УДК 517.518.14

А. Н. Витюк

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматриваются дифференциальные включения порядка $\alpha \in (0,1)$, содержащие дробную производную Римана – Лиувилля, в пространстве суммируемых функций. Доказано существование их решений.

Изучению условий существования и единственности решений дифференциальных уравнений дробного порядка с дробной производной Римана – Лиувилля в пространстве суммируемых функций посвящены работы [2, 6]. Ниже речь идет об условиях существования решений дифференциального включения порядка $\alpha \in (0,1)$ в пространстве суммируемых функций. Существование решений в пространстве непрерывных функций для таких включений рассмотрено в [1].

1. Пусть $\mathbb{R}^n$ – пространство n-мерных векторов с нормой $\|\cdot\|$, а θ – нулевой вектор; $\operatorname{comp}\mathbb{R}^n$ $(\operatorname{conv}\mathbb{R}^n)$ – множество непустых и компактных (выпуклых и компактных) подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа $h(\cdot,\cdot)$; $\rho(z,A)$ – расстояние между точкой $z \in \mathbb{R}^n$ и множеством $A \subset \mathbb{R}^n$; $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$. Пусть T – интервал на действительной оси, $L_1(T,\mathbb{R}^n)$ – множество интегрируемых по Лебегу функций $f : T \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|f(x)\|_1 = \int_T \|f(x)\|\,dx$.

Многозначное отображение $F : T \to \mathbb{R}^n$ называем измеримым, если множество $\{x \in T : F(x) \cap E \neq \varnothing\}$ измеримо по Лебегу для любого открытого множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Через $A(T,\mathbb{R}^n)$ обозначим множество интегрируемых по Ауману [5] многозначных отображений $F : T \to \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$. Отображение $d : A(T,\mathbb{R}^n) \times \times A(T,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$, где для любых $F, G \in A(T,\mathbb{R}^n)$

$$d(F,G) = \int_T h(F(x), G(x))\,dx$$

является метрикой, причем $(A(T,\mathbb{R}^n), d)$ – полное метрическое пространство [8].

Пусть $J = (0,a]$, $f \in L_1(J,\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда

$$(I_0^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt,$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, называем [3] левосторонним интегралом Римана – Лиувилля порядка α. Пусть $f_{1-\alpha}(x) = \left(I_0^{1-\alpha} f\right)(x)$. Тогда $(D_0^\alpha f)(x) = = f'_{1-\alpha}(x)$ называем левосторонней производной Римана – Лиувилля порядка α.

2. Рассмотрим дифференциальное включение

$$(D_0^\alpha y)(x) \in F(x, y(x)) \tag{1}$$

с начальным условием

$$y_{1-\alpha}(0) = \gamma. \tag{2}$$

Предположим, что многозначное отображение $F : J \times D \to \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, где

$$D = \left\{ u \in L_1(J,\mathbb{R}^n) : \left\| u(x) - \frac{x^{\alpha-1}\gamma}{\Gamma(\alpha)} \right\|_1 \leq b \right\},$$

удовлетворяет условиям:
1) для $u(x) \in D$ многозначное отображение $F(x,u(x))$ является измеримым;
2) $|F(x,u(x))| = h(F(x,u(x)),\{\theta\}) \le m(x)$, $u(x) \in D$, $m(x) \in L_1(J,\mathbb{R}_+)$;
3) для любых $u(x), v(x) \in D$, $d(F(x,u(x)),F(x,v(x))) \le K\|u(x)-v(x)\|_1$.

Под решением задачи (1), (2) понимаем такую функцию $y(x) \in L_1(J,\mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет условию (2) и для почти всех $x \in J$ дифференциальному включению (1).

Теорема 1. *Пусть многозначное отображение $F: J \times D \to \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям **1)**–**3)**. Если для $w(x) \in D$ существует почти всюду на J производная $(D_0^\alpha w)(x)$, причем*

$$\rho((D_0^\alpha w)(x), F(x,w(x))) \le \lambda(x), \qquad \lambda(x) \in L_1(J,\mathbb{R}_+),$$

то для $x \in (0,a]$, где a такое, что

$$\frac{a^\alpha \|m(x)\|_1}{\Gamma(\alpha+1)} \le b, \qquad \delta = \frac{a^\alpha \cdot K}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \tag{3}$$

