УДК 517.95

В. С. Ільків

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ У ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Вивчається задача з нелокальними умовами для систем диференціальних рівнянь із частинними похідними нескінченного порядку. Побудовано спеціальні простори (простори Соболева нескінченного порядку) та досліджено їхні властивості. Отримано умови існування та єдиності розв'язку нелокальної задачі у цих просторах.

В області $\Omega_T = (0,T) \times \Omega$, де Ω – p-вимірний тор, розглянемо задачу

$$L(\partial_t, D) \equiv \sum_{|\hat{s}|=0}^{\infty} A_{\hat{s}} \partial_t^{s_0} D^s u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

$$\partial_t^{\alpha} u|_{t=0} - \mu \partial_t^{\alpha} u|_{t=T} = 0, \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega$, $t \in (0,T)$, $\hat{s} = (s_0, s)$, $s = (s_1, \ldots, s_p)$, $|\hat{s}| = s_0 + |s|$, $|s| = s_1 + \cdots + s_p$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $D^s = D_1^{s_1} \cdots D_p^{s_p} = (-1)^{|s|} \partial^{|s|}/\partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}$; $A_{\hat{s}}$ – матриці порядку m із комплексними елементами, μ – ненульове комплексне число. Шуканий розв'язок $u = u(t,x)$ і задана функція $f = f(t,x)$ є вектор-функціями розміру m.

Задача (1), (2) для випадку одного диференціального рівняння скінченного порядку вивчалася у роботі [6], а для нескінченного порядку – у роботі [7].

Встановлено [2, 6], що функції $v_{kr}(t,x) = e^{\tau(r)t + i(k,x)}$, де $\tau(r) = -\ln\mu/T + i2\pi r/T$, $(k,x) = k_1 x_1 + \cdots + k_p x_p$, а $\ln\mu$ – головне значення логарифма числа μ, при $(k,r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ задовольняють умову (2) і утворюють базу Ріса у просторі $L_2(\Omega_T)$. Тому розв'язність задачі (1), (2) для рівняння чи системи рівнянь скінченного порядку розглядається у просторах Соболєва скінченного порядку $W^q(\Omega_T)$, де $q \in \mathbb{R}$, які утворюються поповненням скінченних вектор-сум $\sum u_{kr} v_{kr}(t,x)$ за нормою $\|u\|_q^2 = \sum (\tilde{k}^2 + r^2)^q u_{kr}^* u_{kr}$. Тут сума розповсюджується, як і суми нижче (якщо не вказано інше), на всі цілочислові вектори (k,r), $\tilde{k}^2 = 1 + k_1^2 + \cdots + k_p^2$, а зірочка означає операцію ермітового спряження матриці. Розв'язність задачі (1), (2) для рівняння нескінченного порядку вивчається у спеціальних просторах $W^{\pm\infty}\{A_{\hat{s}}\}$, введених у роботі [7]. Уперше такі простори нескінченного порядку ввів і дослідив Ю. А. Дубінський [3–5] для задачі Діріхле та періодичної задачі для рівнянь нескінченного порядку еліптичного та гіперболічного типів.

Для побудови просторів $W^{\pm\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ у випадку системи диференціальних рівнянь нескінченного порядку (1) розглянемо для кожного вектора $(k,r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ матрицю $L_{kr} = L\big(\tau(r), k\big)$ і матрицю $(L_{kr}^* L_{kr})^{1/2}$, де остання позначає квадратний корінь із ермітової невід'ємно визначеної матриці $L_{kr}^* L_{kr}$ і має власні значення $\lambda_1(kr) \geq \cdots \lambda_m(kr) \geq 0$ такі, що $\lambda_{m_1'}(kr) = \infty > \lambda_{m_1'+1}(kr)$ і $\lambda_{m_1}(kr) > \lambda_{m_1+1}(kr) = 0$ для деяких чисел $m_1' = m_1'(k,r)$, $m_1 = m_1(k,r)$, $0 \leq m_1' \leq m_1 \leq m$. Під числом $\lambda_j(k,r)$ розуміємо границю при $n \to \infty$ послідовності $\lambda_{jn}(k,r)$ власних значень матриці $\left(\sum\limits_{|\hat{s}|=0}^{n} A_{\hat{s}}^* \big(\tau^*(r)\big)^{s_0} k^s \sum\limits_{|\hat{s}|=0}^{n} A_{\hat{s}} \big(\tau(r)\big)^{s_0} k^s\right)^{1/2}$ і вважаємо, що $\lambda_j(k,r) = \infty$, коли послідовність $\lambda_{jn}(k,r)$ розбігається. Числа $\lambda_j(k,r)$ є також власними значеннями матриці $(L_{kr} L_{kr}^*)^{1/2}$. Позначимо через ω_{jkr} та γ_{jkr}

