УДК 517.955.4: 519.217.4

О. Вал. Антонюк

НЕЛІНІЙНІ ОЦІНКИ НА РЕГУЛЯРНІСТЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПОТОКІВ НА МНОГОВИДАХ

При дослідженні диференціальних потоків на некомпактних многовидах істотну роль відіграють умови на коефіцієнти рівняння на нескінченності. У роботі розглянуто диференціальне рівняння першого порядку з глобально неліпшицевими коефіцієнтами на многовиді, що також може містити випадкові члени. Показано, що коректне дослідження варіацій нелінійних рівнянь на многовидах за початковими умовами та параметрами вимагає узагальнення коваріантної похідної Рімана. Для відповідних варіаційних рівнянь отримано сім'ю нелінійних оцінок на регулярність, що спирається на нелінійні пропорції варіацій. Досліджено вплив кривини многовиду на регулярні властивості.

Історія питання. На сьогодні існує декілька підходів до коректної побудови диференціальних потоків на многовидах. Незважаючи на доданки, що виникають у формулі Іто, стохастична теорія може бути узгоджена з геометрією, наприклад за допомогою підходу Стратоновича [10, 11], спеціальних розшарувань Іто [6, 8] або підйому процесів на ортореперні розшарування многовиду [7, 12].

Для отримання інваріантних умов на регулярність процесу на многовиді за початковими умовами, необхідно знати як одержати геометрично інваріантну сім'ю варіаційних рівнянь, зокрема, як геометрично коректно побудувати варіації процесу. Проте, ця задача фактично ще не розглядалась. Виявляється, що традиційне застосування звичайних похідних у напрямках векторних полів або класичних коваріантних похідних не вирішує проблеми, оскільки такі варіації не є геометрично інваріантними об'єктами і відповідні варіаційні рівняння не можуть бути задані однаковим чином у кожній карті (тобто містять неінваріантні члени). Тому відомі умови на регулярність [6–12] або не мали інваріантного змісту, або мали локальний характер, тобто могли бути перевірені лише за умови глобальної обмеженості всіх похідних коефіцієнтів та геометрії многовиду або на компактному многовиді, що автоматично має скінченну кількість карт.

У цій статті проведено геометрично коректну побудову варіацій і відповідних варіаційних рівнянь, а також отримано інваріантні умови на глобальні оцінки їх розв'язків у випадку неліпшицевих коефіцієнтів рівняння та загального некомпактного многовиду.

1. Проблема регулярності для розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь. Клас рівнянь з випадковими членами на многовиді. Існує класична схема Коші – Ліувілля – Пікара дослідження регулярності диференціальних рівнянь за початковими умовами та параметрами. Ця схема спирається на прості методи типу стискуючих відображень і теорем про диференційовність неявної функції для доведення існування, єдиності та C^∞-регулярності розв'язків.

Схема Коші – Ліувілля – Пікара добре працює для квазілінійних рівнянь (з глобально ліпшицевими коефіцієнтами з обмеженими похідними), наприклад, для рівняння першого порядку

$$y_t^x = x + \int_0^t F(y_s^x)ds, \tag{1}$$

проте у випадку істотних нелінійностей відповідні техніки не працюють. Виникає питання розробки прямих методів дослідження, які б не застосовували традиційного переходу до ліпшицевих апроксимацій.

Метою роботи є показати, що існує новий клас апріорних оцінок на варіації розв'язків істотно нелінійних рівнянь. На гладкому зорієнтованому злучному рімановому многовиді M без границі розглянемо диференціальне рівняння з випадковими членами, що має формальний символічний запис Іто – Стратоновича [10, 11]

$$\delta y_t^x = A_0(y_t^x)dt + \sum_\alpha A_\alpha(y_t^x)\delta W_t^\alpha, \quad y_0^x = x. \tag{2}$$

Вище A_0, A_α позначають гладкі глобально задані векторні поля на M; W_t^α є сім'ю одновимірних незалежних процесів Вінера з відповідними диференціалами Стратоновича δW^α, $\alpha = 1, ..., \dim M$. Формальне символічне рівняння (2) розуміємо у такому сенсі, що для довільної глобально заданої C^3-гладкої функції на многовиді справджується наступне рівняння в $\mathbb{R}^1$:

$$f(y_t^x) = f(x) + \int_0^t (A_0 f)(y_s^x)ds + \sum_\alpha \int_0^t (A_\alpha f)(y_t^x)\delta W_t^\alpha.$$

Зокрема [9], з останнього рівняння випливає можливість локалізації рівняння (2) для проведення підрахунків у локальних картах: для довільної карти многовиду $U \subset M$ та її координатних фукнцій $f_i(x) = x^i$ рівняння (2) виконується локально в околі U:

$$y_t^i(x) = y_{\tau_{in}}^i(x) + \int_{\tau_{in}}^t A_0^i(y_s^x)ds + \sum_\alpha \int_{\tau_{in}}^t A_\alpha(y_s^x)\delta W_s^\alpha$$

на випадковому інтервалі $t \in (\tau_{in}, \tau_{out})$. Тут τ_{in}, τ_{out} позначають моменти входу та виходу процесу з околу U, тобто $y_t^x \in U$ для всіх $t \in (\tau_{in}, \tau_{out})$.

