УДК 517.956.4

Г. П. Малицька

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОГО ЗА ДОВІЛЬНОЮ КІЛЬКІСТЮ ГРУП ЗМІННИХ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛМОГОРОВА ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ

Побудовано та досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого за довільною кількістю груп змінних параболічного рівняння типу Колмогорова довільного порядку.

У цій статті побудовано та досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші для класу рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією в інерціальній частині, зокрема, мають довільну кількість груп змінних, за якими є виродження, а за просторовими змінними містять похідні порядку, не вищого ніж $2b$, $b \ge 1$.

Одержані результати дають можливість побудувати фундаментальний розв'язок для такого ж типу рівнянь, але зі змінними коефіцієнтами в параболічній частині.

1. Позначення: m_r – фіксовані цілі невід'ємні числа; $m_r \le m_{r-1} \le \le m_{r-2} \le \ldots \le m_1 \le n$; r, n – деякі фіксовані натуральні числа; $N = = \sum\limits_{j=1}^{r} m_j + n$; $M = n + (2b+1)m_1 + \ldots + (2br+1)m_r$; $X = (x, y_1, y_2, \ldots, y_r) \in \mathbb{R}^n$, де $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $y_1 = (y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1m_1}) \in \mathbb{R}^{m_1}, \ldots, y_r = (y_{r1}, y_{r2}, \ldots, y_{rm_r}) \in \in \mathbb{R}^{m_r}$; $x^{(1)} = (x_1, \ldots, x_{m_1})$, $x^{(2)} = (x_1, \ldots, x_{m_2}), \ldots, x^{(r)} = (x_1, \ldots, x_{m_r})$; $x^{(k,j)} = = (x_k, x_{k+1}, \ldots, x_j)$, $k < j$, $y_j^{(s)} = (y_{j1}, y_{j2}, \ldots, y_{jm_s})$, $j < s$; (зміст, аналогічний символу X, мають символи $E = (\xi, \eta_1, \ldots, \eta_r)$; $\Lambda = (\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_r)$); $(X, E) = = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \xi_j + \sum\limits_{j=1}^{r} \sum\limits_{k=1}^{m_j} (y_{jk}, \eta_{jk}) = (x, \xi) + (y_1, \eta_1) + \ldots + (y_r, \eta_r)$; $(x^{(1)}, D_{y_1}) = \sum\limits_{j=1}^{m_1} x_j D_{y_{1j}}$; $(y_1^{(2)}, D_{y_2}) = \sum\limits_{j=1}^{m_2} y_{1j} D_{y_{2j}}, \ldots, (y_{r-1}^{(r)}, D_{y_r}) = \sum\limits_{j=1}^{m_r} y_{r-1,j} D_{y_{rj}}$; $D_{y_{sj}} = \frac{\partial}{\partial y_{sj}}$, $\Pi = = \{(t, X),\, t \in (0, T],\, X \in \mathbb{R}^N\}$.

2. Постановка задачі. Розглянемо таку задачу Коші:

$$\left(D_t - (x^1, D_{y_1}) - (y_1^{(2)}, D_{y_2}) - \cdots - (y_{r-1}^{(r)}, D_{y_r}) - \sum_{|k| \le 2b} a_k(t) D_x^t \right) u(t, X) = 0, \quad (t, X) \in \Pi, \qquad (1)$$

$$u(t, X)|_{t=\tau} = \varphi(x), \qquad (2)$$

де $\left(D_t - \sum\limits_{|k| \le 2b} a_k(t) D_x^k \right) u(t, X) = 0$ – рівняння, рівномірно параболічне в сенсі Петровського; $a_k(t)$ – комплекснозначні неперервні обмежені функції; $t \in (0, T]$; $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ – досить гладка фінітна функція.