ортонормальні власні вектори матриць L_{kr}^* та L_{kr}, що відповідають власному значенню $\lambda_j(k,r)$, $j = m_1'+1,\dots,m$. Нехай ортопроектори P_{0kr}^+ та $P_{\infty kr}^+$ визначаються формулами $P_{0kr}^+ = \sum_{\alpha=m_1+1}^{m} \omega_{jkr}\omega_{jkr}^*$ та $P_{\infty kr}^+ = \sum_{\alpha=1}^{m_1'+1} \omega_{jkr}\omega_{jkr}^*$ ($P_{0kr}^+ = 0$ при $m_1 = m$, $P_{\infty kr}^+ = 0$ при $m_1' = 0$), а ортопроектори P_{0kr}^- та $P_{\infty kr}^-$ – такими ж формулами із заміною ω на γ. Ортопроектори P_0^+ і P_∞^+, які діють у просторах функцій $u = \sum u_{kr}v_{kr}(t,x)$, визначаються так:

$$P_0^+ u = \sum P_{0kr}^+ u_{kr}v_{kr}(t,x), \qquad P_\infty^+ u = \sum P_{\infty kr}^+ u_{kr}v_{kr}(t,x).$$

Аналогічно діють ортопроектори P_0^- і P_∞^-.

Означимо тепер соболєвський простір нескінченного порядку $W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ як поповнення множини скінченних вектор-сум $u(t,x) = \sum u_{kr}v_{kr}(t,x)$ за нормою

$$\|u\|_\infty^2 = \|(P_\infty^+ + P_0^+)u\|_0^2 + \sum u_{kr}^*\big(L_{kr}^*(I - P_{\infty kr}^-)L_{kr}\big)^{1/2} u_{kr}. \tag{3}$$

Цей простір є нескінченновимірним і щільним у просторі $W^0(\Omega_T)$, оскільки для довільних векторів $u_{kr} \in \mathbb{R}$ і $(k,r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ функція $u_{kr}v_{kr}(t,x)$ належить до простору $W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$.

Якщо $P_\infty^+ = P_0^+ = 0$ і всі матриці L_{kr} – ермітові, то норма у просторі $W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ є енергетичною, тобто $\|u\|_\infty^2 = \big(L(\partial_t, D)u, u\big)_0 = \sum u_{kr}^* L_{kr} u_{kr}$, де $(\cdot,\cdot)_0$ – скалярний добуток у просторі $W^0(\Omega_T)$.

Спряженим до простору $W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ вважаємо простір $W^{-\infty}\{A_{\hat{s}}\}$, який утворений поповненням множини скінченних вектор-сум $f(t,x) = \sum f_{kr}v_{kr}(t,x)$ за нормою

$$\|f\|_{-\infty}^2 = \|(P_\infty^- + P_0^-)f\|_0^2 + \sum f_{kr}^*\big(L_{kr}^{*\sharp}(I - P_{\infty kr}^+)L_{kr}^\sharp\big)^{1/2} f_{kr}, \tag{4}$$

де $L_{kr}^\sharp$ означає псевдообернену до матриці L_{kr} матрицю [1].