Зауважимо, що результати роботи також справджуються у простішому випадку звичайного диференціального рівняння на многовиді (при $A_\alpha = 0$). Саме тому використано нетипове для теорії стохастичних рівнянь позначення y для процесів. Особлива увага приділяється впливу геометричних характеристик многовиду на регулярні властивості.

Асоційована з процесом (2) напівгрупа

$$(e^{-tH}f)(x) = \mathbf{E}\; f(y_t^x) \tag{3}$$

задає зображення розв'язків параболічної задачі Коші $\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) = Hu(t,x)$ з оператором другого порядку

$$H = \frac{1}{2}\sum_\alpha \nabla_{A_\alpha}^2 + \nabla_{A_0} \tag{4}$$

та має широкий спектр застосувань до актуальних задач сучасного нескінченновимірного функціонального та нелінійного аналізу, стохастики, математичної фізики, диференціальної геометрії і теорії операторів. Через $\mathbf{E}$ позначено математичне сподівання за мірою Вінера.

2. Нелінійні апріорні оцінки на варіації. Аналогічно, як в [1, 4, 5], запишемо сім'ю варіаційних рівнянь до рівняння (1)

$$y_t^{(n)} = \partial_x^{(n)} y_t^x = \partial_x^{(n)} x + \int_0^t \partial_x^{(n)} F(y_s^x)ds =$$
$$= \partial_x^{(n)} x + \int_0^t \sum_{j_1+\ldots+j_s=n,\; s=1,..,n} F^{(s)}(y_s^x) y_t^{(j_1)} ... y_t^{(j_s)} ds.$$

Отже, варіація $y_t^{(n)}$ у лівій частині є *пропорційною* першій варіації $y_t^{(1)}$ у n-му степені в правій частині (коли всі $j_i = 1$), тобто $\sqrt[n]{y_t^{(n)}} \sim y_t^{(1)}$. Якщо впровадити однорідний за цією пропорцією вираз

$$\rho_n(y,t) = \sum_{j=1,..,n} p_j(y_t^x)\,|y_t^{(j)}|^{m/j}$$

і накласти умови на поведінку нелінійності F і ваг p_j, то можна встановити [4, 5] *нелінійну апріорну оцінку на регулярність* розв'язку y_t^x за початковими умовами для x:

$$\exists K \quad \rho_n(y,t) \le e^{Kt}\rho_n(y,0).$$

Нагадаємо, що $y_t^{(n)} = \partial_x^{(n)} y_t^x$ і вираз ρ_n містять різні степені m/j.

Проте для рівняння на многовиді (2) виникає фундаментальна проблема: як геометрично корректно задати варіації вищих порядків на многовиді.

3. Узагальнення коваріантної похідної Рімана або інваріантність варіацій за координатою процесу (y_t^x). Розглянемо варіацію першого порядку $\dfrac{\partial (y_t^x)^m}{\partial x^k}$ за початковими умовами, що є векторним полем за індексом m стосовно координатних перетворень $(y) \to (y')$ в околі V, куди прийшов процес, і ковекторне поле за індексом k відносно координатних перетворень $(x) \to (x')$ в околі U, звідки він стартував. Загальні тензори за координатою (x) і змінною (y_t^x) вводяться наступним чином: об'єкт $u_{(j/\beta)}^{(i/\alpha)}$ є тензором за координатою (x) і за змінною (y_t^x), якщо він є $T_x^{p,q}M$-тензором за індексами $(i)=(i_1,...,i_p)$, $(j) = = (j_1,...,j_q)$ щодо перетворення локальних координат (x^k) в околі U і $T_{y_t^x}^{r,s}M$-тензором за індексами (α), (β) щодо перетворення локальних координат (y^m) в околі V. Іншими словами, після одночасної заміни локальних координат $(x^k) \to \to (x^{k'})$ та $(y^m) \to (y^{m'})$ маємо трансформаційний закон

$$u_{(j/\beta)}^{(i/\alpha)} = \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}} \frac{\partial x^{(j')}}{\partial x^{(j)}} \big(\frac{\partial y^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha')}} \frac{\partial y^{(\beta')}}{\partial y^{(\beta)}} \circ y_t^x \big)\, u_{(j'/\beta')}^{(i'/\alpha')}$$

з якобіанами $\dfrac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}} = \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} ... \dfrac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}}$. Прикладом такого тензора є $u_{(j)}^{(i)}(x) v_{(\beta)}^{(\alpha)}(y_t^x)$.

За схожими до класичної диференціальної геометрії аргументами, пов'язаними з побудовою коваріантної похідної, *геометрично інваріантна коваріантна похідна таких тензорів* повинна містити доданки зі зв'язністю $\Gamma(x)$ і $\Gamma(y)$, щоб ґарантувати тензорний характер щодо перетворень координат в образі $(y) \to (y')$ і прообразі $(x) \to (x')$ відображення $x \to y_t^x$.

