),$$

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $\gamma_\nu \geq 0$, $\beta_\nu \in (-\infty, \infty)$, $\nu = 1,2$, $\alpha \in (0,1)$, $C^\alpha(\alpha_{|k|}, \Pi)$ – множина функцій $v_k(t,x)$, визначених в $\overline{\Omega}$, для яких є скінченною норма

$$|v_k; \alpha_{|k|}; \Pi|_\alpha = \sup_{P \in \overline{\Omega}} s(\alpha_{|k|}, P)|v_k(P)| + \sup_{P_1, P_3 \in \overline{\Omega}} s(\alpha_{|k|}, P) s_2(\alpha, \widetilde{x}) |x^{(1)} - x^{(2)}|^{-\alpha} \times$$

$$\times |v_k(P_1) - v_k(P_3)| + \sup_{P_2, P_3 \in \overline{\Omega}} s(\alpha_{|k|}; P) s_1\left(\frac{\alpha}{2b}, \widetilde{t}\right) |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2b}} |v_k(P_2) - v_k(P_3)|,$$

$$\alpha_{|k|} = (\alpha_{|k|}^{(1)}, \alpha_{|k|}^{(2)}).$$

Нехай для задачі (1), (2) виконуються умови:

а) коефіцієнти $a_k(t,x) \in C^\alpha(\alpha_{|k|}, \Pi)$, $A_k(t,x) \in C^\alpha(2b\beta; \Pi)$ і виконується умова рівномірної параболічності [4, с. 9] для рівняння

$$\left[D_t - s(2b\beta; P) \sum_{|k|=2b} A_k(P) D_x^k \right] u(P) = f_1(P);$$

б) функції $f(t,x) \in C^\alpha(\gamma, \beta; 2b; \Pi)$, $\varphi(x) \in C^{2b+\alpha}(\gamma^{(0)}, \beta^{(0)}; 0; \mathbb{R}^n)$, $\gamma^{(0)} = (0, \gamma_2)$, $\beta^{(0)} = (0, \beta_2)$, $\gamma_\nu = \max\left(1 + \beta_\nu, \max\limits_{|k| \leq 2b-1} \dfrac{\alpha_{|k|}^{(\nu)} - |k|\beta_\nu}{2b - |k|}\right)$, $\nu = 1,2$.

Справджується така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1), (2) *виконуються умови* ***а***), ***б***). *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *для якого є правильною нерівність*

$$\|u; \gamma, \beta; 0; \Pi\|_{2b+\alpha} \leq c\Big(\|f; \gamma, \beta; 2b; \Pi\|_\alpha + \|\varphi; \gamma^{(0)}, \beta^{(0)}; 0; \mathbb{R}^n\|_{2b+\alpha} \Big), \tag{3}$$

де c *залежить від* n, α, T *і норми коефіцієнтів оператора* L.

2. Оцінки розв'язку задачі Коші для рівнянь з гладкими коефіцієнтами. Позначимо через $\Pi_m = \Big\{(t,x) \in \Pi,\ s_1(1,t) \geq m_1^{-1},\ s_2(1,x) \geq m_2^{-1},\ m_1 \geq 1,\ m_2 \geq 1\Big\}$ зростаючу послідовність областей, яка при $m_\nu \to \infty$ збігається до Π, $Q_m = \{x, s_2(1,x) \geq m_2^{-1}\}$, $\Gamma_m = (0,T) \times \partial Q_m$. Розглянемо задачу Коші для параболічного рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) = \left[D_t - \sum_{|k|=2b} B_k(t,x) D_x^k - \sum_{|k| \leq 2b-1} b_k(t,x) D_x^k \right] u_m(t,x) = F(t,x), \tag{4}$$

$$u_m(0,x) = \varphi_1(x). \tag{5}$$

Тут $B_k(t,x) = A_k^{(1)}(t,x)$, $b_k(t,x) = a_k^{(1)}(t,x)$, $F(t,x) = f_1(t,x)$, $\varphi_1(x) = \varphi(x)$, якщо $(t,x) \in \Pi_m$. Для $(t,x) \in \Pi \setminus ((0,T) \times Q_m)$ коефіцієнти $B_k(t,x)$, $b_k(t,x)$ і функції $\varphi_1(x)$, $F(t,x)$ є розв'язками внутрішньої задачі Діріхле

$$D_t u = \Delta u, \quad u(0,x) = 0, \qquad u|_{\Gamma_m} = g(t,x),$$

де, наприклад, для $b_k(t,x)$ беремо $g(t,x) = a_k^{(1)}(t,x)|_{\Gamma_m}$. Функції $A_k^{(1)}(t,x)$, $a_k^{(1)}(t,x)$, $f_1(t,x)$ в області $\Pi^{(0)} = \{(t,x), s_1(1,t) \leq m_1^{-1}, x \in Q_m\}$ визначаються таким чином: $a_k^{(1)}(t,x) = \min\{a_k(t,x), a_k(m_1^{-1}, x)\}$ для $t^{(0)} \in [0, m_1^{-1}]$,

