УДК 517.956.4

Г. С. Пасічник

ПРО ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ ДИСИПАТИВНИХ $\overrightarrow{2b}$-ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Наведено результати про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші та розв'язність задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем.

Вивчаючи розв'язність задачі Коші для параболічних за Петровським систем зі зростаючими при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами, С. Д. Ейдельман увів поняття дисипативності системи. Дисипативні системи узагальнюють рівняння вигляду $\partial_t u = \Delta u - (D(x))^2 u$, де Δ – оператор Лапласа, а функція $D : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$ необмежено зростає при $|x| \to \infty$. Для дисипативних параболічних за Петровським систем досліджена фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) і розв'язність задачі Коші [6, 7]. При цьому використовуються два набори умов на коефіцієнти системи та характеристику дисипації. У першому наборі накладаються достатньо жорсткі умови на гладкість коефіцієнтів, у другому ж наборі – мінімальні вимоги щодо гладкості коефіцієнтів, але накладаються додаткові умови на характеристику дисипації.

У цій статті розглядаються дисипативні $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи [3], причому використовується другий набір умов. Для таких сисистем одержано оцінки ФМРЗК та її похідних, досліджено розв'язність задачі Коші в спеціальних класах функцій. Зазначимо, що у працях [2–4] наведені результати з першим набором умов. Результати статті частково анонсовані в [3, 5].

1. Нехай $n, b_1, \ldots, b_n, N$ – задані натуральні числа; $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, \ldots, 2b_n)$; s – найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $q_j \equiv 2b_j/(2b_j - 1)$, $1 \le j \le n$, $q'' \equiv \max\limits_{1 \le j \le n} q_j$; $M \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} (s/b_j)$; T – задане додатне число. Користуватимемось ще такими позначеннями: $||k|| \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} (s/b_j) k_j$, якщо k – мультиіндекс; $p(x, y) \equiv (\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - \xi_j|^{2/m_j})^{1/2}$, $q(x, y) \equiv (\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^{q_j})^{1/q''}$ – спеціальні відстані між точками x і y з $\mathbb{R}^n$; $\Pi_H \equiv \{(t, x) | t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$; I – одинична матриця порядку N.

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$L(t, x, \partial_t, \partial_x) u(t, x) \equiv \left(I \partial_t - \sum_{||k|| \le 2s} a_k(t, x) \partial_x^k \right) u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \qquad (1)$$

де a_k, $||k|| \le 2s$, – квадратні матриці порядку N.

Припускатимемо, що виконуються наступні умови на коефіцієнти a_k, $||k|| \le 2s$.

Б $_1$). Система (1) є дисипативною $\overrightarrow{2b}$-параболічною [3] у $\Pi_{[0,T]}$ з характеристикою дисипації D.

Б $_2$). $\exists\, C > 0$, $\exists\, \lambda \in (0, 1]$ $\forall \{(t, x), (t, y)\} \subset \Pi_{[0,T]}$ $\forall k$, $||k|| \le 2s$: $|a_k(t, x) - a_k(t, y)| \le C(p(x, y))^\lambda ((D(x))^{2s - ||k||} + (D(y))^{2s - ||k||})$; функції $b_k(t, x) \equiv a_k(t, x)(D(x))^{||k|| - 2s}$, $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$, $||k|| \le 2s$, обмежені та неперервні за t рівномірно щодо $x \in \mathbb{R}^n$.

Б $_3$). Характеристика дисипації D задовольняє такі умови:

1) $\exists C > 0 \quad \forall \{x, y\} \subset \mathbb{R}^n, \ q(x, y) \le 1 : \ D(x) \le C D(y)$;

2) $\exists C > 0 \quad \forall \{x,y\} \subset \mathbb{R}^n$, $q(x,y) > 1$:

$$D(x) \le C \exp\{\varepsilon \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| \, (D(y))^{s/b_j}\} ,$$

де ε – достатньо мале додатне число.

Б $_4$). Функція $g : \mathbb{R}^n \to [1,\infty)$ зв'язана з характеристикою дисипації D умовою: g має похідні $\partial_x^k g$, $0 < ||k|| \le 2s$, для яких справджуються нерівності

$$|\partial_x^k g(x)| \le C\eta (D(x))^{||k||},$$
$$|\partial_x^k g(x) - \partial_y^k g(y)| \le C\eta (p(x,y))^{\lambda}((D(x))^{||k||} + (D(y))^{||k||}),$$
$$\{x,y\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad 0 < ||k|| \le 2s,$$

де $C > 0$, λ з умови **Б** $_2$, η – достатньо мале додатне число.