Означення. *Інваріантна похідна узагальненого тензора* $u_{(j/\beta)}^{(i/\alpha)}$ має вигляд

$$\mathbb{V}_k^x u_{(j/\beta)}^{(i/\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x^k} u_{(j/\beta)}^{(i/\alpha)} + \sum_{s\in(i)} \Gamma_{k\ h}^{\ s}(x) u_{(j/\beta)}^{(i/\alpha)|_{s=h}} - \sum_{s\in(j)} \Gamma_{k\ s}^{\ h}(x) u_{(j/\beta)|_{s=h}}^{(i/\alpha)} +$$
$$+ \sum_{\rho\in(\alpha)} \Gamma_{\gamma\ \delta}^{\ \rho}(y_t^x) u_{(j/\beta)}^{(i/\alpha)|_{\rho=\delta}} \frac{\partial y^\delta}{\partial x^k} - \sum_{\rho\in(\beta)} \Gamma_{\rho\ \delta}^{\ \gamma}(y_t^x) u_{(j/\beta)|_{\rho=\gamma}}^{(i/\alpha)} \frac{\partial y^\delta}{\partial x^k}.$$

Перший рядок відповідає коваріантній похідній за координатами (x^k), другий рядок робить весь вираз тензором відносно координат процесу (y^m). Означена таким чином нова коваріантна похідна є (x, y_t^x)-тензором більшої валентності [1], тобто має місце закон перетворення

$$\mathbb{V}_k u_{(j/\beta)}^{(i/\alpha)} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}} \frac{\partial x^{(j')}}{\partial x^{(j)}} \frac{\partial y^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha')}} \frac{\partial y^{(\beta')}}{\partial y^{(\beta)}} \mathbb{V}_{k'} u_{(j'/\beta')}^{(i'/\alpha')}.$$

Важлива властивість нової похідної також полягає у ланцюжковому законі для суперпозиції:

$$\mathbb{V}_k u_{(\beta)}^{(\alpha)}(y^x) = (\nabla_\ell u_{(\beta)}^{(\alpha)})(y^x) \frac{\partial y^\ell}{\partial x^k}. \tag{5}$$

Тепер маємо спосіб побудови інваріантних варіацій вищих порядків.

4. Геометрично коректні варіації за початковими умовами. Місце кривини в задачах регулярності. Оскільки варіація *першого порядку* $\mathbb{V}_k^x y^m = = \frac{\partial (y_t^x)^m}{\partial x^k}$ є одночасно вектором за змінною (y_t^x) відносно координат (y) і ковектором за координатою (x), використаємо нову коваріантну похідну для означення варіацій *вищих порядків*: для $\gamma = (j_1,...,j_n)$ варіація вищого порядку $\mathbb{V}_\gamma^x y^m = = \mathbb{V}_{j_n}^x ... \mathbb{V}_{j_1}^x y^m$ задається рекурентним виразом

$$\mathbb{V}^x_k(\mathbb{V}^x_\gamma y^m) = \nabla^x_k(\mathbb{V}^x_\gamma y^m) + \Gamma_p{}^m{}_q(y^x_t)\mathbb{V}^x_\gamma y^p \frac{\partial y^q}{\partial x^k} =$$
$$= \partial^x_k(\mathbb{V}^x_\gamma y^m) - \sum_{j\in\gamma}\Gamma_k{}^h{}_j(x)\mathbb{V}^x_{\gamma|_{j=h}} y^m + \Gamma_p{}^m{}_q(y^x_t)\mathbb{V}^x_\gamma y^p \frac{\partial y^q}{\partial x^k}\,. \qquad (6)$$

Перші два доданки відповідають класичній похідній Рімана, останній доданок робить весь вираз тензором стосовно перетворень координат в образі $(y) \to \to (y')$. Порівняно з уже існуючими узагальненнями коваріантної похідної, що використовують зв'язність з крученням, поліноміальні зв'язності та ін. [6, 7], заданими, перш за все, властивостями геометрії многовиду в околі точки x, нова похідна задана не лише в початковій точці диференціювання x, але також залежить від поведінки розв'язку в точці y (члени з $\Gamma(x)$, $\Gamma(y)$ і множник $\frac{\partial y^x_t}{\partial x}$).

Зауважимо, що введення нового поняття варіації дає можливість остаточно виявити роль кривини у регулярних властивостях (див. (8) далі). Оскільки вже маємо коректну процедуру диференціювання тензорів від y, наприклад, заданих коефіцієнтами $A_\bullet(y^x_t)$ рівняння (2), отримаємо відповідні варіаційні рівняння. Взявши похідну (2), знаходимо

$$\delta(\frac{\partial y^m}{\partial x^k}) = (\frac{\partial}{\partial x^k}A^m_\alpha(y))\delta W^\alpha + (\frac{\partial}{\partial x^k}A^m_0(y))dt.$$

Виділимо нову коваріантну похідну векторних полів $A_0(y)$, $A_\alpha(y)$, тобто додамо та віднімемо члени з $\Gamma(y)$:

$$\delta(\frac{\partial y^m}{\partial x^k}) = (\mathbb{V}^x_k A^m_\alpha(y) - \Gamma_p{}^m{}_q(y)A^p_\alpha\frac{\partial y^q}{\partial x^k})\delta W^\alpha + (\mathbb{V}^x_k A^m_0(y) - \Gamma_p{}^m{}_q(y)A^p_0\frac{\partial y^q}{\partial x^k})dt.$$

Оскільки члени біля зв'язності містять диференціал процесу y, отримаємо інваріантну форму рівняння на першу варіацію

$$\delta(\frac{\partial y^m}{\partial x^k}) = -\Gamma_p{}^m{}_q(y)\frac{\partial y^p}{\partial x^k}\delta y^q + \mathbb{V}^x_k(A^m_\alpha(y))\delta W^\alpha + \mathbb{V}^x_k(A^m_0(y))dt.$$

Отже, з точністю до паралельного перенесення на член з $\Gamma(y)$, приріст варіації першого порядку задається новою коваріантною похідною коефіцієнтів. Це спостереження використано як рекурентна база в пошуку варіаційних рівнянь вищих порядків.

