УДК 517.95

І. В. Когут

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛОКАЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-СИМВОЛЬНИМ МЕТОДОМ

За допомогою диференціально-символьного методу досліджено нелокальну крайову задачу для однорідної системи рівнянь із частинними похідними першого порядку за часом і, загалом, нескінченного порядку за просторовими змінними. Побудовано розв'язок цієї задачі у класах вектор-функцій, компоненти яких для фіксованого t *є квазіполіномами спеціального вигляду. Запропоновано спосіб побудови часткового розв'язку задачі у класі його неєдиності.*

Задачі з нелокальними крайовими умовами моделюють багато важливих фізичних процесів. Такі задачі досліджувалися у численних працях (див. [1, 2, 6] та бібліографію в них). У праці [4] вперше за допомогою диференціально-символьного методу [5] було досліджено нелокальну крайову задачу для диференціального оператора першого порядку за часом та, загалом, нескінченного порядку за просторовими змінними. У роботі [3] досліджено аналогічну задачу для випадку системи рівнянь із частинними похідними першого порядку за часом, а саме: побудовано розв'язок задачі та доведено його єдиність у класі аналітичних функцій для випадку багатьох просторових змінних, а для випадку однієї просторової змінної доведено єдиність розв'язку у класі функцій, компоненти яких для фіксованого t є квазіполіномами спеціального вигляду. Досліджено також множину нетривіальних розв'язків однорідної системи рівнянь з однорідною нелокальною крайовою умовою. Пропонована робота присвячена поширенню цих результатів на випадок багатьох просторових змінних, а також побудові часткового розв'язку задачі за умови його неєдиності.

Вивчається нелокальна крайова задача

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x)\equiv\left[E_n\frac{\partial}{\partial t}-A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]U(t,x)=\mathbb{O}, \tag{1}$$

$$U(0,x)+\mu U(h,x)=\Phi(x), \tag{2}$$

де $t\in(0,h)$, $x\in\mathbb{R}^s$, $h\in\mathbb{R}$, $h>0$; $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – оператор-матриця порядку n, елементами якої є довільні диференціальні вирази зі сталими коефіцієнтами та цілими символами; $\Phi(x)=(\Phi_1(x),\Phi_2(x),\ldots,\Phi_n(x))^\tau$; $\mu\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$; E_n – одинична матриця порядку n; $\mathbb{O}=(0,0,\ldots,0)^\tau$, τ – символ транспонування.

Задача (1), (2) є, загалом, некоректною, оскільки існують нетривіальні розв'язки системи (1), що задовольняють однорідну нелокальну крайову умову

$$U(0,x)+\mu U(h,x)=\mathbb{O}. \tag{3}$$

Формальний розв'язок задачі (1), (2) має такий вигляд [3]:

$$U(t,x)=\left[\Phi^\tau\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\exp[\nu\cdot x]}{\Delta(\nu)}\widetilde{D}(\nu)B(t,\nu)\right\}\Big|_{\nu=\mathbb{O}}\right]^\tau, \tag{4}$$

де $\nu\cdot x=\sum\limits_{i=1}^{s}\nu_i x_i$; $\Delta(\nu)=\det D(\nu)$; $D(\nu)=E_n+\mu B(h,\nu)$; $\widetilde{D}(\nu)$ – приєднана матриця для $D(\nu)$; $B(t,\nu)=\widetilde{L}^\tau\left(\frac{d}{dt},\ \nu\right)[W(t,\nu)E_n]$; $\widetilde{L}(\lambda,\nu)$ – приєднана матриця для $L(\lambda,\nu)$; $W(t,\nu)$ – розв'язок задачі Коші

 ISSN 0130-9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2004. – 47, № 4. – С. 120-124.

$$\varphi\left(\frac{d}{dt},\ \nu\right)W(t,\nu)=0,\quad \frac{d^kW}{dt^k}(0,\nu)=\delta_{k,n-1},\quad k=\overline{0,n-1},$$

δ_{ij} – символ Кронекера; $\varphi(\lambda,\nu)$ – характеристичний поліном матриці $A(\nu)$, тобто $\varphi(\lambda,\nu)\equiv\det L\left(\lambda,\nu\right)=\lambda^n+\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j(\nu)\lambda^{n-j}$.

