УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен [1] , І. П. Мединський [2]

ЛОКАЛЬНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОЇ $\overrightarrow{2b}$-ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ЗІ СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Доведено теорему про коректну розв'язність задачі Коші для лінійної системи та встановлено умови локальної розв'язності для квазілінійної $\overrightarrow{2b}$ -параболічної системи зі слабким виродженням на початковій гіперплощині.

Дослідження задачі Коші для квазілінійної параболічної системи, що містить групу старших членів, які залежать від усіх аргументів, розв'язку та його похідних до порядку $2b-1$ включно, проводились С. Д. Ейдельманом і С. Д. Івасишеним. Результати цих досліджень для квазілінійних параболічних за Петровським систем наведено у [8], а для $\overrightarrow{2b}$ -параболічних систем – у [4]. У цих працях розглядались і нелінійні параболічні системи загального вигляду. Показано, що такі системи еквівалентні квазілінійним параболічним системам описаної вище структури. Встановлення локальної розв'язності квазілінійної параболічної системи передбачає такі кроки: ***1***) побудова послідовності функцій, які є розв'язками відповідних лінійних задач Коші; ***2***) одержання оцінок таких розв'язків на підставі інтегральних зображень і властивостей відповідної фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК); ***3***) доведення збіжності послідовностей розв'язків та їхніх похідних; ***4***) доведення єдиності побудованого розв'язку. Для реалізації цих кроків необхідні результати для лінійних параболічних систем із виродженням на початковій гіперплощині, які наведено в працях [1–3, 5–7]. Класи розв'язків, у яких встановлено локальну розв'язність задачі Коші для квазілінійної системи, є вужчими, ніж відповідні класи в лінійному випадку. Якщо в лінійному випадку ці класи містять зростаючі за x функції, то у квазілінійному – тільки обмежені. Висота шару, в якому будується розв'язок, береться настільки малою, щоб забезпечити збіжність послідовностей розв'язків та їхніх похідних. Локальну розв'язність квазілінійної параболічної системи встановлено у [7]. Викладу аналогічних результатів для квазілінійних $\overrightarrow{2b}$ -параболічних систем зі слабким виродженням на початковій гіперплощині присвячена ця стаття.

1. Означення і припущення. Крім позначень з [6], використовуватимемо ще й такі позначення: $D_x^{2b-1}u \equiv \{\partial_x^k u_j \mid \|k\| \le 2b-1, j \in \mathbb{N}_0\}$, якщо $u \in \mathbb{C}_N$, де $\mathbb{N}_0 \equiv \{1,...,N\}$; L – кількість елементів множини $D_x^{2b-1}u$; $\mathbb{N}_1 \equiv \{1,...,L\}$; $G \equiv \{y \in \mathbb{R}^L \bigm| |y_j| \le R, j \in \mathbb{N}_1\}$, де R – додатна стала; $Q_H \equiv \{(t,x,y) \bigm| (t,x) \in \in \Pi_H, y \in G\}$.

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$\bigl(\alpha(t) I\partial_t - \beta(t) \sum_{\|k\|=2b} a_k(t,x,D_x^{2b-1}u)\partial_x^k - \\ - a_0(t,x,D_x^{2b-1}u)\bigr)u(t,x) = f(t,x,D_x^{2b-1}u), \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(t,x)\bigr|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

за таких припущень:

$\mathbf{K_1}$) вираз

$$\bigl(I\partial_t - \sum_{\|k\|=2b} a_k(t,x,y)\partial_x^k\bigr)$$

рівномірно параболічний за С. Д. Ейдельманом в $Q_{[0,T]}$;

K$_2$) коефіцієнти $a_k : Q_{[0,T]} \to C_{NN}$, $\|k\| = 2b$, обмежені, неперервні за змінною t рівномірно щодо x та y, задовольняють у $Q_{[0,T]}$ рівномірну умову Гельдера за x з показником $\gamma \in (0,1)$ та умову Ліпшиця за змінною y;

K$_3$) $\exists C > 0 \ \ \forall \{t,t'\} \subset [0,T]$, $t < t'$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, y \in G$, $\forall\, k$, $\|k\| = 2b$: $|\Delta_t^{t'} a_k(t,x,y)| \le C(A(t',t))^{\gamma/(2b)}$;

K$_4$) $\exists \gamma_0 \in (0,1)$, $\exists M > 0 \ \ \forall t \in (0,T] \ : \int_0^t (B(t,\tau))^{-1+\gamma_0/(2b)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \le M$.