$x \in D_m$ і $a_k^{(1)}(t,x) = \min\Big(a_k(t,x)\,,\ \frac{m_1(t^{(0)}-t)+1}{2} a_k(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \ \frac{m_1(t-t^{(0)})+1}{2} \times$ $\times a_k(t^{(0)} + m_1^{-1}, x)\Big)$, $t^{(0)} \geq m_1^{-1}$.

Введемо в просторі $C^{2b+\alpha}(\Pi)$ норму $\|u_m;\gamma,\beta;q;\Pi\|_{2b+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка визначається так само, як норма $\|u;\gamma,\beta;q;\Pi\|_{2b+\alpha}$, тільки замість функцій $s_1(q_1,t)$, $s_2(q_2,x)$ беремо $d_1(q_1,t) = \min(s_1(q_1,t), m_1^{-q_1})$ для $q_1 > 0$, $d_1(q_1,t) = \max(s_1(q_1,t), m_1^{-q_1})$ для $q_1 < 0$, $d_2(q_2,x) = \min(s_2(q_1,x), m_2^{-q_2})$ для $q_2 > 0$, $d_2(q_2,x) = \max(s_2(q_2,t), m_2^{-q_2})$ для $q_2 < 0$.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* ***а)*** *і* ***б)****, то для розв'язку задачі* (4), (5) *є правильною нерівність*

$$\|u_m;\gamma,\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha} \leq c(\|F;\gamma,\beta;2b;\Pi\|_\alpha + \|\varphi_1;\gamma^{(0)},\beta^{(0)};0;\mathbb{R}^n\|_{2b+\alpha}), \tag{6}$$

де c *не залежить від* m_1, m_2.

Нерівність (6) одержуємо за методикою, наведеною в роботі [3]. З означення норм випливає існування в Π точок $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(2)})$, $P_3(t^{(1)},x^{(2)})$, для яких справджується одна із нерівностей:

$$\frac{1}{2}[|u_m;\gamma,\beta;0;\Pi|]_{2b+\alpha} \leq E_1 \equiv \sum_{2bj+|k|=2b} d(2bj\gamma + (|k|+\alpha)(\gamma-\beta);\widetilde{P_1})|x^{(1)} - x^{(2)}|^{-\alpha} \times$$
$$\times |D_t^j D_x^k u_m(P_1) - D_t^j D_x^k u_m(P_3)|;$$
$$\frac{1}{2}[|u_m;\gamma,\beta;0;\Pi|]_{2b+\alpha} \leq E_2 \equiv \sum_{2bj+|k|=2b} d(|k|(\gamma-\beta) + (2bj+\alpha)\gamma;\widetilde{P}_2)|t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2b}} \times$$
$$\times |D_t^j D_x^k u_m(P_2) - D_t^j D_x^k u_m(P_3)|,$$

$d(\tau,\widetilde{P}_\nu) = \min(d(\tau;P_\nu), d(\tau,P_3))$, $\nu = 1,2$.

Розглянемо випадок $|x^{(1)} - x^{(2)}| \leq \rho d(\gamma-\beta;\widetilde{P}_1) \equiv T_2$ або $|t^{(1)} - t^{(2)}| \leq$ $\leq \rho^{2b} d(2b\gamma;\widetilde{P}_2) \equiv T_1$. Нехай $V = \{(t,x), |t-t^{(1)}| \leq T_1, |x - x^{(1)}| \leq T_2\}$. Вважаємо, що $\widetilde{P} \equiv P_1(t^{(1)},x^{(1)})$. У задачі (4), (5) виконаємо заміну $u_m(t,x) = v_m(t,y)$, $y_i = d(\beta;P_1)x_i$, $i = 1,n$. Тоді функція $W_m(t,y) = v_m(t,y)\mu(t,y)$ задовольняє задачу Коші

$$\left[D_t - d(2b\beta;P_1)\sum_{|k|=2b} B_k(P_1)D_x^k\right] W_m = d(2b\beta;P_1)\sum_{|k|=2b} B_k(P_1)\sum_{|\lambda|\leq|k|-1} C_{|k|}^{|\lambda|} \times$$
$$\times D_y^{k-\lambda}\mu D_y^\lambda v_m + v_m D_t\mu + F_2(t,Y)\mu(t,y) \equiv F_3(t,y), \tag{7}$$
$$W_m(0,y) = \varphi_1(Y)\mu(0,y) \equiv \varphi_2(y), \tag{8}$$