Виділення класів однозначної розв'язності задачі (1), (2) залежить від визначника $\Delta(\nu)$. Щодо цього визначника можливі такі три випадки:

1°) $\Delta(\nu)\equiv 0$;

2°) $\forall\nu\in\mathbb{C}^s\ \Delta(\nu)\neq 0$;

3°) $\exists\nu\in\mathbb{C}^s\ \Delta(\nu)=0$, причому $\Delta(\nu)\not\equiv 0$.

У випадку ***1***° задача (1), (2) є виродженою. У роботі [3] досліджено випадок ***2***° для $s\in\mathbb{N}$, а також випадок ***3***° для $s=1$.

Розглянемо випадок ***3***° для $s\in\mathbb{N}$. Такий випадок матимемо, наприклад, для $n=2$, $s=2$, $\mu=-1$, $h=1$, $A(\nu)=\begin{pmatrix}\nu_1^2+\nu_2+1 & 1\\ -1 & \nu_1^2+\nu_2-1\end{pmatrix}$. Тоді $\Delta(\nu)\equiv\left(1-\exp\left[\nu_1^2+\nu_2\right]\right)^2$.

У такому випадку розв'язок задачі (1), (2) існує, але не є єдиним, і тому обчислюється з точністю до розв'язків задачі (1), (3), тобто елементів ядра задачі (1), (2).

З'ясуємо вигляд елементів ядра задачі у класі квазіполіномів. Введемо позначення. Нехай $j,m,r\in\mathbb{Z}_+^s$; $x\in\mathbb{R}^s$; $\nu\in\mathbb{C}^s$, $D(\nu)$ – деяка гладка матриця. Тоді $j\leq n\Leftrightarrow j_i\leq n_i$, $i=\overline{1,s}$; $x^r=\prod\limits_{i=1}^{s}x_i^{r_i}$; $r!=\prod\limits_{i=1}^{s}r_i!$; $C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}, r\leq n$; $|r|=\sum\limits_{i=1}^{s}r_i$; $\frac{\partial^r}{\partial\nu^r}=\frac{\partial^{|r|}}{\partial\nu_1^{r_1}\partial\nu_2^{r_2}\ldots\partial\nu_s^{r_s}}$; $D^{(r)}(\nu)=\frac{\partial^r}{\partial\nu^r}D(\nu)$.

Будемо позначати через K_M множину квазіполіномів вигляду $f(x)=\sum\limits_{j=1}^{m}\exp\left[\alpha_j\cdot x\right]Q_j(x)$, де $\alpha_j=(\alpha_{j1},\alpha_{j2},\ldots,\alpha_{js})\in M\subseteq\mathbb{C}^s$, $m\in\mathbb{N}$, $\alpha_j\neq\alpha_k$ для $j\neq k$, $Q_j(x)$ – деякі поліноми.

Будемо шукати розв'язки задачі (1), (3) у вигляді

$$U(t,x)=\left[G^\tau\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\widetilde{L}^\tau\left(\frac{d}{dt},\ \nu\right)\left[W(t,\nu)E_n\right]\right\}\Bigg|_{\nu=\mathbb{O}}\right]^\tau, \tag{5}$$

де $G^\tau\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)=\left(G_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right),G_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right),\ldots,G_n\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\right)^\tau$ – невідомий диференціальний оператор-рядок.

Якщо $g(x)=\sum\limits_{j=1}^{m}\exp[\alpha_j\cdot x]Q_j(x)$, то розуміємо

$$g\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\zeta(\nu)\}\Big|_{\nu=\mathbb{O}}=\sum_{j=1}^{m}Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\zeta(\nu)\}\Big|_{\nu=\alpha_j}. \tag{6}$$

Розглянемо функцію $\Delta(\nu)$ та множину її нулів $P=\{\nu\in\mathbb{C}^s:\ \Delta\left(\nu\right)=0\}$.

Теорема 1. *Якщо вектор-функція* (5) *є розв'язком задачі* (1), (3) *і* $G_p(x)$, $p=\overline{1,n}$, *– квазіполіноми, то* $G_p\left(x\right)$, $p=\overline{1,n}$, *мають вигляд*

$$G_p(x)=\sum_{j=1}^{m_p}\exp\left[\alpha_{pj}\cdot x\right]Q_{pj}(x), \tag{7}$$

у якому $\alpha_{pj}\in P$ *і* $Q_{pj}(x)$ *– деякі поліноми,* $m_p\in\mathbb{N}$, $p=\overline{1,n}$.