Виберемо вектори ω_{jkr} та γ_{jkr}, $j = 1,\dots,m_1'$, так, щоб утворені матриці $\Omega_{kr} = (\omega_{1kr},\dots,\omega_{mkr})$ та $\Gamma_{kr} = (\gamma_{1kr},\dots,\gamma_{mkr})$ були унітарними. Тоді число $\langle f,u\rangle = \sum u_{kr}^*\Omega_{kr}\Gamma_{kr}^* f_{kr}$ є визначеним для всіх елементів $u \in W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$, $f \in W^{-\infty}\{A_{\hat{s}}\}$, причому

$$|\langle f,u\rangle| \le \|u\|_\infty^2 \|f\|_{-\infty}^2. \tag{5}$$

Отже, елемент $f \in W^{-\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ є лінійним неперервним функціоналом на $W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$, результат дії якого на елемент $u \in W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ є числом $\langle f,u\rangle$.

Якщо $u \in W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$, то $L(\partial_t, D)u \in W^{-\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ і справджується рівність

$$\|L(\partial_t, D)u\|_{-\infty}^2 = \|u\|_\infty^2 - \|(P_\infty^+ + P_0^+)u\|_0^2.$$

Під розв'язком задачі (1), (2) розуміємо функцію $u \in W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$, для якої $P_\infty^+ = 0$ і виконується рівність $\langle L(\partial_t, D)u, w\rangle = \langle f, w\rangle$ для всіх функцій $w \in W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$.

Теорема 1. *Розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ *існує тоді й тільки тоді, коли* $f \in W^{-\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ *та* $(P_\infty^- + P_0^-)f = 0$, *причому*

$$\|(I - P_0^+)u\|_\infty = \|f\|_{-\infty} = \|(I - P_\infty^- - P_0^-)f\|_{-\infty}.$$

Якщо $P_\infty^+ + P_0^+ = 0$, *то розв'язок єдиний.*

Д о в е д е н н я. Розв'язність задачі (1), (2) еквівалентна розв'язності системи алгебричних рівнянь $L_{kr}u_{kr} = f_{kr}$ при умові $P_{\infty kr}^+ u_{kr} = 0$ для всіх векторів $(k,r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$. Нехай u – розв'язок задачі (1), (2). Тоді

$$f = Lu = L(I - P_{\infty kr}^+)(I - P_0^+)u = (I - P_{\infty kr}^-)(I - P_0^-)Lu \in W^{-\infty}\{A_{\hat{s}}\}$$

і для кожної функції $w \in W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ отримаємо

$$\langle (P^{-}_{\infty kr} + P^{-}_{0})f, w\rangle = \langle (P^{-}_{\infty kr} + P^{-}_{0})(I - P^{-}_{\infty kr})(I - P^{-}_{0})L(\partial_t, D)u, w\rangle = 0 = \langle 0, w\rangle.$$

Рівність норм $\|(I - P^{+}_{0})u\|_{\infty} = \|f\|_{-\infty}$ випливає із формули (5). Навпаки, якщо $f \in W^{-\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ і $(P^{-}_{\infty} + P^{-}_{0})f = 0$, то

$$u_{kr} = (I - P^{+}_{\infty kr})u_{kr} = [(I - P^{-}_{\infty kr})L_{kr}]^{\sharp} f_{kr} + P^{+}_{0kr}C_{kr},$$

де $C_{kr} \in \mathbb{C}^m$ – довільний вектор, звідки $(I - P^{+}_{0})u = (I - P^{-}_{\infty} - P^{-}_{0})f$. Якщо проектор $P^{+}_{\infty} + P^{+}_{0} = 0$, то існує матриця L^{-1}_{kr} і $u_{kr} = L^{-1}_{kr} f_{kr}$. У цьому випадку $\|u\|_{\infty} = \|f\|_{-\infty}$ і оператор задачі (1), (2) є бієктивним відображенням простору $W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ на простір $W^{-\infty}\{A_{\hat{s}}\}$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Теорема 2. *Проектори P^{-}_{∞} та P^{+}_{∞} справджують умову $P^{-}_{\infty} = P^{+}_{\infty} = 0$ тоді й тільки тоді, коли всі елементи матриці L_{kr} є скінченними для кожного вектора $(k, r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$.*