де

$$F_2(t,Y) = d(2b\beta;P_1)\sum_{|k|=2b}[B_k(t,y) - B_k(P_1)]D_y^k v_m +$$
$$+ \sum_{|k|\leq 2b-1} d(|k|\beta;P_1)b_k(t,y)D_y^k v_m + F(t,Y),$$

$$\mu(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y) \in H_{1/4}, \quad |D_t^j D_x^k \mu(t,y)| \leq c_{kj} d^{-1}((2bj+|k|)\gamma;P_1), \\ 0, & (t,y) \in H_{3/4}, \quad 0 \leq \mu(t,y) \leq 1\,, \end{cases}$$

$$H_\eta = \{(t,y), |t - t^{(1)}| \leq \eta T_1, |y - y^{(1)}| \leq \eta d(\gamma,P_1), y^{(1)} = d(\beta;P_1)x^{(1)}\},$$
$$Y = (d^{-1}(\beta;P_1)y_1, \ldots, d^{-1}(\beta;P_1)y_n)\,.$$

Коефіцієнти рівняння (7) обмежені сталими, які не залежать від P_1. Тому на підставі теореми 4.1. з [2, с. 41] для довільних точок $M_1(\tau^{(1)},\xi^{(1)})$ і $M_2(\tau^{(2)},\xi^{(2)}) \in N_{1/4}$ є правильною нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)|D_\tau^j D_\xi^k v_m(M_1) - D_\tau^j D_\xi^k v_m(M_2)| \leq c(\|F_3\|_{C^\alpha(N_{1/4})}+$$
$$+\|\varphi_2\|_{C^{2b+\alpha}(N_{1/4}\cap(t=0))}),$$

де $d(M_1,M_2)$ – параболічна віддаль між M_1, M_2, $2bj+|k|=2b$.

Враховуючи властивості функції $\mu(t,y)$ та означення простору $C^{2b+\alpha}(\gamma,\beta;0;\Pi)$, знаходимо

$$E_i \leq c(n^{2b}\rho^\alpha + \varepsilon^\alpha(n+2))[|u_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}|]_{2b+\alpha} + c_2(\|F;\gamma,\beta;2b;\Pi\|_\alpha+$$
$$+\|\varphi_1;\gamma^{(0)};\beta^{(0)};0;\mathbb{R}^n\|_{2b+\alpha} + \sup_{V_{3/4}}|u_m|).$$

У випадку $|x^{(1)}-x^{(2)}| \geq T_2$ або $|t^{(1)}-t^{(2)}| \geq T_1$ маємо

$$E_i \leq \rho^\alpha[|u_m;\gamma,\beta;0;\Pi|]_{2b+\alpha} + c\sup_{\overline{\Omega}}|u_m|.$$

Вибираючи ρ і ε достатньо малими, одержимо

$$\|u_m;\gamma,\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha} \leq c(\|F;\gamma,\beta;2b;\Pi\|_\alpha + \|\varphi_1;\gamma^{(0)};\beta^{(0)};0;\mathbb{R}^n\|_{2b+\alpha} + \sup_{\overline{\Omega}}|u_m|).$$

Для знаходження оцінки $|u_m|_\Pi = \sup_{\overline{\Omega}}|u_m|$ використаємо методику доведення зауваження з роботи [1, с. 79]. Покажемо, що

$$\|u_m\| \leq c(\|Lu_m;\gamma,\beta;2b;\Pi\|_\alpha + \|u_m(0,x);\gamma;\beta;0;\mathbb{R}^n\|_{2b+\alpha}). \tag{9}$$

Нехай оцінка (9) не виконується. Тоді існує послідовність $V_i \in C^{2b+\alpha}(\Pi)$ таких, що $|V_i|_\Pi = 1$, $V_i(0,x)=0$ і L_1V_i прямує до нуля для відповідних V_i, коли $i\to\infty$. Із (9) випливає, що норми $|V_i;\gamma,\beta;0;\Pi|_{2b+\alpha}$ рівномірно обмежені. Тоді існує підпослідовність $V_{r(i)}$, які при $r(i)\to\infty$ збігається до розв'язку $V \in C^{2b+\alpha}(\Pi)$ однорідної задачі Коші. Оскільки розв'язок задачі Коші (4), (5) єдиний при кожному фіксованому m_1, m_2, то $V=0$, що суперечить рівності $|V|_\Pi = 1$. $\diamondsuit$