Д о в е д е н н я. Нехай $G_r(x)\,, r=\overline{1,n}\,,$ – квазіполіноми вигляду (7). Аналогічно, як у [3], подамо $G(x)$ у вигляді

$$G(x)=\sum_{j=1}^{m}\exp\left[\alpha_j\cdot x\right]\sum_{|r|\le n_j}q_{jr}x^r,$$

де $\alpha_j\ne\alpha_l$ для $j\ne l$, $j,l=\overline{1,m}$; $r\in\mathbb{Z}_+^s$, $m\in\mathbb{N}$, $q_{jr}\in\mathbb{R}^n$, причому $\exists r_0$, $|r_0|=n_j:q_{jr_0}\ne\mathbb{O}$, $n_j\in\mathbb{N}$, $j=\overline{1,m}$. Нехай, крім того, функція (5) задовольняє умову (3), тобто $\left[G^\tau\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp\left[\nu\cdot x\right]D(\nu)\right\}\big|_{\nu=\mathbb{O}}\right]^\tau\equiv\mathbb{O}$. Останню рівність запишемо у вигляді

$$\sum_{j=1}^{m}\exp[\alpha_j\cdot x]\left(\sum_{|r|\le n_j}\sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{Z}_+^s\\ \gamma\le r}}C_r^\gamma D^{(\gamma)}(\alpha_j)q_{jr}x^{r-\gamma}\right)\equiv\mathbb{O}.$$

Враховуючи те, що $\alpha_j\ne\alpha_l$ для $j\ne l$, де $j,l=\overline{1,m}$, для довільного $j=\overline{1,m}$ матимемо

$$\sum_{|r|\le n_j}\sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{Z}_+^s\\ \gamma\le r}}C_r^\gamma D^{(\gamma)}(\alpha_j)q_{jr}x^{r-\gamma}\equiv\mathbb{O},\quad j=\overline{1,m}.$$

Функції $x^\gamma\,,\gamma\in\mathbb{Z}_+^s$, є лінійно незалежними, тому при перегрупуванні останньої суми вирази, що стоять біля цих функцій, повинні дорівнювати нулеві. Зокрема, очевидно, що при x^{r_0}, де $|r_0|=n_j$, матимемо $D^{(\mathbb{O})}(\alpha_j)\,q_{jr_0}=\mathbb{O}$. Остання рівність є однорідною системою лінійних алгебричних рівнянь. Ця система може мати ненульові розв'язки лише тоді, коли α_j є нулем функції $\Delta(\nu)$, тобто $\alpha_j\in P$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Позначимо через $A\left((0,h)\,,Y\right)$ клас аналітичних на $(0,h)$ за змінною t функцій, які для фіксованого $t\in(0,h)$ належать до Y.

Якщо $\Phi_p(x)$, $p=\overline{1,n}$, – довільні квазіполіноми, то формула (4) для знаходження розв'язку задачі (1), (2), взагалі кажучи, є незастосовною, оскільки знаменник, що в ній фігурує, може перетворюватися у нуль. Аналогічно до одновимірного випадку [3] сформулюємо теорему, що з'ясовує застосовність формули (4), коли $\Phi_p\in K_M$, $p=\overline{1,n}$, де M – деяка підмножина $\mathbb{C}^s$.

Теорема 2. *Нехай у нелокальній умові* (2) $\Phi_p\in K_{\mathbb{C}^s\setminus P}$, $p=\overline{1,n}$, *де* P – *множина нулів функції* $\Delta(\nu)$. *Тоді у класі вектор-функцій, компоненти яких належать до* $A\left((0,h)\,,K_{\mathbb{C}^s\setminus P}\right)$, *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який можна знайти за формулою* (4).