Розв'язок шукатимемо у вигляді оберненого перетворення Фур'є функції $\nu(t, E)$:

$$u(t, X) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\{i(X, E)\} \nu(t, E) dE, \quad t > \tau, \quad X \in \mathbb{R}^N. \qquad (3)$$

Для визначення функції $\nu(t,E)$ одержимо задачу

$$\left(D_t + (\eta_1, D_{\xi^{(1)}}) + (\eta_2, D_{\eta_1^{(2)}}) + \dots + (\eta_r, D_{\eta_{r-1}^{(r)}}) + \sum_{|k|\le 2b} a_k(t)(i\xi)^k\right)\nu(t,E)=0,$$

$$t > \tau, \quad X \in \mathbb{R}^N, \tag{4}$$

$$\nu(t,E)|_{t=\tau} = \psi(E), \quad E \in \mathbb{R}^N, \tag{5}$$

де

$$\psi(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-i(X,\, E)\}dX. \tag{6}$$

3. Розв'язання задачі Коші (4), (5). Задачу (4), (5) розв'яжемо методом характеристик. Відповідна рівнянню (4) система звичайних диференціальних рівнянь має вигляд

$$dt=\frac{d\xi_1}{\eta_{11}}=\dots=\frac{d\xi_{m_1}}{\eta_{1m_1}}=\frac{d\eta_{11}}{\eta_{21}}=\dots=\frac{d\eta_{1m_2}}{\eta_{2m_2}}=\frac{d\eta_{21}}{\eta_{31}}=\dots=\frac{d\eta_{r-1,m_r}}{\eta_{rm_r}}=\frac{d\nu}{\sum\limits_{|k|\le 2b} a_k(t)(i\xi)^k\nu}. \tag{7}$$

Ця система містить $\sum\limits_{j=1}^{r} m_j + 1$ рівнянь, знайдемо стільки ж її незалежних перших інтегралів. З рівнянь $dt = \frac{d\eta_{r-1,j}}{\eta_{r,j}}$, $j = 1,2,\dots,m_r$, знаходимо

$$\eta_{r-1,j} = t\eta_{r,j} + C_{1,j,r-1}, \ C_{1,j,r-1} = \text{const}, \tag{7_1}$$

а з $dt = \frac{d\eta_{r-2,j}}{\eta_{r-1,j}}$, $j = 1,2,\dots,m_r$, визначимо

$$\eta_{r-2,j} = \frac{t^2}{2}\eta_{r,j} + C_{1,j,r-1}t + C_{2,j,r-2} \tag{7_2}$$

і т.д. Із $dt = \frac{d\eta_{1,j}}{\eta_{2,j}}$, $j = 1,2,\dots,m_r$, знаходимо

$$\eta_{1,j} = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_r + C_{1,j,r-1}\frac{t^{r-2}}{(r-2)!} + \dots + C_{r-2,j,2}t + C_{r-1,j,1}, \tag{7_{r-1}}$$

а із $dt = \frac{d\xi_i}{\eta_{1j}}$ визначимо ξ_i, $i = 1,2,\dots,m_r$:

$$\xi_j = \frac{t^r}{r!}\eta_{rj} + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}C_{1,j,r-1} + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}C_{2,j,r-2} + \ldots + tC_{r-1,j,1} + C_j. \tag{7_r}$$

Якщо $j = m_r + 1, \dots, m_{r-1}$, то

$$\eta_{r-2,j} = t\eta_{r-1,j} + C_{1,j,r-2}, \tag{7_{r+1}}$$

$$\eta_{r-3,j} = \frac{t^2}{2}\eta_{r-1,j} + C_{1,j,r-2}t + C_{2,j,r-2}, \tag{7_{r+2}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\eta_{1,j} = \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\eta_{r-1,j} + C_{1,j,r-2}\frac{t^{r-3}}{(r-3)!} + \dots + C_{r-2,j,1}, \tag{7_{2r-1}}$$

$$\xi_j = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r-1,j} + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}C_{1,j,r-2} + \dots + C_{r-2,j,1}t + C_j. \tag{7_{2r}}$$

Поступово дійдемо до $j = m_3 + 1, \dots, m_2$, тоді

$$\eta_{1,j} = t\eta_{2,j} + C_{1,j,1}, \ \xi_j = \frac{t^2}{2}\eta_{2,j} + C_{1,j,1}t + C_j. \tag{8}$$