Теорема [2]. *Припустимо, що рівняння на варіацію* $\mathbb{V}^x_\gamma y^m, |\gamma| \geq 1$*, може бути записане таким чином:*

$$\delta(\mathbb{V}^x_\gamma y^m) = -\Gamma_p{}^m{}_q(\mathbb{V}^x_\gamma y^p)\delta y^q + M_\gamma{}^m{}_i\delta W^i + N^m_\gamma dt. \qquad (7)$$

Тоді рівняння на наступну варіацію $\mathbb{V}^x_k\mathbb{V}^x_\gamma y^m = \mathbb{V}^x_{\gamma\cup\{k\}}y^m$ *має вигляд*

$$\delta(\mathbb{V}^x_{\gamma\cup\{k\}}y^m) = -\Gamma_p{}^m{}_q(\mathbb{V}^x_{\gamma\cup\{k\}}y^p)\delta y^q + R_p{}^m{}_{\ell q}(\mathbb{V}^x_\gamma y^p)\frac{\partial y^\ell}{\partial x^k}\delta y^q + \qquad (8)$$
$$+(\mathbb{V}^x_k M_\gamma{}^m{}_i)\delta W^i + (\mathbb{V}^x_k N^m_\gamma)dt,$$

тобто з урахуванням вигляду диференціала (2) має подібну структуру.

Почавши з традиційного означення варіації вищого порядку, означеної за допомогою звичайних похідних у напрямах векторних полів або за допомогою класичної коваріантної похідної, напр. [6, 9], отримали би сім'ю неінваріантних за (y^x_t) рівнянь зі зростаючою на кожному кроці кількістю геометрично неінваріантних коефіцієнтів. Іншими словами, допоміжні члени в (6) компактифікують варіаційні рівняння до найпростішої форми (8) та одночасно показують вплив кривини. Крім того, нові варіації виникають також і при дослідженні регулярних властивостей напівгрупи $(P_tf)(x) = \mathbf{E}\,f(y^x_t)$. Можна довести зображення

$$(\nabla^x)^n P_t f(x) = \sum_{j_1+\ldots+j_s=n,\ s=1,\ldots,n} \mathbf{E}\ < (\nabla^y)^s f(y^x_t),\, (\mathbb{V}^x)^{j_1}y^x_t \otimes \ldots \otimes (\mathbb{V}^x)^{j_s}y^x_t >,$$

тобто варіації нового типу пов'язують класичні коваріантні похідні еволюції $(\nabla^x)^n P_t f(x)$ і початкової функції $(\nabla^y)^s f(y)$ – і лише вони!

5. Нелінійні оцінки для диференціальних потоків на многовидах. Зі структури варіаційних рівнянь (8) і ланцюжкового правила для нової коваріантної похідної $\mathbb{V}^x_k u^{(i)}_{(j)}(y^x_t) = [\nabla_\ell u^{(i)}_{(j)}](y^x_t)\dfrac{\partial y^\ell}{\partial x^k}$ отримуємо нелінійну пропорцію

$$\mathbb{V}^x y^x_t \ \sim\ \sqrt[n]{(\mathbb{V}^x)^n y^x_t}, \qquad (9)$$

що дає можливість ввести нелінійний вираз

$$\rho_n(y,t)=\sum_{j=1,\dots,n}\mathbf{E}\,p_j(\rho^2(y_t^x,z))\,||(\mathbb{V}^x)^j y_t^x||^{m/j}. \qquad (10)$$

Надалі z позначає будь-яку фіксовану точку многовиду, $\rho(x,y)$ позначає геодезичну відстань на многовиді

$$\rho(x,y)=\inf_{\gamma,\ \gamma(0)=x,\ \gamma(1)=y}\int_0^1 |\frac{d\gamma(s)}{ds}|_{T_{\gamma(s)}M}ds.$$

Введемо позначення $\widetilde{A_0}=A_0+\sum_\alpha \nabla_{A_\alpha}A_\alpha$.

Теорема. *Припустимо, що виконуються такі умови:* ***1)*** *дисипативність та коерцитивність:* $\forall C, C'$ *існує* K_C *така, що*

$$\forall\, x\in M \qquad <\widetilde{A_0}(x),\nabla^x\rho^2(x,z)>+C\sum_\alpha\|A_\alpha(x)\|^2\le K_C(1+\rho^2(x,z)),$$

$$<\nabla\widetilde{A_0}[h],h>+C\sum_{\alpha=1}^d|\nabla A_\alpha[h]|^2+C'\sum_\alpha<R(A_\alpha,h)A_\alpha,h>\le K_C\|h\|^2; \qquad (11)$$

2) *нелінійна поведінка похідних:* $\exists\,\mathbf{k}\;\forall\,j\quad \|(\nabla)^j\widetilde{A_\bullet}(x),R(x)\|\le(1+\rho(x,z))^{\mathbf{k}}$.