Стосовно функції $f : Q_{[0,T]} \to C_N$ припускатимемо виконаними такі умови:

F$_1$) Функція f неперервна та обмежена в $Q_{[0,T]}$, тобто
$\exists\, C > 0 \ \ \forall\, (t,x,y) \in Q_{[0,T]} : \ |f(t,x,y)| \le C$;

F$_2$) $\exists\, C > 0 \ \forall\, \{(t,x,y),(t,x',y)\} \subset Q_{[0,T]}$:
$|\Delta_x^{x'} f(t,x,y)| \le Cp_0(x,x')^\lambda$, $\lambda \in (0,1)$;

F$_3$) $\exists\, C > 0 \ \forall\, \{(t,x,y),(t,x,y')\} \ \subset Q_{[0,T]} : \ |\Delta_y^{y'} f(t,x,y)| \le Cp_0(y,y')$.

Клас функцій, які задовольняють серію умов **F$_1$** – **F$_3$** з певним λ позначатимемо через $\mathcal{F}^\lambda$.

Поряд з (1) розглянемо лінійну систему

$$\big(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t) \sum_{0<\|k\|\le 2b} a_k(t,x)\partial_x^k - a_0(t,x)\big)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \quad (3)$$

2. Коректна розв'язність задачі Коші. Розглядатимемо задачу Коші (3), (2) для слабко виродженої системи. Апріорні оцінки, які доведено в [6], застосовуються тут для встановлення класів коректності розв'язків такої задачі Коші.

Теорема 1. *Нехай для слабко виродженої системи* (3) *виконуються відповідні умови* **K$_1$** – **K$_3$** *з деяким* $\gamma \in (0,1)$, *умова* **K$_4$** *– з* $\gamma_0 < \gamma$, $A(T,0) < \infty$, *функція* $f \in C_{0,0}^{\gamma,0}$ *і* $\varphi \in C^{2b+\gamma}$. *Тоді класом коректності задачі* (3), (2) *є простір* $U^{\gamma,\gamma-\gamma_0}$.

Д о в е д е н н я. Оскільки виконуються умови теореми з праці [6], то для доведення теореми досить встановити існування регулярного розв'язку задачі (3), (2), який належить до класу $U_0^{0,0}$. Для цього зробимо заміну невідомої функції за формулою $u(t,x) = v(t,x) + \varphi(x)$, $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$, і задачу (3),(2) зведемо до такої задачі:

$$\big(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t) \sum_{0<\|k\|\le 2b} a_k(t,x)\partial_x^k - a_0(t,x)\big)v(t,x) =$$

$$= f(t,x) + \beta(t) \sum_{0<\|k\|\le 2b} a_k(t,x)\partial_x^k\varphi(x) + a_0(t,x)\varphi(x), \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (4)$$

$$v(t,x)\big|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (5)$$

Як і раніше, доводимо, що регулярним розв'язком задачі (4), (5) є функція

$$v(t,x) = \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)(f(\tau,\xi) + a_0(\tau,\xi)\varphi(\xi) +$$

$$+\beta(\tau) \sum_{0<\|k\|\le 2b} a_k(\tau,\xi)\partial_\xi^k\varphi(\xi))d\xi, \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

а тоді функція

$$u(t,x)=\varphi(x)+\int_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)(f(\tau,\xi)+$$

$$+\beta(\tau)\sum_{0<\|k\|\le 2b}a_k(\tau,\xi)\partial_\xi^k\varphi(\xi)+a_0(\tau,\xi)\varphi(\xi))d\xi,\qquad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},$$

є регулярним розв'язком задачі (3), (2).

На підставі припущень теореми функція

$$(f(\tau,\xi)+\beta(\tau)\sum_{0<\|k\|\le 2b}a_k(\tau,\xi)\partial_\xi^k\varphi(\xi)+$$

$$+a_0(\tau,\xi)\varphi(\xi)),\qquad (\tau,\xi)\in\Pi_{(0,T]},$$

належить до простору $C^{\gamma,0}_{0,0}$. Зважаючи на лему 1 з [6] одержуємо, що u належить до $U^{0,0}_0$. $\diamondsuit$

3. Локальна розв'язність задачі Коші. Коректна розв'язність задачі Коші для лінійної $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи зі слабким виродженням на початковій гіперплощині встановлена в класі $U_0^{\gamma,\gamma-\gamma_0}$, який містить зростаючі за x функції. Введемо клас $U^{\gamma,\gamma-\gamma_0}(\Pi_{(0,T]})\subset U_0^{\gamma,\gamma-\gamma_0}$, до якого належатимуть обмежені функції, визначені в шарі $\Pi_{(0,T]}$.