существует такое решение $y(x)$ задачи (1), (2), *что*

$$\|y(x)-w(x)\|_1 \le \frac{\delta\|\lambda(x)\|_1}{(1-\delta)K}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим последовательности $\{v_n(x)\}$, $\{u_n(x)\}$, $n = 0,1,2,\ldots$, полагая $v_0(x) = (D_0^\alpha w)(x)$, $u_0(x) = w(x)$. Существует [8, с. 49] такой измеримый селектор $v_1(x)$ многозначного отображения $F(x,u_0(x))$, что для почти всех $x \in J$

$$\|v_1(x)-v_0(x)\| = \rho(v_0(x), F(x,u_0(x))).$$

Полагаем $u_1(x) = \mu(x) + (I_0^\alpha v_1)(x)$, где $\mu(x) = \left(\gamma x^{\alpha-1}\right)/\Gamma(\alpha)$. Используя теорему Фубини, получим

$$\|u_1(x)-u_0(x)\|_1 \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^a\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\|v_1(t)-v_0(t)\|\,dtdx \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^a \frac{(a-t)^\alpha}{\alpha}\lambda(t)\,dt \le \frac{a^\alpha\|\lambda(x)\|_1}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$\|u_1(x)-\mu(x)\|_1 \le \frac{a^\alpha\|m(x)\|_1}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Если $v_2(x)$ – такой измеримый селектор многозначного отображения $F(x,u_1(x))$, что

$$\|v_2(x)-v_1(x)\| = \rho(v_1(x), F(x,u_1(x))),$$

то полагаем $u_2(x) = \mu(x) + (I_0^\alpha v_2)(x)$, причем

$$\|v_2(x)-v_1(x)\|_1 = \int_0^a \|v_2(x)-v_1(x)\|\,dx = \int_0^a \rho(v_1(x), F(x,u_1(x)))\,dx \le$$

$$\le \int_0^a h(F(x,u_0(x)), F(x,u_1(x)))\,dx \le K\|u_1(x)-u_0(x)\|_1 \le \frac{a^\alpha\cdot K\|\lambda(x)\|_1}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Аналогично, как и выше, находим, что

$$\|u_2(x) - u_1(x)\|_1 \le \left(\frac{a^\alpha K}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^2 \cdot \frac{\|\lambda(x)\|_1}{K},$$

$$\|u_2(x) - u_1(x)\|_1 \le \frac{a^\alpha \cdot \|m(x)\|_1}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Используя индукцию, получим

$$\|u_n(x) - u_{n-1}(x)\|_1 \le \frac{\delta^n \cdot \|\lambda(x)\|_1}{K}, \tag{4}$$

$$\|v_n(x) - v_{n-1}(x)\|_1 \le \delta^n \cdot \|\lambda(x)\|_1, \tag{5}$$

$$\|u_n(x) - \mu(x)\|_1 \le \frac{a^\alpha \cdot \|m(x)\|_1}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{6}$$

Из оценок (4)–(6) в силу (3) следует, что $u_n(x) \in D$, а последовательности $\{u_n(x)\}$, $\{v_n(x)\}$ являются фундаментальными в $L_1(J, \mathbb{R}^n)$. Пусть u, $v \in$ $\in L_1(J, \mathbb{R}^n)$ такие, что $\|u_n(x) - u(x)\|_1 \to 0$, $\|v_n(x) - v(x)\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, существуют их подпоследовательности (сохраним для них те же обозначения) такие, что $u_n(x) \to u(x)$, $v_n(x) \to v(x)$ при $n \to \infty$ почти всюду на J. Так как $u_n(x) = \mu(x) + (I_0^\alpha v_n)(x)$, то согласно теореме о мажорантной сходимости получаем, что $u(x) = \mu(x) + (I_0^\alpha v)(x)$.

Непосредственно проверяем, что $(D_0^\alpha u)(x) = v(x)$ для почти всех $x \in J$, а $u_{1-\alpha}(0) = \gamma$. Докажем, что $u(x)$ для почти всех $x \in J$ удовлетворяет включению (1). Воспользуемся следующим соотношением [7]. Для любых $p, q \in \mathbb{R}^n$ и $A, B \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$

$$\rho(p, A) \le \|p - q\| + \rho(q, B) + h(A, B). \tag{7}$$

В нашем случае в силу (7) для почти всех $x \in J$ имеем

$$\rho\left((D_0^\alpha u)(x), F(x, u(x))\right) \le$$

$$\le \|v(x) - v_m(x)\| + \rho\left(v_m(x), F(x, u_m(x))\right) + h\left(F(x, u(x)), F(x, u_m(x))\right). \tag{8}$$