Якщо $j = m_2+1,\ldots,m_1,$ то

$$\xi_j = t\eta_{1,j} + C_j. \tag{9}$$

Оскільки $\nu = C\exp\left\{\int\limits_{\tau}^{t}\sum\limits_{|k|\le 2b} a_k(\beta)(i\xi)^k d\beta\right\}$, то, використовуючи перші інтеграли для ξ_i, запишемо $\nu = C\exp\left\{\int\limits_{\tau}^{t}\sum\limits_{|k|\le 2b} a_k(\beta)(i\xi(\eta,\beta,c))^k d\beta\right\}$, де

$$\xi(\eta,\beta,c) = \left(\frac{\beta^r}{r!}\eta_{r,1} + c_{1,1,r-1}\frac{\beta^{r-1}}{(r-1)!} + \cdots + c_1, \ldots, \frac{\beta^r}{r!}\eta_{r,m_r} + \right.$$

$$\left. + c_{1,m_r,r-1}\frac{\beta^{r-1}}{(r-1)!} + \cdots + c_{m_r}, \ldots, \beta\eta_{1,m_1} + c_{m_1}, \xi_{m_1+1}, \ldots, \xi_n\right).$$

Нехай $\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{r-1}$ і $\bar{\nu}$ – значення при $t=\tau$ відповідно $\xi_i, \eta_1, \ldots, \eta_{r-1}, \nu,$ тому при $j = 1,\ldots,m_r$ маємо

$$\bar{\eta}_{1,j} = \frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r,j} + \frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}C_{1,j,r-1} + \cdots + C_{r-1,j,1},$$

$$\bar{\xi}_i = \frac{\tau^r}{r!}\eta_{r,j} + \frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}C_{1,j,r-1} + \cdots + \tau C_{r-1,j,1} + C_j.$$

Якщо $m_r + 1 \le j \le m_{r-1},$ то

$$\bar{\eta}_{1,j} = \frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}\eta_{r-1,j} + \frac{\tau^{r-3}}{(r-3)!}C_{1,j,r-2} + \cdots + C_{r-1,j,1},$$

$$\bar{\xi}_i = \frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r-1,j} + \frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}C_{1,j,r-2} + \cdots + \tau C_{r-1,j,1} + C_j$$

і т.д.

При $m_k + 1 \le j \le m_{k-1},\ 1 < k < r,$

$$\bar{\eta}_{1,j} = \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!}\eta_{k,j} + \frac{\tau^{k-2}}{(k-2)!}C_{1,j,k-1} + \cdots + C_{k-1,j,1},$$

$$\bar{\xi}_i = \frac{\tau^k}{k!}\eta_{k,j} + \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!}C_{1,j,k-1} + \cdots + \tau C_{k-1,j,1} + C_j\,.$$

Зокрема, $\xi_i = \tau\eta_{1,j} + C_j$ при $m_2 + 1 \le j \le m_1.$

Аналогічно знаходимо $\bar{\eta}_{r-k,j}$ при відповідних $j, \bar{\nu} \equiv C.$ Оскільки $\bar{\nu} = \psi,$ то $C = \psi(\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{k-1}, \eta_k).$

Окремо випишемо аргументи $\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{k-1}, \eta_k :$

$$\left(\frac{\tau^r}{r!}\eta_{r,1} + \frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}C_{1,1,r-1} + \cdots + \tau C_{r-1,1,1} + C_1, \ldots,\right.$$

$$\frac{\tau^r}{r!}\eta_{r,m_1} + \frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}C_{1,m_r,r-1} + \tau C_{r-1,m_r,1} + C_{m_r},$$

$$\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r-1,1+m_r} + \frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}C_{2,m_r,r-2} + \cdots + \tau C_{r-2,m_r+1,1} + C_{m_r+1},$$

$$\tau\eta_{1,m_r+1} + C_{m_r+1}, \ldots, \tau\eta_{1,m_1} + C_{m_1}, \quad \xi_{m_1+1}, \ldots, \xi_n,$$

$$\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r,1}+\frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}C_{1,1,r-1}+\dots+C_{r-1,1,1},$$