Теорема 2. *Нехай для слабко виродженої системи* (1) *виконуються умови* $\mathbf{K_1}$ – $\mathbf{K_3}$, *умова* $\mathbf{K_4}$ – *з* $\gamma_0<\gamma$, $A(T,0)<\infty$, *функція* $f\in F^\gamma$ *і* $\varphi\in C^{2b+\gamma}$. *Тоді існує таке число* $T_0>0$, *що задача* (1), (2) *має єдиний рзв'язок з простору* $U^{\gamma,\gamma-\gamma_0}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Д о в е д е н н я. Заміною $u=v+\varphi$ зведемо задачу (1), (2) до задачі Коші з однорідною початковою умовою. Як і в [4, 7, 8], розглянемо послідовність функцій $\{u^m:m\ge 0\}$, які задовольняють системи рівнянь

$$\big(\alpha(t)I\partial_t-\beta(t)\sum_{\|k\|=2b}a_k(t,x,D_x^{2b-1}u^{m-1})\partial_x^k-a_0(t,x,D_x^{2b-1}u^{m-1})\big)u^m(t,x)=$$

$$=f(t,x,D_x^{2b-1}u^{m-1}),\qquad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\qquad m\ge 1, \tag{6}$$

$$\big(\alpha(t)I\partial_t-\beta(t)\sum_{\|k\|=2b}a_k(t,x,0)\partial_x^k-a_0(t,x,0)\big)u^0(t,x)=$$

$$=f(t,x,0),\qquad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\qquad u_{-1}\equiv 0, \tag{7}$$

початкові умови

$$u^m(t,x)\big|_{t=0}=0,\qquad x\in\mathbb{R}^n, \tag{8}$$

та визначаються формулами

$$u^m(t,x)=\int_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n}Z_m(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi,D_\xi^{2b-1}u^{m-1}(\tau,\xi))d\xi,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\qquad m\ge 0,\qquad u_{-1}\equiv 0, \tag{9}$$

де Z_m – ФМРЗК для системи

$$\big(\alpha(t)I\partial_t-\beta(t)\sum_{\|k\|=2b}a_k(t,x,D_x^{2b-1}u^{m-1}(t,x))\partial_x^k-$$

$$-a_0(t,x,D_x^{2b-1}u^{m-1}(t,x)))u^m(t,x)=0,\qquad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \tag{10}$$

Розглянемо задачу (7), (8_0). З умов теореми випливає, що функція u^0 , яка визначена формулою (9_0), є розв'язком цієї задачі. На підставі результатів з [6] маємо, що $u^0 \in U^{\gamma,\gamma-\gamma_0}(\Pi_{(0,T]})$ і справджуються оцінки

$$|\partial_x^k u^0(t,x)| \le C_0\,(B(t,0))^{1-(\|k\|+\gamma_0)/(2b)},$$

$$|\Delta_{t,x}^{t',x'}\partial_x^k u^0(t,x)| \le C_0\,(B(t,0))^{1-\|k\|/(2b)}(p(t',x';t,x))^{\zeta},$$

де $\zeta=\gamma$, якщо $\|k\|<2b$, і $\zeta=\gamma-\gamma_0$, якщо $\|k\|=2b$.

Виберемо T_0 таким, щоб

$$C_0\max_{\|k\|\le 2b}(B(T_0,0))^{\gamma-\gamma_0+1-\|k\|/(2b)}<R$$

і $B(T_0,0)<1$. Тоді одержимо такі оцінки:

$$|\partial_x^k u^0(t,x)| \le R, \qquad \|k\|\le 2b-1, \tag{11_0}$$

$$|\partial_x^k u^0(t,x)| \le R_1\,(B(t,0))^{\zeta/(2b)}, \qquad \|k\|\le 2b, \tag{12_0}$$

$$|\Delta_{t,x}^{t',x'}\partial_x^k u(t,x)| \le R_1\,(p(t',x';t,x))^{\zeta}, \qquad \|k\|\le 2b. \tag{13_0}$$

Крім того, простір $U^{\gamma,\gamma-\gamma_0}(\Pi_{(0,T]})$, як випливає з теореми 1, є класом єдиності розв'язку.

Розглянемо тепер розв'язок u^1 задачі (6_1), (8_1). На підставі зроблених припущень про коефіцієнти $a_k(\cdot,\cdot,D_x^{2b-1}u^0(\cdot,\cdot))$, $\|k\|=2b$, системи (7_1) і оцінок (11_0), (12_0) існує ФМРЗК Z_1 для такої системи, і єдиний розв'язок задачі (6_1), (8_1) визначається формулою (9_1) у шарі $\Pi_{(0,T_0]}$.