Б $_5$). Для системи (1) існує спряжена за Лагранжем система, для якої виконуються умови **Б** $_1$ і **Б** $_2$.

2. Наведемо результати дослідження ФМРЗК для системи (1) за вказаних вище припущень.

Теорема 1. *Нехай для системи* (1) *виконуються умови* **Б** $_1$ –**Б** $_3$. *Тоді для неї існує ФМРЗК* $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, *для якої справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C_l((t-\tau)^{-(M+||k||)/(2s)} \exp\{-c(t-\tau)(D(\xi))^{2s}\}+$$
$$+(D(\xi))^{-l})E_c(t-\tau,x-\xi), \qquad ||k|| < 2s, \tag{2}$$

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C_l((t-\tau)^{-(M+||k||)/(2s)} \exp\{-cB(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\}+$$
$$+(D(\xi))^{-l})E_c(t-\tau,x-\xi)(1+(D(x))^{2s} + \exp\{\varepsilon M(t-\tau)(D(x))^{2s}\}), \quad ||k|| = 2s,$$
$$0 \le \tau < t \le T, \qquad \{x,\, \xi\}, \tag{3}$$

де l *– довільне фіксоване додатне число;* C_l, C , c *– додатні сталі;* $E_c(t,x) \equiv \equiv \exp\{-c \sum_{j=1}^{n} t^{1-q_j}|x_j|^{q_j}\}$. *Крім того, є правильними оцінки*

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C \sum_{j=0}^{||k||} (t-\tau)^{-(M+||k||-j)/(2s)}(D(x))^j \times$$
$$\times E_c(t-\tau,x-\xi) \exp\{g(x)-g(\xi)\}, \quad ||k|| < 2s, \tag{4}$$

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C_l \sum_{j=0}^{||k||} ((t-\tau))^{-(M+||k||-j)/(2s)} + (D(\xi))^{-l}(D(x))^j \times$$
$$\times E_c(t-\tau,x-\xi)(1+(D(x))^{2s} + \exp\{\epsilon M(t-\tau)(D(x))^{2s}\}) \exp\{g(x)-g(\xi)\},$$
$$||k|| = 2s, \qquad 0 \le \tau < t \le T, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

де g *– будь-яка функція, яка задовольняє умову* **Б** $_4$.

Якщо, крім умов **Б** $_1$ –**Б** $_3$, *виконується умова* **Б** $_5$, *то для спряженої до системи* (1) *існує ФМРЗК* $Z^*(\tau,\xi;t,x)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{\xi,x\} \subset \mathbb{R}^n$, *і справджуються рівності*

$$Z^*(\tau,\xi;t,x) = (\overline{Z(t,x;\tau,\xi)})',$$
$$Z(t,x;\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\gamma,y)Z(\gamma,y;\tau,\xi)dy,$$
$$0 \le \tau < \gamma < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

де штрихом позначено операцію транспонування, а рискою – комплексне спряження.

Д о в е д е н н я. ФМРЗК для системи (1) згідно з методом Леві [5] шукаємо у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi) = \widehat{Z}(t,x;\tau,\xi;\xi) + \int_{\tau}^{t} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{Z}(t,x;\theta,y;y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

де $\varphi(\cdot,\cdot;\tau,\xi)$ – квадратна матриця порядку N, яку підбираємо так, щоб функція $Z(\cdot,\cdot;\tau,\xi)$ була розв'язком системи (1) для будь-якої фіксованої точки $(\tau,\xi)\in\in\Pi_{(0,T]}$, а $\widehat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)$, $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, – ФМРЗК системи

$$L(t,y,\partial_t,\partial_x)v(t,x)=0,\qquad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},$$

для кожної фіксованої точки $y\in\mathbb{R}^n$. Оцінки (2) і (4) доводимо аналогічно до доведення відповідних оцінок для систем з виродженням [5] з використанням оцінок

$$|\partial_x^k\widehat{Z}(t,x;\tau,\xi)|\le\widehat{C}_k(t-\tau)^{-(M+||k||)/(2s)}E_c(t-\tau,x-\xi)\exp\{-c(t-\tau)(D(y))^{2s}\},\ (8)$$

$$\begin{gathered}|\varphi(t,x;\tau,\xi)|\le C_l((t-\tau)^{-(M-\lambda)/(2s)-1}\exp\{-c(t-\tau)(D(y))^{2s}\}+\\ +(t-\tau)^{\lambda/(2s)}(D(\xi))^{-l})E_c(t-\tau,x-\xi),\\ 0\le\tau<t\le T,\qquad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\end{gathered}\tag{9}$$

де $\widehat{C}_k>0$, $C_l>0$, $c>0$, l – довільне фіксоване додатне число.