$$\eta_{r,m_r}\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}C_{1,m_r,r-1}+\dots+C_{r-1,m_r+1,1},$$

$$\eta_{r-1,1}\frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}+\frac{\tau^{r-3}}{(r-3)!}C_{1,1,r-2}+\dots+C_{r-2,1,1},\quad \tau\eta_{2,m_2}+C_{j,m_2,1},$$

$$\eta_{1,m_2+1},\dots,\eta_{1,m_1},\dots,\tau\eta_{r,1}+C_{1,1,r-1},\dots,\tau\eta_{r,m_1}+C_{1,m_r,r-1},$$

$$\eta_{r-1,m_r+1},\dots,\eta_{r-1,m_{r-1}},\dots,\eta_{r,1},\dots,\eta_{r,m_r}\big). \tag{10}$$

Використовуючи (7)–(9), знайдемо сталі $C_{i,j,k}$, C_j і, підставивши їх у (10), а також у вираз для ν, одержимо:

$$\nu(t,E)=\exp\left\{\sum_{|k|\le 2b}\int_\tau^t a_k(\beta)(i\xi(\eta,t-\beta,c))^k d\beta\right\}\times$$

$$\times\psi\Bigg(\xi^{(r)}-(t-\tau)\eta_1^{(r)}+\frac{(t-\tau)^2}{2!}\eta_2^{(r)}+\dots+\frac{(-1)^r(t-\tau)^r}{r!}\eta_r,$$

$$\xi^{(r-1)}-(t-\tau)\eta_1^{(r-1)}+\frac{(t-\tau)^2}{2!}\eta_2^{(r-1)}+\dots+\frac{(-1)^{r-1}(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r-1},\dots,\xi^{(1)}-(t-\tau)\eta_1^{(1)},\xi^{(m_1+1,n)},$$

$$\eta_1^{(r)}-(t-\tau)\eta_2^{(r)}+\dots+\frac{(-1)^{r-1}(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}\eta_r,\dots,\eta_1^{(k)}-(t-\tau)\eta_2^{(k)}+\dots+\frac{(-1)^{k-1}(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\eta_k,\dots,$$

$$\eta_1^{(2)}-(t-\tau)\eta_2,\eta_1^{(m_2+1,m_1)},\dots,\eta_{r-1}^{(r)}-(t-\tau)\eta_r,\eta_{r-1}^{(m_r+1,m_{r-1})},\eta_r\Bigg),\ t>\tau,\ E\in\mathbb{R}^N. \tag{11}$$

4. Розв'язок задачі (1), (2). Підставивши (11) у (3) та зробивши відповідну заміну змінних, одержимо

$$u(t,X)=(2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}\exp\{i(x^{(m_1+1,n)},\xi^{(m_1+1,n)})+i(x^{(m_2+1,m_1)},\xi^{(m_2+1,m_1)}+(t-\tau)\eta_1^{(m_2+1,m_1)}+$$

$$+\dots+i\left(x^{(m_r+1,m_{r-1})},\xi^{(m_r+1,m_{r-1})}+(t-\tau)\eta_1^{(m_r+1,m_{r-1})}+\frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r-1}\right)+$$

$$+i\left(x^{(r)},\xi^{(r)}+(t-\tau)\eta_1^{(r)}+\dots+\frac{(t-\tau)^r}{r!}\eta_r\right)+\left(y_1^{(m_2+1,m_1)},\eta_1^{(m_2+1,m_1)}\right)+\dots+$$

$$+\left(y_1^{(r)},\eta_1^{(r)}+(t-\tau)\eta_2^{(r)}+\dots+\frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}\eta_r\right)+i\left(y_2^{(m_3+1,m_2)},\eta_2^{(m_3+1,m_2)}\right)+\dots+$$

$$+i\left(y_2^{(r)},\eta_2^{(r)}+(t-\tau)\eta_3^{(r)}+\dots+\frac{(t-\tau)^{r-2}}{(r-2)!}\eta_r\right)+\dots+(y_r,\eta_r)+$$

$$+\int_\tau^t\sum_{|k|\le 2b}i^k a_k(\beta)\xi^k(\beta-\tau,\eta)d\beta\}\psi(E)dE,$$