Д о в е д е н н я теореми 1. Права частина нерівності

$$\|u_m;\gamma,\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha} \leq c(\|F;\gamma,\beta;2b;\Pi\|_\alpha + \|\varphi_1;\gamma^{(0)};\beta^{(0)};0;\mathbb{R}^n\|_{2b+\alpha}) \leq$$
$$\leq c(\|f;\gamma,\beta;2b;\Pi\|_\alpha + \|\varphi;\gamma^{(0)};\beta^{(0)};0;\mathbb{R}^n\|_{2b+\alpha})$$

не залежить від m_1, m_2, а послідовності

$$W_{kj}^{(m)} = \{d(2bj\gamma+|k|(\gamma-\beta);P)|D_t^j D_x^k u_m(P)|, 2bj+|k|\leq 2b\}$$

рівномірно обмежені та одностайно неперервні в будь-якій області $\overline{\Omega}\subset\Pi$. За теоремою Арцела існують підпослідовності $\{W_{kj}^{m(j)}\}$, які рівномірно збіжні в $\overline{\Omega}$ до W_{kj}. Переходячи до границі при $m(i)\to\infty$ у задачі (4), (5), одержимо, що $u(t,x)\equiv W_{0,0}$ – єдиний розв'язок задачі (1), (2) і $u(t,x)\in C^{2b+\alpha}(\gamma,\beta;0;\Pi)$. $\diamondsuit$

Теорема 3. *Нехай виконується умова* ***a****),* $f(t,x)\in C^\alpha(\gamma,\beta;0;\Pi)$, $\varphi(x)\in C^{2b+\alpha}(\gamma^{(0)},\beta^{(0)};0;\mathbb{R}^n)$. *Тоді єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *в просторі* $C^{2b+\alpha}(\gamma,\beta;0;\Pi)$ *визначається інтегралами Стілтьєса з борелівською мірою*

$$u(t,x) = \int_\Pi \Gamma_1(t,x;d\tau,d\xi)f(\tau,\xi) + \int_{\mathbb{R}^n}\Gamma_2(t,x;d\xi)\varphi(\xi). \tag{10}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $C^{\alpha}(\gamma,\beta;0;\Pi) \subset C^{\alpha}(\gamma,\beta;2b;\Pi)$, то для $f(x) \in \in C^{\alpha}(\gamma,\beta;0;\Pi)$ справджується нерівність

$$\|f;\gamma,\beta;2b;\Pi\|_{\alpha} \le c\|f;\gamma,\beta;0;\Pi\|_{\alpha}.$$

За умов теореми для розв'язку задачі (1), (2) маємо

$$\|u;\gamma,\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha} \le c(\|f;\gamma,\beta;0;\Pi\|_{\alpha} + \|\varphi;\gamma^{(0)},\beta^{(0)};0;\mathbb{R}^n\|_{2b+\alpha}). \qquad (11)$$

Розглядаючи $u(t,x)$ при фіксованих (t,x) як лінійний неперервний функціонал $\Phi(f,\varphi)$ на нормованому просторі $C_{\alpha} = C^{\alpha}(\gamma,\beta;0;\Pi)\times C^{2b+\alpha}(\gamma^{(0)},\beta^{(0)};0;\mathbb{R}^n)$ з нормою, що дорівнює правій частині нерівності (11), на підставі теореми Рісса, оскільки $C_{\alpha} \subset C(\Pi)$, можемо вважати, що $u(t,x)$ породжує борелівську міру $\Gamma(t,x;Z)$, яка визначена на σ-алгебрі підмножини Z множини Π, включаючи Π і всі її підмножини такі, що значення функціонала визначається формулою (10). $\diamondsuit$

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 208 с.
2. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – К.: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
3. *Пукальський І. Д.* Нелокальна задача Неймана для параболічного рівняння з виродженням // Укр. мат. журн. – 1999. – **31**, № 9. – С. 1232–1244.
4. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СТЕПЕННЫМИ ВЫРОЖДЕНИЯМИ

В пространствах классических функций со степенным весом доказаны существование и единственность решения задачи Коши для неравномерно параболических уравнений без ограничения на степенной порядок вырождения коэффициентов. Найдена оценка решения задачи в соответствующих пространствах.

CAUCHY PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH POWER DEGENERATION

The existence and uniqueness of Cauchy problem for irregular parabolic equations without limitation on the power order of the coefficient degeneration have been proved in the spaces of classical functions with the power weight. Estimation of the solution to the problem in the corresponding spaces has been found.

Чернів. нац. ун-т
ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
01.09.03