При $||k||=2s$ оцінку (2) для похідних ∂_x^kZ за цією методикою одержати не можна.

На підставі твердження, аналогічного до твердження 2 з [5], і рівності

$$\partial_x^k\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)d\xi=0$$

для довільних $k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$ і $y\in\mathbb{R}^n$ запишемо

$$\begin{gathered}\partial_x^k\int\limits_\tau^t d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{Z}(t,x;\theta,y;y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy=\int\limits_\tau^{t_0}d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k\widehat{Z}(t,x;\theta,y;y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy+\\ +\int\limits_{t_0}^t d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k\widehat{Z}(t,x;\theta,y;y)\Delta_y^x\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy+\\ +\int\limits_{t_0}^t(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_z^x\partial_x^k\widehat{Z}(t,x;\theta,y;z)|_{z=y}dy)\varphi(\theta,x;\tau,\xi)d\theta,\end{gathered}\tag{10}$$

де $t_0\equiv(t+\tau)/2$. Оцінивши кожен доданок останньої рівності та використавши оцінку (8), з (7) одержуємо (3). При цьому для оцінки першого доданка з (10) використовуємо оцінки (8) і (9), для другого – умову **Б** $_3$, оцінки (8) та оцінку

$$\begin{gathered}|\Delta_x^{x'}\varphi(t,x;\tau,\xi)|\le C_l(p(x,x'))^{\lambda_1}((t-\tau)^{-(M-\lambda_2)/(2s)-1}\exp\{-c(t-\tau)(D(y))^{2s}\}+\\ +(t-\tau)^{\lambda_2/(2s)}(D(\xi))^{-l})(E_c(t-\tau,x-\xi)+E_c(t-\tau,x'-\xi)),\\ 0\le\tau<t\le T,\qquad \{x,\xi,x'\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad 0<\lambda_1<\lambda,\quad \lambda_2\equiv\lambda-\lambda_1,\end{gathered}$$

для третього – оцінку (9) та оцінку

$$\begin{gathered}|\Delta_y^{y'}\partial_x^k\widehat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)|\le C(p(y,y'))^\lambda(t-\tau)^{-(M+||k||)/(2s)}E_c(t-\tau,x-\xi)\times\\ \times(\exp\{-c(t-\tau)(D(y))^{2s}\}+\exp\{-c(t-\tau)(D(y'))^{2s}\})((D(y))^{2s}+(D(y'))^{2s}),\\ 0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi,y,y'\}\subset\mathbb{R}^n,\quad k\in\mathbb{Z}^n.\end{gathered}$$

Оцінки (3) і (5) одержуємо відповідно з (2) і (4) шляхом заміни $u(t,x)==\exp\{g(x)\}v(t,x)$. Внаслідок цієї заміни отримуємо нову систему, коефіцієнти якої задовольняють умови **Б** $_1$–**Б** $_3$.

3. Властивості ФМРЗК дозволяють досліджувати розв'язність задачі Коші для системи

$$L(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)=f(t,x),\qquad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}.\tag{11}$$

Наведемо результати такого дослідження.

Для формулювання основного результату означимо необхідні норми і простори. Нехай $\mathbb{C}_N$ – сукупність усіх стовпчиків висоти N з комплексними елементами; c_0, $\nu_1,\ldots,\nu_n$ – задані числа такі, що $0<c_0<c$, $0\le\nu_j<c_0T^{1-q_j}$,

$j\in\{1,...,n\}$, де c – стала з оцінок (2)–(5). Розглянемо функції

$$k_j(t)\equiv c_0\nu_j(c_0^{2b_j-1}-(t\nu_j^{2b_j-1})^{1-q_j},\quad j\in\{1,...,n\},$$
$$k(t)\equiv(k_1(t),...,k_n(t)),$$
$$\Phi_\chi(t,x)\equiv\exp\{-\chi\sum_{j=1}^{n}k_j(t)|x_j|^{q_j}\},\quad \Psi_\chi(x)\equiv\exp\{-\chi g(x)\},$$

де $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\chi\in\{-1,1\}$, g – функція з оцінок (4) і (5).