де

$$\xi(\beta-\tau,\eta)=(\xi^{(r)}+(\beta-\tau)\eta_1^{(r)}+\frac{(\beta-\tau)^2}{2}\eta_2^{(r)}+\dots+\frac{(\beta-\tau)^r}{r!}\eta_r,$$

$$\xi^{(m_{r-1}+1,m_r)}+(\beta-\tau)\eta_1^{(m_{r-1}+1,m_r)}+\dots+\frac{(\beta-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}\eta_r^{(m_{r-1},m_r)},\dots,$$

$$\xi^{(m_r+1,m_1)}+(\beta-\tau)\eta_1^{(m_r+1,m_1)},\xi^{(m_1+1,n)}).$$

Скориставшись виразом (6), змінивши порядок інтегрування і зробивши перепозначення змінних, отримаємо формулу:

$$u(t,X)=(2\pi)^{-N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;\tau,E)\varphi(E)dE, \quad t>\tau,$$

$$Z(t,X;\tau,E)=(2\pi)^{-N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\exp\Bigg\{i(x-\xi,\lambda)+i(y_1+x^{(1)}(t-\tau)-\eta_1,\mu_1)+$$

$$+i(y_2+y_1^{(2)}(t-\tau)+\frac{x^{(2)}(t-\tau)^2}{2!}-\eta_2,\mu_2)+$$

$$+i(y_3+y_2^{(3)}(t-\tau)+y_2^{(3)}\frac{(t-\tau)^2}{2!}+\frac{x^{(3)}(t-\tau)^3}{3!}-\eta_3,\mu_3)+$$

$$+i(y_r+y_{r-1}^{(r)}(t-\tau)+y_{r-2}^{(r)}\frac{(t-\tau)^2}{2!}+\dots+y_1^{(r)}\frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{x^{(r)}(t-\tau)^r}{r!}-\eta_r,\mu_r)+$$

$$+\sum_{|k|\le 2b}\int\limits_{\tau}^{t} a_k(\beta)(i\lambda(\beta-\tau,\mu))^k d\beta\Bigg\}d\Lambda. \tag{12}$$

В інтегралі (12) робимо заміну змінних $\beta-\tau=(t-\tau)\bar\beta$, $\lambda=(t-\tau)^{-\frac{1}{2b}}\bar\lambda$, $\mu_1=(t-\tau)^{-\frac{2b+1}{2b}}\bar\mu_1$, $\mu_2=(t-\tau)^{-\frac{4b+1}{2b}}\bar\mu_2,\dots,$ $\mu_r=(t-\tau)^{-\left(r+\frac{1}{2b}\right)}\bar\mu_r$. Замість $\bar\lambda,\bar\mu_1,\dots,\bar\mu_r,\bar\beta$ знову запишемо відповідно $\lambda,\mu_1,\dots,\mu_r,\beta$, тоді фундаментальний розв'язок $Z(t,X;\tau,E)$ задачі Коші (1)–(2) матиме вигляд:

$$Z(t,X;\tau,E)=(2\pi)^{-N}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-\frac{M}{2b}}\exp\Bigg\{i((x-\xi)(t-\tau)^{-\frac{1}{2b}},\lambda)+$$

$$+i((y_1+(t-\tau)x^{(1)}-\eta_1)(t-\tau)^{-\left(1+\frac{1}{2b}\right)},\mu_1)+\dots+$$

$$+i((y_r+y_{r-1}^{(r)}(t-\tau)+y_{r-2}^{(r)}\frac{(t-\tau)^2}{2!}+\dots+y_1^{(r)}\frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{x^r(t-\tau)^r}{r!}-\eta_r)(t-\tau)^{-\left(2+\frac{1}{2b}\right)},\mu_r)+$$

$$+\sum_{|k|\le 2b}\int_0^1 a_k(\tau-(t-\tau)\beta)(i\lambda^*((t-\tau)\beta,\mu))^k d\beta(t-\tau)\Bigg\}d\Lambda, \tag{13}$$

де $\lambda^*((t-\tau)\beta,\mu)$ – вираз, який одержали з $\lambda(\beta-\tau,\mu)$ після заміни змінних.