Так как $\rho(v_m(x), F(x, u_m(x))) = 0$ в силу выбора $v_m(x)$, то согласно (8) получаем

$$\int_0^a \rho\left((D_0^\alpha u)(x), F(x, u(x))\right) dx \le$$

$$\le \|v(x) - v_m(x)\|_1 + \int_0^a h\left(F(x, u(x)), F(x, u_m(x))\right) dx \le$$

$$\le \|v(x) - v_m(x)\|_1 + K\|u(x) - u_m(x)\|_1.$$

Из последнего соотношения следует, что $\int\limits_0^a \rho\left((D_0^\alpha u)(x), F(x, u(x))\right) dx = 0$, т.е. для почти всех $x \in J$ $(D_0^\alpha u)(x) \in F(x, u(x))$.

Так как $u_0(x) = w(x)$, то в силу (4)

$$\|u_n(x) - w(x)\|_1 \le \frac{\delta\|\lambda(x)\|_1}{K}\left(1 + \delta + \dots + \delta^{n-1}\right) \le \frac{\delta\|\lambda(x)\|_1}{(1-\delta)K}.$$

Отсюда при $n \to \infty$ имеем $\|u(x) - w(x)\|_1 \le (\delta\|\lambda(x)\|_1)/((1-\delta)K)$. $\diamondsuit$

Следствие. *Пусть* $w(x) = \left(\gamma x^{\alpha-1}\right)/\Gamma(\alpha)$. *Тогда* $w(x) \in D$ *и*

$$\rho\left(\left(D_0^\alpha w\right)(x), F(x, w(x))\right) =$$

$$= \rho\left(\{\theta\}, F(x, w(x))\right) \le h\left(F(x, w(x)), \qquad \{\theta\}\right) \le m(x).$$

Следовательно, множество решений задачи (1),(2) не пусто.

Если $F : J \times G \to \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, является отображением типа Каратеодори [8], а $y : J \to G$ – измеримая функция, то отображение $F(x, y(x))$ будет [4, с. 99] измеримым. Следовательно, для отображения $F : J \times G \to \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$ типа Каратеодори выполняются условия ***1***), ***2***).

Теорема 2. *Пусть многозначное отображение* $F(x, y)$ *удовлетворяет условиям теоремы 1. Для того чтобы функция* $u(x) \in L_1(J, \mathbb{R}^n)$ *была решением задачи* (1), (2), *необходимо и достаточно, чтобы для любых* $x, x+\tau \in J$, $\tau > 0$,

$$u_{1-\alpha}(x+\tau) - u_{1-\alpha}(x) \in \int_x^{x+\tau} F(t, u(t))\, dt.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2 из [1]. $\Diamond$

1. *Витюк А. Н.* Существование решений многозначных дифференциальных уравнений дробного порядка // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2001. – **6**, вип. 3. – С. 84–87.
2. *Килбас А. А., Бонилла Б., Трухилло Х.* Нелинейные дифференциальные уравнения дробного порядка в пространстве интегрируемых функций // Докл. РАН. – 2000. – **374**, № 4. – С. 445–449.
3. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. Н.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Техника, 1987. – 688 с.
4. *Филатов О. П.* Лекции по многозначному анализу и дифференциальным включениям. – Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2000. – 155 с.
5. *Aumann R. J.* Integrals of set valued functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1970. – **29**, No. 2. – P. 246 – 272.
6. *Bonilla B., Kilbas A. A., Truhillo J. J.* Systems of nonlinear fractional differential equations in the space of summable functions // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2000. – **6**. – С. 38–46.
7. *Dawidowski M.* On some generalization of Bogolubov averaging theorem // Funct. et approxim. – 1979. – No. 5. – P. 57–70.
8. *Kisielewicz M.* Differential inclusions and optimal control. – Warszawa: PWN, 1991. – 240 p.

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ В ПРОСТОРІ СУМОВНИХ ФУНКЦІЙ

Розглядаються диференціальні включення порядку $\alpha \in (0,1)$, *що містять дробову похідну Рімана – Ліувілля, в просторах сумовних функцій. Доведено існування їх розв'язків.*

EXISTENCE OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS OF FRACTIONAL ORDER IN THE SPACE OF SUMMABLE FUNCTIONS

Differential inclusions of fractional order $\alpha \in (0,1)$ *containing the Riemann – Liouville fractional derivative, are considered in the space of summable functions. The existence of their solutions is proved.*

Ин-т математики, экономики и механики
Одес. нац. ун-та им. И. И. Мечникова, Одесса

Получено
01.09.03