Д о в е д е н н я. Нехай $\Phi_p(x)=\sum\limits_{j=1}^{m_p}\exp\left[\alpha_{pj}\cdot x\right]Q_{pj}(x)$, де $\alpha_{pj}\in\mathbb{C}^s\backslash P$, $j=\overline{1,m_p}$, $p=\overline{1,n}$, $m_p\in\mathbb{N}$, $Q_{pj}(x)$ – поліноми. Подамо $\Phi(x)$ у вигляді

$$\Phi(x)=\sum_{j=1}^{m}\exp\left[\alpha_j\cdot x\right]\sum_{|r|\le n_j}q_{jr}x^r,$$

де $\alpha_j\ne\alpha_l$ для $j\ne l$, $j,l=\overline{1,m}$; $r\in\mathbb{Z}_+^s$; $m\in\mathbb{N}$; $q_{jr}\in\mathbb{R}^n$, причому $\exists r_0$, $|r_0|=n_j:q_{jr_0}\ne\mathbb{O}$; $n_j\in\mathbb{N}$, $j=\overline{1,m}$. Тоді, враховуючи (6), з формули (4) одержимо

$$U(t,x)=\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{|r|\le n_j}q_{jr}^\tau\,\frac{\partial^r}{\partial\nu^r}\left\{\frac{\exp[\nu\cdot x]}{\Delta(\nu)}\widetilde{D}(\nu)B(t,\nu)\right\}\bigg|_{\nu=\alpha_j}\right)\right]^\tau.$$

Оскільки $\alpha_j \in \mathbb{C}^s \backslash P$, то розв'язок задачі (1), (2) існує і зображається цією формулою. Крім того, компоненти знайденої вектор-функції $U(t,x)$, очевидно, є аналітичними за змінною t функціями і належать до $K_{\mathbb{C}^s \backslash P}$ для фіксованого $t \in (0,h)$, тобто $U_j \in A\left((0,h), K_{\mathbb{C}^s \backslash P}\right)$, $j = \overline{1,n}$.

Єдиність розв'язку задачі (1), (2) у виділеному класі можна легко довести від супротивного аналогічно до одновимірного випадку [3] з використанням теореми 1. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Якщо серед функцій $\Phi_p \in K_{\mathbb{C}^s}$, $p = \overline{1,n}$, хоча б одна належить до класу K_P, то формула (4) є непридатною для знаходження розв'язку задачі (1), (2). У цьому випадку розв'язок задачі існує, але не є єдиним і обчислюється з точністю до елементів ядра. Для знаходження часткового розв'язку у цьому випадку потрібно виділити у квазіполіномах $\Phi_p(x)$ ті доданки, які належать до $K_{\mathbb{C}^s \backslash P}$, окремо від тих, що належать до K_P. Для тих доданків, які належать до $K_{\mathbb{C}^s \backslash P}$, можна застосувати формулу (4), а для інших – формулу, подану в наступній теоремі.

Теорема 3. *Для* $\alpha \in P$ *позначимо* $\Omega_1(\alpha) = \left\{\omega \in \mathbb{Z}_+^s : \frac{\partial^\omega \Delta(\nu)}{\partial \nu^\omega}\Big|_{\nu=\alpha} \neq 0\right\}$. *Нехай в умові* (2) $\Phi(x) = \exp[\alpha \cdot x]Q(x)$, $\alpha \in P$; r_0 *– довільний вектор з* $\Omega_1(\alpha)$, *для якого* $|r_0| = \min\limits_{r \in \Omega_1(\alpha)} |r|$; $Q(x)$ *– поліном степеня* $m \in \mathbb{Z}_+$ *за сукупністю змінних, коефіцієнтами якого є вектор-стовпці розміру* n. *Зобразимо* $Q^\tau\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\frac{\exp[\nu \cdot x]}{\Delta(\nu)}\widetilde{D}(\nu)B(t,\nu)\right\}$ *у вигляді* $\frac{1}{[\Delta(\nu)]^{m+1}}\rho(t,x,\nu)$, *де* $\rho(t,x,\nu)$ *– деяка вектор-функція. Тоді частковий розв'язок задачі* (1), (2) *можна знайти за формулою*

$$U(t,x) = \frac{1}{\frac{\partial^{(m+1)r_0}}{\partial \nu^{(m+1)r_0}}[\Delta(\nu)]^{m+1}\Big|_{\nu=\alpha}} \frac{\partial^{(m+1)r_0}}{\partial \nu^{(m+1)r_0}}\rho^\tau(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\alpha}. \tag{8}$$