5. Основний результат. Позначимо

$$I(\Lambda)=\exp\left\{-c_0\left(\sum_{|k|\le 2b}\int\limits_0^1 a_k(\beta(t-\tau)+\tau)(i\lambda^*(t-\tau\beta,\mu))^k d\beta\right)\right\}$$

і оцінимо $I(\Lambda)$ при дійсних Λ, використавши означення параболічності:

$$|I(\Lambda)|\le C\exp\Bigg\{-c_0\Bigg(\sum_{j=m_1+1}^{n}|\xi_j|^{2b}+\sum_{j=m_2+1}^{m_1}\int_0^1|\xi_j+\beta\mu_{1j}|^{2b}d\beta+\ldots+$$

$$+\sum_{j=1}^{m_r}\int_0^1\left|\xi_j+\beta\mu_{1j}+\frac{\beta^2}{2}\mu_{2j}+\dots+\frac{\beta^r}{r!}\mu_{rj}\right|^{2b}d\beta\Bigg)\Bigg\};\ C,\ c_0>0,$$

або

$$|I(\Lambda)| \le C \exp\left\{-c_0\left(\sum_{j=m_1+1}^{n}|\xi_j|^{2b}+\sum_{j=m_2+1}^{m_1}\int_0^1\rho_{1j}^{2b}\left|\frac{\xi_i}{\rho_{1j}}+\beta\frac{\mu_{1j}}{\rho_{1j}}\right|^{2b}d\beta+\cdots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{m_r}\int_0^1\rho_{rj}^{2b}\left|\frac{\xi_j}{\rho_{rj}}+\beta\frac{\mu_{1j}}{\rho_{rj}}+\cdots+\frac{\beta^r}{r!}\frac{\mu_{rj}}{\rho_{rj}}\right|^{2b}d\beta\right)\right\},$$

де $\rho_{kj}=\sqrt{\xi_j^2+\mu_{1j}^2+\cdots+\mu_{kj}^2}$.

Для неперервних на компакті K функцій $a_0(\Lambda), a_1(\Lambda), \dots, a_r(\Lambda)$, які одночасно не перетворюються в нуль, маємо $\int\limits_0^1\sum\limits_{j=0}^{r}(a_j(\Lambda)\beta^j)^{2b}d\beta \ge M_0 > 0$, де стала M_0 залежить від $2b$, $\sup a_j(\Lambda)$ і $\inf a_j(\Lambda)$, $j=0,1,2,\dots,r$.

Тому для $I(\Lambda)$ справджується оцінка

$$|I(\Lambda)| \le C \exp\{-c_0(|\xi|^{2b}+|\mu_1|^{2b}+\cdots+|\mu_r|^{2b})\},\ \Lambda\in\mathbb{R}^N. \tag{14}$$

Якщо розглянути $\Lambda+iS=(\xi+i\Theta,\mu_1+i\gamma_1,\dots,\mu_r+i\gamma_r)$, $S\in\mathbb{R}^N$, $S= =(\Theta,\lambda_1,\dots,\lambda_r)$, то для $I(\Lambda+iS)$ встановлюємо оцінку

$$|I(\Lambda+iS)| \le C \exp\{-c_1(|\xi|^{2b}+|\mu_1|^{2b}+\cdots+|\mu_r|^{2b})+c_2(|\Theta|^{2b}+|\lambda_1|^{2b}+\cdots+|\lambda_r|^{2b})\},$$

де додатні сталі C, c_1, c_2 залежить від $2b$, сталої параболічності δ та величин T, n, $m_1,\dots,m_r$, $\sup|a_k(t)|$.