Якщо поліноміальні ваги $p_j\ge 1$ *задовольняють ієрархію*

$$\forall\,j_1+\dots+j_s=i\quad [p_i(z)]^i\,(1+|z|)^{m\mathbf{k}}\le[p_{j_1}(z)]^{j_1}\dots[p_{j_s}(z)]^{j_s}, \qquad (12)$$

то має місце ***нелінійна оцінка на регулярність*** :

$$\exists\,K\quad \rho_n(y,t)\le e^{Kt}\rho_n(y,0).$$

Д о в е д е н н я. За формулою Іто диференціал одного з членів нелінійного виразу (10) має вигляд (тимчасово покладемо $2q=m/i$, $p=p_i$)

$$\begin{gathered}h(t)=\mathbf{E}p(\rho^2(y_t^x,z))||(\mathbb{V}^x)^i y_t^x||^{2q}=h(0)+\\ +\mathbf{E}\textstyle\int_0^t\{p(\rho^2(y_s^x,z))\,d||(\mathbb{V}^x)^i y_s^x||^{2q}+||(\mathbb{V}^x)^i y_s^x||^{2q}dp(\rho^2(y_s^x,z))+\\ +\frac12 d[p(\rho^2(y_s^x,z)),||(\mathbb{V}^x)^i y_s^x||^{2q}]\ \}=h(0)+I_1+I_2+I_3,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}I_1=\textstyle\int_0^t\mathbf{E}\{p(\rho^2(y_s^x,z))(2q||(\mathbb{V}^x)^i y_s^x||^{2(q-1)}d||(\mathbb{V}^x)^i y_s^x||^2+\\ +q(2q-2)||(\mathbb{V}^x)^i y_s^x||^{2(q-2)}d[||(\mathbb{V}^x)^i y_s^x||^2,||(\mathbb{V}^x)^i y_s^x||^2])\},\end{gathered} \qquad (13)$$

$$\begin{gathered}I_2=\textstyle\int_0^t\mathbf{E}p(\rho^2(y_s^x,z))(2q||(\mathbb{V}^x)^i y_s^x||^{2q}(p'(\rho^2(y_s^x,z))d\rho^2(y_s^x,z)+\\ +\frac12 p''(\rho^2(y_s^x,z))d[\rho^2(y_s^x,z),\rho^2(y_s^x,z)]\,),\end{gathered} \qquad (14)$$

$$\begin{gathered}I_3=\textstyle\frac12\int_0^t\mathbf{E}p(\rho^2(y_s^x,z))p'(\rho^2(y_s^x,z))||(\mathbb{V}^x)^i y_s^x||^{2(q-1)}\times\\ \times d[\rho^2(y_s^x,z),||(\mathbb{V}^x)^i y_s^x||^2].\end{gathered} \qquad (15)$$

Крок 1. Оцінка членів (13). Перш за все, зауважимо, що в [2] було встановлено таке зображення для диференціала норми варіаційного процесу.

Лема.

$$d||(\mathbb{V}^x)^i y_t^x||^2=g^{\gamma\varepsilon}(x)\,\{\,g_{mn}(\mathbb{V}_\gamma^x y^m M_{\varepsilon\ \alpha}^{\ n}+\mathbb{V}_\varepsilon^x y^n M_{\gamma\ \alpha}^{\ m})dW^\alpha+$$

$$+g_{mn}(\mathbb{V}_\gamma^x y^m N_\varepsilon^n+\mathbb{V}_\varepsilon^x y^n N_\gamma^m+M_{\gamma\ \alpha}^{\ m}M_{\varepsilon\ \alpha}^{\ n})dt+\frac12 g_{mn}(\mathbb{V}_\gamma^x y^m P_\varepsilon^n+\mathbb{V}_\varepsilon^x y^n P_\gamma^m)dt\,\},\ (16)$$

де коефіцієнти P_γ^m *рекурентно задано наступним чином:*

$$P_k^m=\mathbb{V}_k^x(\nabla_{A_\alpha}A_\alpha^m)+R_{p\ \ell q}^{\ m}A_\alpha^p A_\alpha^q(\mathbb{V}_k^x y^\ell), \qquad (17)$$

$$\begin{gathered}P_{\gamma\cup\{k\}}^m=\mathbb{V}_k^x P_\gamma^m+2R_{p\ \ell q}^{\ m}M_{\gamma\ \alpha}^{\ p}(\mathbb{V}_k^x y^\ell)A_\alpha^q+\\ +(\nabla_s R_{p\ \ell q}^{\ m})X_\gamma^p(\mathbb{V}_k^x y^\ell)A_\alpha^q A_\alpha^s+R_{p\ \ell q}^{\ m}X_\gamma^p(\mathbb{V}_k^x A_\alpha^\ell)A_\alpha^q+\\ +R_{p\ \ell q}^{\ m}X_\gamma^p(\mathbb{V}_k^x y^\ell)(\nabla_{A_\alpha}A_\alpha).\end{gathered} \qquad (18)$$

Використовуючи зв'язок (7), (8), маємо рекурентні зображення коефіцієнтів:

$$M^m_{\{k\}\alpha} = \mathbb{V}^x_k A^m_\alpha(y^x_t), \quad M_{\gamma\cup\{k\}\ \alpha}^{\ m} = \mathbb{V}^x_k M_{\gamma\ \alpha}^{\ m} + R_{p\ \ell q}^{\ m} X^p_\gamma(\mathbb{V}^x_k y^\ell) A^q_\alpha,$$

$$N^m_{\{k\}} = \mathbb{V}^x_k A^m_0(y^x_t), \quad N^m_{\gamma\cup\{k\}} = \mathbb{V}^x_k N^m_\gamma + R_{p\ \ell q}^{\ m} X^p_\gamma(\mathbb{V}^x_k y^\ell) A^q_0.$$