На підставі леми 1 з [6] маємо, що для такого розв'язку справджуються нерівності

$$|\partial_x^k u^1(t,x)| \le C_1\,(B(t,0))^{1+(\gamma-\gamma_0-\|k\|)/(2b)},$$

$$|\Delta_{t,x}^{t',x'}\partial_x^k u^1(t,x)| \le C_1\,(B(t,0))^{\gamma-\gamma_0+1-(\zeta+\|k\|)/(2b)}(p(t',x';t,x))^{\zeta},$$

де ζ – таке ж, як раніше, а C_1 – деяка стала, яка залежить від R,R_1,T_0 .

Зменшивши, якщо потрібно, T_0 , одержимо оцінки

$$|\partial_x^k u^1(t,x)| \le R, \qquad \|k\|\le 2b-1, \tag{11_1}$$

$$|\partial_x^k u^1(t,x)| \le R_1\,(B(t,0))^{\zeta/(2b)}, \qquad \|k\|\le 2b, \tag{12_1}$$

$$|\Delta_{t,x}^{t',x'}\partial_x^k u^1(t,x)| \le R_1\,(p(t',x';t,x))^{\zeta}, \qquad \|k\|\le 2b, \tag{13_1}$$

з такими ж, як і в (11_0) – (13_0) , сталими R, R_1 . Розв'язок $u^1(t,x)$ задачі Коші (6_1) , (8_1) належить до простору $U^{\gamma,\gamma-\gamma_0}(\Pi_{(0,T_0]})$.

За індукцією встановлюємо існування послідовності розв'язків $\{u^m : m\ge 1\}$ задач (6_m) , (8_m) , які визначаються формулами (9_m) і для яких у шарі $\Pi_{(0,T_0]}$ справджуються нерівності

$$|\partial_x^k u^m(t,x)| \le R, \qquad \|k\|\le 2b-1, \tag{11_m}$$

$$|\partial_x^k u^m(t,x)| \le R_1\,(B(t,0))^{\zeta/(2b)}, \qquad \|k\|\le 2b, \tag{12_m}$$

$$|\Delta_{t,x}^{t',x'}\partial_x^k u^m(t,x)| \le R_1\,(p(t',x';t,x))^{\zeta}, \qquad \|k\|\le 2b. \tag{13_m}$$

Ці розв'язки будуть єдиними розв'язками задач Коші (6_m) , (8_m) з простору $U^{\gamma,\gamma-\gamma_0}(\Pi_{(0,T_0]})$. Доведення збіжності послідовності та єдиності знайденого розв'язку здійснюється аналогічно, як і в [7]. Теорему доведено. $\Diamond$

Для квазілінійної параболічної за С. Д. Ейдельманом системи зі слабким виродженням на початковій гіперплощині за допомогою доведеної теореми про коректну розв'язність задачі Коші для відповідної лінійної системи встановлено умови локальної розв'язності . У наступних публікаціях доцільно дослідити локальну розв'язність таких систем для випадку сильного виродження.

1. *Березан Л. П.* Деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2000. – Вип. 76. – С. 5–10.
2. *Березан Л. П.* Інтегральне зображення розв'язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 1999. – Вип. 46. – С. 13–18.
3. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 7–12.
4. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы// Тр. семинара по функц. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1968. – Вып. 1. – С. 3–175; 271–273.
5. *Івасишен С. Д.,Мединський І. П.* Властивості інтегралів типу похідних від об'ємних потенціалів для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 76–86.
6. *Івасишен С. Д.,Мединський І. П.* Задача Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем із виродженням на початковій гіперплощині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 3. – С. 15–24.
7. *Мединський І.П.* Про локальну розв'язність задачі Коші для квазілінійної параболічної системи з слабким виродженням на початковій гіперплощині // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 2000. – № 411. – С. 241–247.
8. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ $\overrightarrow{2b}$- ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СО СЛАБЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ НА НАЧАЛЬНОЙ ГИПЕРПЛОСКОСТИ

Доказана теорема о корректной разрешимости задачи Коши для линейной системы и установлены условия локальной разрешимости для квазилинейной $\overrightarrow{2b}$-параболической системы со слабым вирождением на начальной гиперплоскости.

LOCAL SOLVABILITY OF CAUCHY PROBLEM FOR QUASI-LINEAR $\overrightarrow{2b}$-PARABOLIC SYSTEMS WITH WEAK DEGENERATION ON INITIAL HYPERPLANE

The theorem on solvability of correct Cauchy problem for linear system is proved. The conditions of local solvability for a quasi-linear $\overrightarrow{2b}$-parabolic system with weak degeneration on initial hyperplane are determined.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
18.08.03