Д о в е д е н н я. Нехай для деякого вектора $(k, r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ елемент $\big(L_{kr}\big)_{ij} = e^{*}_{i} L_{kr} e_j$ матриці L_{kr} є розбіжним степеневим рядом, тобто $\big|\big(L_{kr}\big)_{ij}\big| = \infty$. Тоді отримуємо таку оцінку:

$$\lambda^2_1 = \max_{\omega \in \mathbb{C}^m,\, \omega \neq 0} \frac{\omega^{*} L^{*}_{kr} L_{kr} \omega}{\omega^{*}\omega} \geq e^{*}_{j} L^{*}_{kr} L_{kr} e_j = \sum_{\alpha=1}^{m} \big|\big(L_{kr}\big)_{\alpha j}\big|^2 = \infty.$$

Це й означає, що $P^{-}_{\infty} \neq 0$ і $P^{+}_{\infty} \neq 0$.

Обернене твердження є очевидним. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Розглядаємо надалі такі матричні коефіцієнти $A_{\hat{s}}$, для яких $P^{-}_{\infty} = P^{+}_{\infty} = 0$. Знайдемо відповідність між соболєвськими просторами нескінченного порядку $W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ і $W^{-\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ та скінченного порядку $W^q(\Omega_T)$. Нехай матриця $a_n(0)$ є коефіцієнтом при похідній ∂t^n_t, а матриці $a_n(l)$, $l = 1, \ldots, p$, – при похідних D^n_l відповідно. Складемо із елементів цих матриць вектор a_n розміру $(p+1)m^2$. Достатньо вважати, що, що всі компоненти цього вектора належать одиничному кругу $B \subset \mathbb{C}$ із центром у початку координат. При $n = 0$ відповідний вектор a_0 утворюють елементи матриці A_0. Простори $W^{\pm\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ вважаємо залежними тільки від вектора a_n при всіх інших фіксованих матрицях $A_{\hat{s}}$ і фіксованому $n \geq 0$.

Теорема 3. *Нехай $0 < \varepsilon < 1$, $n \geq 0$ і $q < n/2 - (p+1)/4$ є фіксованими числами. Тоді для всіх векторів $a_n \in B^{(p+1)m^2} \setminus B_{n\varepsilon}$, де $B_{n\varepsilon} \subset B^{(p+1)m^2}$ і $\operatorname{mes} B_{n\varepsilon} \leq \varepsilon$ (при $n = 0$ $B_{n\varepsilon} \subset B^{m^2}$), справджується вкладення просторів $W^{-q}(\Omega_T) \subset W^{-\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ та оцінка $\|f\|_{-\infty} \leq C\|f\|_{-q}$, де f є довільним елементом із простору $W^{-q}(\Omega_T)$, а $C = C(n, q, p, m, \mu, T) > 0$ – деякою сталою.*

Д о в е д е н н я. Нехай $\mu \neq 1$ і $n > 0$ (інші часткові випадки розглядаються аналогічно). Для множини $B_{n\varepsilon}$ векторів $a_n \in B^{(p+1)m^2}$ хоча б для одного вектора $(k, r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ виконується нерівність $\|L^{-1}_{kr}\| > mC_q(\tilde{k}^2 + r^2)^{-q}/\sqrt{\varepsilon}$, де C_q – деяка стала, або матриця L^{-1}_{kr} не існує. Оскільки матриця L_{kr} лінійно залежить від компонент вектора a_n, то міра множини $B'_{n\varepsilon}$ векторів $a_n \in B_{n\varepsilon}$, для яких хоча б для одного вектора $(k, r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ не існує матриця L^{-1}_{kr}, тобто $\det L_{kr} = 0$, дорівнює нулеві.