Застосування ланцюжкового правила (5) дає зображення

$$M_{\gamma\ \alpha}^{\ m} = \nabla^y_\ell A^m_\alpha[\mathbb{V}^x_\gamma y^\ell] + \sum_{\beta_1\cup\ldots\cup\beta_s=\gamma,\ s\geq 2} K'_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(\mathbb{V}^x_{\beta_1}y, ..., \mathbb{V}^x_{\beta_s}y),$$

$$N_\gamma^{\ m} = \nabla^y_\ell A^0_\alpha[\mathbb{V}^x_\gamma y^\ell] + \sum_{\beta_1\cup\ldots\cup\beta_s=\gamma,\ s\geq 2} K''_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(\mathbb{V}^x_{\beta_1}y, ..., \mathbb{V}^x_{\beta_s}y) \tag{19}$$

з доданками K', K'', що залежать від A_0, A_α, R та їхніх класичних коваріантних похідних. Крім того, ці доданки є лінійними відносно аргументів у дужках і відображають помічену раніше пропорцію варіаційних рівнянь (9).

Аналогічно з (5) і (17) отримаємо

$$P^m_k = \mathbb{V}^x_k(\nabla_{A_\alpha} A^m_\alpha(y)) + R_{p\ \ell q}^{\ m} A^p_\alpha A^q_\alpha \mathbb{V}^x_k y^\ell =$$

$$= \nabla^y_\ell \nabla_{A_\alpha} A^m_\alpha \cdot \mathbb{V}^x_k y^\ell + R(A_\alpha, \mathbb{V}^x_k y) A_\alpha.$$

Тому з (17), (18) для коефіцієнтів P^m_γ маємо

$$P^m_\gamma = \nabla_\ell \nabla_{A_\alpha} A^m_\alpha \cdot \mathbb{V}^x_\gamma y^\ell + R(A_\alpha, \mathbb{V}^x_\gamma y) A_\alpha + \sum_{\beta_1\cup..\cup\beta_s=\gamma,\ s\geq 2} K_{\beta_1,..,\beta_s}(\mathbb{V}^x_{\beta_1}y, ..., \mathbb{V}^x_{\beta_s}y).$$

Функції $K_{\beta_1,\ldots,\beta_s}$ залежать від A_0, A_α, R і їх коваріантних похідних. Крім того, залежність $K_{\beta_1,..,\beta_s}(\mathbb{V}^x_{\beta_1}y, ..., \mathbb{V}^x_{\beta_s}y)$ від варіацій нижчого порядку $\mathbb{V}^x_\beta y$ знову відображає пропорцію (9).

Враховуючи (16), приходимо до висновку, що поведінка головної частини диференціала варіаційного процесу

$$d||(\mathbb{V}^x)^i y^x_t||^2 = 2 < (\mathbb{V})^i y, \nabla^y_\ell A_\alpha[(\mathbb{V})^i y^\ell] > dW^\alpha +$$

$$+\{\, 2 < (\mathbb{V})^i y, \nabla^y_\ell \widetilde{A_0}(\mathbb{V})^i y^\ell] > +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^d ||\nabla A_\alpha[(\mathbb{V})^i y]\,||^2 + \sum_{\alpha=1}^d < R(A_\alpha, (\mathbb{V})^i y) A_\alpha, (\mathbb{V})^i y > \} dt +$$

$$+ \sum_{j_1+\ldots+j_s=i,\ s\geq 2} < (\mathbb{V}^x)^i y,\ \{K^1_{j_1,\ldots,j_s,\alpha}((\mathbb{V})^{j_1}y, ..., (\mathbb{V})^{j_s}y) dW^\alpha +$$

$$+K^2_{j_1,\ldots,j_s}((\mathbb{V})^{j_1}y, ..., (\mathbb{V})^{j_s}y) dt\} > \tag{20}$$

контролюється *умовою коерцитивності* (11). Як і раніше, коефіцієнти K^1, K^2 залежать від коваріантних похідних A_0, A_α, R і відображають пропорцію (9).

Тому можемо виділити умову коерцитивності при оцінці членів I_1 :

$$I_1 \leq K\mathbf{E}\int_0^t p(\rho^2(y^x_t, z))||(\mathbb{V})^i y^x_t||^{2(q-1)}\{< \nabla\widetilde{A_0}[(\mathbb{V})^i y^x_t], (\mathbb{V})^i y^x_t > +$$

$$+C\sum_{\alpha=1}^d |\nabla A_\alpha[(\mathbb{V})^i y^x_t]|^2 + C' \sum_\alpha < R(A_\alpha, (\mathbb{V})^i y^x_t) A_\alpha, (\mathbb{V})^i y^x_t > \} dt + \tag{21}$$

$$+ \sum_{j_1+\ldots+j_s=i,\, s\geq 2} \mathbf{E}\int_0^t p(\rho^2(y^x_t, z))||(\mathbb{V})^i y^x_t||^{2(q-1)} < (\mathbb{V})^i y, K_{j_1,\ldots,j_s}((\mathbb{V})^{j_1}y, ..., (\mathbb{V})^{j_s}y) > dt$$

з коефіцієнтами K, як раніше.