Оскільки $I(\Lambda+iS)$ – ціла функція, то перетворення Фур'є від $I(\Lambda)$ існує (лема 11 з [3]). Отже, $Z(t,X;\tau,E)$ – перетворення Фур'є від $I(\Lambda)$ в точці

$$\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}, \frac{y_1-\eta_1+x^{(1)}(t-\tau)}{(t-\tau)^{1+\frac{1}{2b}}},\dots,(y_r-\eta_r+(t-\tau)y_{r-1}^{(r)}+$$

$$+\frac{(t-\tau)^2}{2!}y_{r-2}^{(r)}+\cdots+\frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}y_1^{(r)}+\frac{x^{(r)}(t-\tau)^r}{r!})(t-\tau)^{-\left(r+\frac{1}{2b}\right)}.$$

Сформулюємо основний результат.

Теорема. *Фундаментальний розв'язок задачі* (1), (2) *має вигляд*

$$Z(t,X;\tau,E)=(t-\tau)^{-\frac{M}{2b}}\Omega\Bigg(t,\tau;\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/2b}},\frac{y_1-\eta_1+x^{(1)}(t-\tau)}{(t-\tau)^{1+1/2b}},\dots,$$

$$\frac{1}{(t-\tau)^{r+1/2b}}\Bigg(y_r-\eta_r+(t-\tau)y_{r-1}^{(r)}+\frac{(t-\tau)^2}{2!}y_{r-2}^{(r)}+\cdots+\frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}y_1^{(r)}+$$

$$+x^{(r)}\frac{(t-\tau)^r}{r!}\Bigg)\Bigg),$$

де $\Omega(t,\tau;z_1,\dots,z_N)$ *– ціла функція аргументів* $z_1,\dots,z_N$ *порядку зростання* $q=\frac{2b}{2b-1}$ *при комплексних значеннях цих аргументів і того ж самого порядку спадання при їх дійсних значеннях. Для похідних справджується оцінка*

$$|D_x^kD_y^lZ(t,X;\tau,E)| \le C_{kl}(t-\tau)^{-\frac{M+|k|+\tilde{l}}{2b}}\exp\left\{-c_1\left[\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^q+\right.\right.$$

$$+\left(\frac{|y_1-\eta_1+x^{(1)}(t-\tau)|}{(t-\tau)^{1+1/2b}}\right)^q+\cdots+\left(\Big|y_r-\eta_r+(t-\tau)y^{(r)}_{r-1}+\frac{(t-\tau)^2}{2!}y^{(r)}_{r-2}+\cdots+\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}y^{(r)}_1+\frac{x^{(r)}(t-\tau)^r}{r!}\Big|\,(t-\tau)^{-\left(r+\frac{1}{2b}\right)}\right)^q\right]\right\},$$

де C_{kl}, c_1 *– додатні сталі, які залежать від* $\sup|a_k(t)|$, T, n, $m_1,\ldots,m_r$, δ, $|k|=k_1+\cdots+k_n$, $\tilde{l}=\sum_{j=1}^{r}|l_j|(2bj+1)$, $t>\tau\geq 0$, $X,E\subset\mathbb{R}^N$.

У випадку $b=1$ цей результат одержаний в [2], при $r=2$ – в [1].

1. *Малицкая А. П.* Фундаментальные решения одного класса вырождающихся параболических уравнений // Приближенные методы интегрирования дифференц. уравнений. – Киев: Киев. педин-т, 1973. – С. 109–130.
2. *Малицька Г. П.* Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика – 2000. – № 411. – С. 221–228.
3. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ПО ПРОИЗВОЛЬНОМУ КОЛИЧЕСТВУ ГРУПП ПЕРЕМЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА КОЛМОГОРОВА ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Построено и исследовано фундаментальное решение задачи Коши для вырождающегося по произвольному количеству групп переменных параболического уравнения типа Колмогорова произвольного порядка.

ON FUNDAMENTAL SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR DEGENERATED ACCORDING TO ARBITRARY NUMBER OF GROUPS OF VARIABLES OF PARABOLIC KOLMOGOROW-TYPE EQUATION OF ANY ORDER

We constructed and researched the fundamental solution of Cauchy problem Kolmogorow's type parabolic equation of any order with degeneration by any number of groups of variables.

Прикарпат. ун-т
ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
09.09.03