Зафіксуємо вектор $(k, r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ і числа i, j такі, що $1 \leq i, j \leq m$. Нехай $B_{n\varepsilon krij}$ – множина векторів $a_n \in B^{(p+1)m^2} \setminus B'_{n\varepsilon}$, для яких елемент $\big(L^{-1}_{kr}\big)_{ij}$ оберненої матриці L^{-1}_{kr} справджує оцінку

$$\|\big(L^{-1}_{kr}\big)_{ij}\| > C_q(\tilde{k}^2 + r^2)^{-q}/\sqrt{\varepsilon}. \tag{6}$$

Якщо L_{kr}^{ij} – алгебричне доповнення елемента $(L_{kr})_{ij}$ матриці L_{kr}, то $(L_{kr}^{-1})_{ij} = L_{kr}^{ij}/\det L_{kr}$ і $\det L_{kr} = \sum_{\alpha=1}^{m} (L_{kr})_{\alpha j} L_{kr}^{\alpha j}$. Нехай $|k_l| = \max(|k_1|, \ldots, |k_p|)$. Тоді під множиною $B'_{n\varepsilon krij}$ розуміємо множину чисел $a_{nji}(0) \in B$ при $|r| \geq |k_l|$ або чисел $a_{nji}(l) \in B$ при $|r| < |k_l|$, для яких виконується (6) при інших фіксованих компонентах вектора a_n.

Оцінимо міру множини $B'_{n\varepsilon krij}$. Якщо $L_{kr}^{ji} = 0$, то нерівність (6) не виконується і $\operatorname{mes} B'_{n\varepsilon krij} = 0$, інакше

$$(L_{kr}^{-1})_{ij} = \Big((L_{kr})_{ji} + \sum_{\alpha=1,\,\alpha\neq j}^{m} (L_{kr})_{\alpha i} L_{kr}^{\alpha i}/L_{kr}^{ji} \Big)^{-1}$$

і нерівність (6) еквівалентна нерівності $|\theta^n a_{ji}(\beta) + \Delta_{krji}(\beta)| < \sqrt{\varepsilon}(\tilde{k}^2 + r^2)^q/C_q$, де $\theta = \tau(r)$, $\beta = 0$ при $|r| \geq |k_l|$, $\theta = \tau(r)$, $\beta = 0$ при $|r| < |k_l|$, а числа $\Delta_{krji}(\beta)$ не залежать від $a_{ji}(\beta)$. Тому міра множини $B'_{n\varepsilon krij}$ не перевищує найбільшого із чисел $\pi\varepsilon(\tilde{k}^2 + r^2)^{2q}|\tau(r)|^{-2n}/C_q^2$ та $\pi\varepsilon(\tilde{k}^2 + r^2)^{2q}|k_l|^{-2n}/C_q^2$:

$$\operatorname{mes} B'_{n\varepsilon krij} = \pi\varepsilon(p + 2^n)\big(\max(|2\pi - \arg\mu|, |\ln\mu|)/T\big)^{-2n}(\tilde{k}^2 + r^2)^{2q-n}|k_l|^{-2n}/C_q^2.$$

Таку оцінку отримаємо і для міри множини $B_{n\varepsilon krij}$, інтегруючи по області всіх фіксованих компонент вектора a_n. Зауваживши, що $B_{n\varepsilon} \subset \bigcup \bigcup_{i,j=1}^{m} B_{n\varepsilon krij} \bigcup B'_{n\varepsilon}$, отримаємо оцінку $\operatorname{mes} B_{n\varepsilon} \leq \sum \sum_{i,j=1}^{m} \operatorname{mes} B_{n\varepsilon krij} = \varepsilon$, належним чином вибравши сталу C_q.

Отже, для всіх $a_n \in B^{(p+1)m^2} \setminus B_{n\varepsilon}$ справджується протилежна нерівність

$$\|L_{kr}^{-1}\| \leq mC_q(\tilde{k}^2 + r^2)^{-q}/\sqrt{\varepsilon}, \qquad (k, r) \in \mathbb{Z}^{p+1}. \tag{7}$$

Враховуючи (7) і те, що матриця $S_{kr} = (L_{kr}L_{kr}^*)^{-1/2} L_{kr}^{*-1}$ є унітарною, для всіх $a_n \in B^{(p+1)m^2} \setminus B_{n\varepsilon}$ отримаємо при $C^2 = mC_q/\sqrt{\varepsilon}$ шукану нерівність:

$$\|f\|_{-\infty}^2 = \sum f_{kr}^* S_{kr} L_{kr}^{-1} f_{kr} \leq \frac{mC_q}{\sqrt{\varepsilon}} \sum (\tilde{k}^2 + r^2)^{-q} f_{kr}^* f_{kr} = C^2\|f\|_{-q}^2.$$

Теорему доведено. ◇

Якщо виконуються умови теореми 3, то справджуються такі три наслідки.