Крок 2. Оцінка членів з похідними метричної відстані. Для оцінки члена I_2 використаємо монотонність і поліноміальність ваги p ($\exists C : p''(u)u \leq \leq Cp'(u)$):

$$\int_0^1 \mathbf{E}||(\mathbb{V})^i y||^{2q}\{p'(\rho^2(y,z))d\rho^2(y,z) + \frac{1}{2}p''(\rho^2(y,z))d[\rho^2(y,z),\rho^2(y,z)] =$$

$$= \int_0^1 \mathbf{E}||(\mathbb{V})^i y||^{2q}\{p'(\rho^2(y,z))L^1\rho^2(y,z)+$$

$$+\frac{1}{2}p''(\rho^2(y,z))\rho^2(y,z)\frac{1}{\rho^2(y,z)}\sum_{\alpha=1}^{d}(A^1_\alpha\rho^2(y,z))^2\}dt \leq$$

$$\leq \int_0^t \mathbf{E}||(\mathbb{V})^i y||^{2q}p'(\rho^2(y,z))\{L^1\rho^2(y,z) + \frac{C}{\rho^2(y,z)}\sum_{\alpha=1}^{d}(A^1_\alpha\rho^2(y,z)\,)^2\}dt, \qquad (22)$$

а далі застосуємо результати [3] про оптимальні оцінки на оператори другого порядку, що діють на метричну функцію. Індекс ^{1} у L^1, A^1_α означає, що відповідні оператори діють за першою змінною функції.

Теорема [3]. *За умов коерцитивності та дисипативності* (11) *існує стала* K *така, що*

$$L^1\rho^2(x,y) \leq K(1+\rho^2(x,y)). \qquad (23)$$

Крім того, $\forall C\ \exists K_C$ *така, що*

$$L^1\rho^2(x,y) + C\sum_{\alpha=1}^{d}\frac{(A^1_\alpha\rho^2(x,y))^2}{\rho^2(x,y)} \leq K_C(1+\rho^2(x,y)). \qquad (24)$$

Використовуючи зображення (20), отримаємо оцінку на (15):

$$|p'(\rho^2)\,||(\mathbb{V})^i y||^{2(q-1)}d[\rho^2, ||(\mathbb{V})^i y^2]\,| \leq$$

$$\leq p'(\rho^2)||(\mathbb{V})^i y||^{2q}\sum_{\alpha=1}^{d}\frac{(A^1_\alpha\rho^2))^2}{\rho^2}+$$

$$+p'(\rho^2)\rho^2||(\mathbb{V})^i y||^{2(q-1)}||\nabla A_\alpha[(\mathbb{V})^i y] + \sum_{j_1+\ldots+j_s,\ s\geq 2}K'_{j_1,\ldots,j_s}((\mathbb{V})^{j_1}y,\ldots,(\mathbb{V})^{j_s}y)||^2. \qquad (25)$$

Крок 3. Використання пропорції (9). Остаточно з (21), (22) і (25) маємо оцінку

$$h(t) = \mathbf{E}p(\rho^2(y^x_t,z))||(\mathbb{V})^i y^x_t||^{2q} \leq h(0) + C\int_0^t h(t)dt+$$

$$+\sum_{j_1+\ldots+j_s,\ s\geq 2}\int_0^t \mathbf{E}p(\rho^2(y,z))||(\mathbb{V})^i y||^{2(q-1)}K'_{i;j_1,\ldots,j_s}((\mathbb{V})^i y;(\mathbb{V})^{j_1}y,\ldots,(\mathbb{V})^{j_s}y)dt,$$

де коефіцієнт K' знову відображає пропорцію (9). Перший і другий доданки в (25) було об'єднано з (22) і (21) відповідно. Після цього застосовано умову коерцитивності (11), нерівність (24) і поліноміальність ваги p: $(1+|u|)|p'(u)| \leq \leq \mathrm{const}\cdot p(u),\ u \in \mathbb{R}^1$.

Для оцінки членів з K' використаємо поліноміальність поведінки коефіцієнтів A_α рівняння (2) та кривини многовиду. На підставі нерівності $|x^{q-1}y| \leq \leq |x|^q/q + (q-1)|y|^q/q$ маємо

$$\mathbf{E}p(\rho^2)||(\mathbb{V})^i y||^{2(q-1)}K_{i;j_1,\ldots,j_s}((\mathbb{V})^i y;(\mathbb{V})^{j_1}y,\ldots,(\mathbb{V})^{j_s}y) \leq$$

$$\leq \mathbf{E}p(\rho^2)(1+\rho^2)^{\mathbf{k}}||(\mathbb{V})^i y||^{2q-1}||(\mathbb{V})^{j_1}y||\ldots||(\mathbb{V})^{j_s}y|| \leq$$

$$\leq C\mathbf{E}p||(\mathbb{V})^i y||^{2q} + C'\mathbf{E}p(\rho^2)(1+\rho^2)^{2q\mathbf{k}}||(\mathbb{V})^{j_1}y||^{2q}\ldots||(\mathbb{V})^{j_s}y||^{2q}.$$

Перший доданок дає $h(t)$, для оцінки другого нагадаємо, що $2q = m/i$, тому має місце зображення

$$||x_{j_1}||^{m/i}...||x_{j_s}||^{m/i} = (||x_{j_1}||^{m/j_1})^{j_1/i}...(||x_{j_s}||^{m/j_s})^{j_s/i}.$$