Для вимірної за x при кожному фіксованому $t\in[0,T]$ функції $u:\Pi_{[0,T]}\to\to\mathbb{C}_N$ означимо норму

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t),g(\cdot)}\equiv\|u(t,\cdot)\Phi_1(t,\cdot)\Psi_1(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},\quad 1\le p\le\infty,\quad t\in[0,T].$$

Через $L_p^{k(0),g(\cdot)}$ позначимо простір усіх вимірних функцій $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}_N$, для яких є скінченною норма $\|\varphi\|_p^{k(0),g(\cdot)}$, через $M^{k(0),g(\cdot)}$ – простір усіх $\mathbb{C}_N$ -значних узагальнених борельових мір μ , для яких збігається інтеграл

$$\|\mu\|^{k(0),g(\cdot)}\equiv\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_1(0,x)\Psi_1(x)d|\mu|(x),$$

через $L_1^{-k(T),-g(\cdot)}$ – простір вимірних функцій $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}_N$, для яких є скінченною норма

$$\|\Phi_{-1}(T,\cdot)\Psi_{-1}(\cdot)\psi(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)},$$

а через $C_0^{-k(T),-g(\cdot)}$ – простір таких неперервних функцій $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}_N$, що

$$\Phi_{-1}(T,x)\Psi_{-1}(x)|\psi(x)|\to0\quad\text{при}\quad|x|\to\infty.$$

Для функції $f:\Pi_{(0,T]}\to\mathbb{C}_N$ використовуватимемо наступні умови.

$\mathbf{\Gamma}_1$). Функція f неперервна та задовольняє локальну умову Гельдера за x .

$\mathbf{\Gamma}_{2p}$). Для довільного $t\in(0,T]$ є скінченними величини $||f(t,\cdot)||_p^{k(t),g(\cdot)}$ і

$$F_{2p}(t)\equiv\int_0^t\|f(\tau,\cdot)\|_p^{k(\tau),g(\cdot)},\quad 1\le p\le\infty.$$

Теорема 2. *Нехай для системи* (11) *виконуються умови* $\mathbf{Б}_1$ –$\mathbf{Б}_3$. *Тоді є правильними такі твердження:*

1) якщо $\varphi\in L_p^{k(0),g(\cdot)}$ *і функція* f *задовольняє умови* $\mathbf{\Gamma}_1$ *та* $\mathbf{\Gamma}_{2p}$, $1\le p\le\le\infty$, *то функція*

$$u(t,x)\equiv\int_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi+\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\tag{12}$$

є розв'язком системи (11) *таким, що*

$$\exists C>0\quad\forall t\in(0,T]:\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t),g(\cdot)}\le C\left(\|\varphi\|_p^{k(0),g(\cdot)}+F_p(t)\right),$$

при $1\le p<\infty$

$$\lim_{t\to0+}\|u(t,\cdot)-\varphi\|_p^{k(t),g(\cdot)}=0$$

і при $p=\infty$

$$\lim_{t\to0+}\int_{\mathbb{R}^n}\psi^{'}(x)u(t,x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\psi^{'}(x)\varphi(x)dx$$

для будь-якої функції $\psi\in L_1^{-k(T),-g(\cdot)}$;

2) якщо $\mu\in M^{k(0),g(\cdot)}$ *і для функції* f *виконуються умови* $\mathbf{\Gamma}_1$ *та* $\mathbf{\Gamma}_{21}$, *то функція*

$$u(t,x)\equiv\int_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi)+\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\tag{13}$$

є розв'язком системи (11), *який задовольняє умови*

$$\exists\, C>0 \quad \forall\, t\in(0,T]: \|u(t,\cdot)\|_1^{k(t),g(\cdot)} \le C\left(\|\mu\|^{k(0),g(\cdot)} + F_1(t)\right)$$

і

$$\lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi^{'}(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi^{'}(x)d\mu(x)$$

для довільної функції $\psi\in C_0^{-k(T),-g(\cdot)}$.

Якщо ж додатково припустити виконання умови $\mathbf{Б}_5$, *то розв'язки, що визначаються формулами* (12) *і* (13), *є единими в класі функцій, які задовольняють умову*

$$\exists\, C>0 \quad \forall\, t\in(0,T]:$$

$$||u(t,\cdot)||_p^{k(t),D(\cdot),g(\cdot)} \equiv ||\Phi_1(t,\cdot)(D(\cdot))^{2s}\Psi_1(\cdot)u(t,\cdot)||_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le C, \tag{14}$$

де g *– функція з оцінок* (4) *і* (5), *а* D *– характеристика дисипації системи.*