Наслідок 1. *Простір $W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$ вкладається у простір $W^q(\Omega_T)$ і виконується нерівність $\|u\|_q \leq C\|u\|_\infty$ для всіх функцій $u \in W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$.*

Д о в е д е н н я. Нехай $u \in W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$. Тоді $\|u\|_q^2 = \sum(\tilde{k}^2 + r^2)^q y_{kr}^* L_{kr}^{-1} S_{kr}^* y_{kr}$, де $y_{kr} = (L_{kr}^* L_{kr})^{-1} u_{kr}$. Використавши нерівність (7) і унітарність матриці S_{kr} отримаємо, що $\|u\|_q^2 \leq C^2 \sum y_{kr}^* y_{kr} = C^2\|u\|_\infty^2$. Наслідок доведено. ◇

Наступні два наслідки стосуються розв'язності задачі (1), (2) у просторах Соболєва скінченного порядку та випадку системи (1) скінченного порядку.

Наслідок 2. *Для довільної функції $f \in W^{-q}(\Omega_T)$ існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *із простору $W^q(\Omega_T)$.*

Д о в е д е н н я. Якщо $f \in W^{-q}(\Omega_T)$, то за теоремою 3 функція $f \in W^{-\infty}\{A_{\hat{s}}\}$. Із теореми 1 випливає існування і єдиність розв'язку задачі (1), (2) із простору $W^{+\infty}\{A_{\hat{s}}\}$, який за наслідком 1 належить також до простору $W^q(\Omega_T)$. ◇

Наслідок 3. *Нехай* $A_{\hat{s}} = 0$ *при* $|\hat{s}| > n$ *і* $f \in W^l(\Omega_T)$ *при* $l > (p+1)/2$. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $W^n(\Omega_T)$.

Д о в е д е н н я. Позначимо $\tilde{f}(t,x) = \sum(\tilde{k}^2 + r^2)^{n/4+l/4} f_{kr} v_{kr}(t,x)$. Тоді, очевидно, функція $\tilde{f} \in W^{l/2-n/2}(\Omega_T)$. За наслідком 2 існує єдиний розв'язок $\tilde{u}(t,x) = \sum(\tilde{k}^2 + r^2)^{n/4-l/4} u_{kr} v_{kr}(t,x)$ задачі (1), (2) із правою частиною $\tilde{f}$, тому за наслідком 2 маємо $\|u\|_n^2 = \|\tilde{u}\|_{n/2-l/2}^2 \le C^2 \|\tilde{f}\|_{l/2-n/2}^2 = \|f\|_l^2$, що й треба довести. $\diamondsuit$

1. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
2. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
3. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы математики. – М.: ВИНИТИ, 1976. – **9**. – С. 5–130.
4. *Дубинский Ю. А.* Об одном методе решения дифференциальных уравнений с частными производными // Докл. АН СССР. – 1981. – **258**, № 4. – С. 780–784.
5. *Дубинский Ю. А.* Пространства Соболева бесконечного порядка на торе и некоторые вопросы теории периодических решений дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1975. – **222**, № 2. – С. 269–272.
6. *Илькив В. С.* Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 5. – С. 15–19.
7. *Илькив В. С.* Нелокальная краевая задача для уравнений в частных производных бесконечного порядка // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 4. – С. 498–502.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Изучается задача с нелокальными условиями для систем дифференциальных уравнений с частными производными бесконечного порядка. Построены специальные пространства (пространства Соболева бесконечного порядка) и исследованы их свойства. Получены условия существования и единственности решения нелокальной задачи в этих пространствах.

NON-LOCAL BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL SYSTEMS IN SOBOLEV SPACES OF INFINITE ORDER

In the paper the boundary-value problem with non-local conditions for partial differential systems of infinite order is considered. We construct some special spaces (the Sobolev spaces of infinite order) and investigate their properties. Conditions of existence and uniqueness of solution to the non-local problem in the Sobolev spaces of infinite order have been obtained.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
16.10.03