Д о в е д е н н я. Очевидно, що

$$\rho(t,x,\nu) = [\Delta(\nu)]^{m+1} Q^\tau\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\frac{\exp[\nu \cdot x]}{\Delta(\nu)}\widetilde{D}(\nu)B(t,\nu)\right\},$$

звідки маємо, що вектор-функція $\rho(t,x,\nu)$ для довільного ν є розв'язком системи (1). Крім того, ця вектор-функція, очевидно, є цілою за сукупністю параметрів $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$. Враховуючи, що $|r_0| = \min\limits_{r \in \Omega_1(\alpha)} |r|$, легко бачити, що знаменник у формулі (8) не дорівнює нулеві, тому вектор-функція (8) є розв'язком системи (1).

Покажемо, що вектор-функція (8) задовольняє умову (2). Використовуючи аналітичність вектор-функції $\rho(t,x,\nu)$ в околі точок $(0,x,\nu)$ та (h,x,ν), матимемо

$$\begin{aligned}
&U(0,x) + \mu U(h,x) = \\
&= \frac{1}{\frac{\partial^{(m+1)r_0}}{\partial \nu^{(m+1)r_0}}[\Delta(\nu)]^{m+1}\Big|_{\nu=\alpha}} \frac{\partial^{(m+1)r_0}}{\partial \nu^{(m+1)r_0}}\Big\{\rho^\tau(0,x,\nu) + \mu\rho^\tau(h,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} = \\
&= \frac{1}{\frac{\partial^{(m+1)r_0}}{\partial \nu^{(m+1)r_0}}[\Delta(\nu)]^{m+1}\Big|_{\nu=\alpha}} \frac{\partial^{(m+1)r_0}}{\partial \nu^{(m+1)r_0}}\left\{[\Delta(\nu)]^{m+1}\left[Q^\tau\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\Big\{\exp[\nu \cdot x]E_n\Big\}\right]^\tau\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha} = \\
&= \frac{1}{\frac{\partial^{(m+1)r_0}}{\partial \nu^{(m+1)r_0}}[\Delta(\nu)]^{m+1}\Big|_{\nu=\alpha}} \frac{\partial^{(m+1)r_0}}{\partial \nu^{(m+1)r_0}}\Big\{[\Delta(\nu)]^{m+1}\exp[\nu \cdot x]Q(x)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} = \\
&= \exp[\alpha \cdot x]Q(x).
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Зауваження. Використовуючи принцип накладання розв'язків лінійної системи рівнянь, за допомогою теореми 3 можна знаходити частковий розв'язок задачі (1), (2) для довільної вектор-функції $\Phi(x)$, компонентами якої є квазіполіноми.

1. *Антыпко И. И., Перельман М. А.* О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1976. – Вып. 16. – С. 98 – 109.
2. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
3. *Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М.* Диференціально-символьний метод розв'язування нелокальної крайової задачі для однорідної системи рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 3. – С. 25–31.
4. *Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М.* Диференціально-символьний метод розв'язування нелокальної крайової задачі для рівняння з частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 2. – С. 7–15.
5. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во нац. ун-ту «Львів. політехніка», 2002. – 292 с.
6. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

РЕШЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-СИМВОЛЬНЫМ МЕТОДОМ

С помощью дифференциально-символьного метода исследована нелокальная краевая задача для однородной системы уравнений в частных производных первого порядка по времени и, вообще говоря, бесконечного порядка по пространственным переменным. Построено решение этой задачи в классах вектор-функций, компоненты которых для фиксированного t суть квазиполиномы специального вида. Предложен способ построения частного решения задачи в классе его неединственности.

SOLVING A NON-LOCAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR HOMOGENEOUS SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY MEANS OF DIFFERENTIAL-SYMBOL METHOD

By means of differential-symbol method, we investigate the non-local boundary-value problem for a homogeneous system of partial differential equations of the first order in time and, in general, of infinite order in spatial variables. We construct the solution to this problem in the class of vector-functions, whose components, for fixed t, are quasi-polynomials of a special form. We propose the method for constructing a partial solution to the problem in the class of its non-uniqueness.

Ін-т прикл. математики та фундам. наук
нац. ун-ту «Львів. політехніка», Львів

Одержано
12.10.03