Д о в е д е н н я. Те, що функції (12) і (13) є розв'язками системи (11), випливає з того, що, якщо φ – неперервна обмежена функція, то для довільного компакта $K\subset\mathbb{R}^n$ $u_1(t,\cdot)\underset{t\to 0+}{\overset{K}{\rightrightarrows}}\varphi(\cdot)$, тобто рівномірно на K, де

$$u_1(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

а функція

$$v_1(t,x) = \int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi$$

за умов теореми має неперервні похідні, які входять у систему (11), при цьому похідні $\partial_x^k v_1$, $||k||\le 2s-1$, одержуються формальним диференціюванням під знаками інтегралів, а похідні старших порядків обчислюються за формулами

$$\partial_x^k v_1(t,x) = \int\limits_0^{t_0} d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\Delta_x^{\xi} f(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)d\xi\right)f(\tau,x)d\tau, \quad ||k||=2s,$$

$$\partial_t v_1(t,x) = f(t,x) + \int\limits_0^{t_0} d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_t Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_t Z(t,x;\tau,\xi)\Delta_{\xi}^{x} f(\tau,\xi)d\xi + \int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_t Z(t,x;\tau,\xi)d\xi\right)f(\tau,x)d\tau,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \quad t_0\equiv t/2,$$

і з того, що функція $Z(t,x;\tau,\xi)$, $(t,x)\in\Pi_{(\tau,T]}$, для довільної фіксованої точки $(\tau,\xi)\in\Pi_{[0,T)}$ є розв'язком однорідної системи (1).

Друга частина обох тверджень теореми 2 випливає з властивостей потенціалів, породжених ФМРЗК Z, при доведенні яких використовуються нерівності

$$E_c(t-\tau,x-\xi)\Phi_{-1}(\tau,\xi)\le\Phi_{-1}(t,x), \quad 0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \quad c>0,$$

і
$$E_c(t, x-\xi)\Phi_1(T, x) \le P_1(t, \xi), \quad t \in (0, T), \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad c > 0,$$
де $P_1(t, x) \equiv \exp\{-\sum\limits_{j=1}^{n} r_j(t)|x_j|^{q_j}\}$, $r_j(t) \equiv c_0 k_j(T)(c_0^{2b_j-1} + (k_j(T))^{2b_j-1}t)^{1-q_j} \le$ $\le k_j(T)$, та оцінки ФМРЗК Z (4).

За умов **Б** $_1$ –**Б** $_5$ розв'язки (12) і (13) є єдиними в класі функцій, які задовольняють умову (14), оскільки розв'язок системи (11), для якого виконуються співвідношення другої частини обох тверджень, зображується у вигляді (12) або (13). Це можна довести за допомогою формули Ґріна–Остроградського

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta \int\limits_{V} (\overline{v'}Lu - \overline{(L^*v)}'u)(\theta, y)dy = \int\limits_{V} (\overline{v'}u)(\theta, y)\Bigg|_{\theta=t_1}^{\theta=t_2} dy + \int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta \int\limits_{\Gamma} \sum_{j=1}^{n} B^j[v, u](\theta, y)\mu_j dS_y,$$

де $t_1 < t_2$, $(\mu_1, ..., \mu_n)$ – орт зовнішньої нормалі до межі Γ обмеженої області $V \subset \mathbb{R}^n$, та властивості нормальності ФМРЗК Z (6) аналогічно, як у [2], для випадку систем зі зростаючими коефіцієнтами, що зводяться до дисипативних систем, коефіцієнти яких задовольняють перший набір умов. $\diamondsuit$

1. *Ивасишен С. Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$-параболических систем // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 4. – С. 500–506.
2. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про задачу Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1484–1496.
3. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1999. – № 6. – С. 18–22.
4. *Пасічник Г. С.* Про розв'язність задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.- мех. поля. – 1999. – **42**, № 3. – С. 61–65.
5. *Пасічник Г. С., Івасишен С. Д.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем з необмеженими коефіцієнтами і виродженнями на початковій гіперплощині // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2000. – Вип. 76. – С. 82–91.
6. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
7. *Эйдельман С. Д., Порпер Ф. О.* О поведении решений параболических систем второго порядка с диссипацией // Дифференц. уравнения. – 1971. – **7**, № 9. – С. 1684–1695.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ДИССИПАТИВНИХ $\overrightarrow{2b}$-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Приведены результаты о фундаментальной матрице решений задачи Коши и разрешимости задачи Коши для диссипативных $\overrightarrow{2b}$ -параболических систем.

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR DISSIPATIVE $\overrightarrow{2b}$-PARABOLIC SYSTEMS

The results on fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem and solvability of the Cauchy problem for dissipative $\overrightarrow{2b}$ -parabolic systems are stated.

Чернів. нац. ун-т
ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
08.09.03