Тоді з нелінійної ієрархії поліноміальних ваг (12) випливає

$$p_i(\rho^2)(1+\rho^2)^{\mathbf{k}m/i}||(\mathbb{V})^{j_1}y||^{m/i}...||(\mathbb{V})^{j_s}y||^{m/i} \leq$$

$$\leq (p_{j_1}(\rho^2)\,||(\mathbb{V})^{j_1}y||^{m/j_1})^{j_1/i}...(p_{j_s}(\rho^2)\,||(\mathbb{V})^{j_s}y||^{m/j_s})^{j_s/i} \leq$$

$$\leq \frac{j_1}{i}p_{j_1}(\rho^2)\,||(\mathbb{V})^{j_1}y||^{m/j_1} + ... + \frac{j_s}{i}p_{j_s}(\rho^2)\,||(\mathbb{V})^{j_s}y||^{m/j_s},$$

тобто диференціал кожного з членів у нелінійному виразі (10) оцінюється членами з того ж виразу:

$$h_i(t) = \mathbf{E}p_i(\rho^2)\,||(\mathbb{V})^i y||^{q/i} \leq h_i(0) + \mathrm{const}\int_0^t \rho_n(y,s)ds\,.$$

З цієї нерівності випливає (10). $\diamondsuit$

Висновки. Введення інваріантних варіацій $(\mathbb{V})^j y_t^x$ процесу y_t^x на многовиді дало можливість геометрично коректно досліджувати регулярність на некомпактних многовидах і одержати глобальні інваріантні умови на регулярність.

Дослідження підтримано фундацією А. фон Гумбольдта (Німеччина) та стипендією Президента України.

1. *Antoniouk A. Val.* Nonlinear symmetries of variational calculus and regularity properties of differential flows on non-compact manifolds // Proc. 5 th Int. Conf. «Symmetries in Math. Phys.». – Kiev, 2003. – P. 1228–1235.
2. *Antoniouk A. Val.* Regularity of nonlinear flows on manifolds: Nonlinear estimates on new type variations or why generalizations of classical covariant derivatives are required? // Нелинейные граничные задачи. – (У друці).
3. *Antoniouk A. Val.* Towards upper bounds on general second order operators on metric function // Укр. мат. вісн. – 2004. – **1**, № 4. – (У друці).
4. *Antoniouk A. Val., Antoniouk A. Vict.* High order symmetries of variations and nonlinear quasi-contractive estimates approach to the parabolic regularity problems // Нелинейные граничные задачи. – 2002. – Вып. 12. – P. 3–12.
5. *Antoniouk A. Val., Antoniouk A. Vict.* Nonlinear estimates approach to the regularity properties of diffusion semigroups // In «FrontNonlinear Analysis and Applications: To V. Lakshmikantham on his 80th birthday» / Eds. Ravi P. Agarwal and Donal O'Regan. – Kluwer, 2003. – Vol. 1. – P. 165–226.
6. *Belopolskaja Y. I., Daletskii Y. L.* Stochastic equations and differential geometry. – Kluwer, 1996. – 256 p.
7. *Bismut J.-M.* Large deviations and the Malliavin calculus. – Basel: Birkhäuser, 1984. – 216 p. – Ser. «Progr. in Math.», vol. **45**.
8. *Elworthy K. D.* Stochastic flows on Riemannian manifolds // Diffusion Processes and Related Problems in Analysis / Eds. M. A. Pinsky and V. Wihstutz. – Basel: Birkhäuser, 1992. – P. 37–72.
9. *Emery M.* Stochastic calculus in manifolds. – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – 151 p.
10. *Itô K.* Stochastic differential equations in a differentiable manifold // Nagoya Math. J. – 1950. – **1**. – P. 35–47.
11. *Itô K.* The Brownian motion and tensor fields on Riemannian manifolds // Proc. Int. Cong. Math. (Stockholm). – 1962. – P. 536–539.
12. *Malliavin P.* Stochastic Analysis. – Paris: Springer-Verlag, 1997. – 342 p.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОЦЕНКИ НА РЕГУЛЯРНОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ НА МНОГООБРАЗИЯХ

При исследовании диференциальных потоков на некомпактных многообразиях существенную роль играют условия на коэффициенты уравнения на бесконечности. В работе рассмотрено диференциальное уравнение первого порядка с глобально нелипшицевыми коэффициентами, которое также может включать случайные члены. Показано, что корректное исследование вариаций нелинейных уравнений на многообразиях требует обобщения ковариантной производной Римана. Для соответствующих вариационных уравнений получено семейство нелинейных оценок на регулярность, которое основано на нелинейных симметриях вариаций. Исследовано влияние кривизны многообразия на регулярные свойства.

NONLINEAR ESTIMATES ON REGULARITY OF DIFFERENTIAL FLOWS ON MANIFOLDS

During the study of differential flows on noncompact manifolds the essential role is played by conditions on the behaviour of coefficients on the infinity. We consider the first order differential equation with globally non-Lipschitz coefficients on manifold that could also contain random terms. It is demonstrated that the correct investigation of variations of nonlinear equations on manifolds with respect to the initial conditions and parameters requires the generalization of the Riemannian covariant derivative. For corresponding variational equations we find a family of nonlinear estimates on regularity, based on the nonlinear symmetries of variations. The influence of curvature of manifold on the regular properties is studied.

Ін-т математики НАН України, Київ

Одержано
02.10.03