УДК 517.955.4: 519.217.4

О. Вікт. Антонюк

РЕГУЛЯРНІ ВЛАСТИВОСТІ НАПІВГРУП, ПОРОДЖЕНИХ НЕЛІНІЙНИМИ ПОТОКАМИ НА МНОГОВИДАХ

Для дослідження регулярних властивостей напівгруп, породжених параболічними рівняннями другого порядку з необмеженими коефіцієнтами на некомпактному многовиді, використано подання Колмогорова напівгрупи у термінах розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. Встановлено вплив початкових умов і певних випадкових параметрів розв'язків нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь на регулярність розв'язків параболічних рівнянь. Доведено можливість підвищення гладкості розв'язків під дією напівгрупи у просторах неперервно диференційовних функцій. Умови, необхідні для реалізації такої можливості, записано у термінах коефіцієнтів рівняння і характеристик геометрії многовиду.

На сьогодні існує декілька достатньо добре розроблених підходів дослідження властивості підвищення гладкості під дією дифузійної напівгрупи (див., наприклад, [7, 12]). Ці підходи добре працюють у випадку рівняння з глобально ліпшицевими коефіцієнтами з обмеженими похідними, що природно виникають для рівнянь на компактних многовидах.

На жаль, необмеженість таких об'єктів, як обернена стохастична похідна за Бісмутом і обернений детермінант Маллявена у випадку нелінійного рівняння з неліпшицевими коефіцієнтами, ускладнювала дослідження властивості підвищення регулярності у некомпаконому випадку. В [2] ця проблема була вперше розв'язана для загального дифузійного рівняння в $\mathbb{R}^d$. У цій статті наведемо її розв'язок для нелінійного рівняння на некомпактному многовиді.

1. Вступ. Системи, що виникають у фізичних застосуваннях, як правило, містять нелінійності різного характеру, які значною мірою впливають на поведінку системи в цілому. Тому виникає необхідність розвивати математичні методи, які можуть бути застосовані при дослідженні таких систем. Розглянемо параболічне рівняння із частинними похідними на некомпактному рімановому многовиді M:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = Hu(t,x),$$
$$u(0,x) = f(x) \in B, \tag{1}$$

де оператор

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}(< A_\alpha, \nabla >)^2 + < A_0, \nabla > \tag{2}$$

має необмежені коефіцієнти, породжені гладкими векторними полями $\{A_\alpha\}_{\alpha=1}^d$, A_0 на M, $\dim M = d$. Задачі (1) відповідає напівгрупа $P_t = e^{-tH}$ з генератором H. Добре відомо, що, коли оператор H є m-дисипативним і щільно заданим у банаховому просторі B, то напівгрупа P_t є сильно неперервною за часом і простір B зберігається під дією напівгрупи. Проте, якщо коефіцієнти H сильно зростають на нескінченності многовиду, то напівгрупа P_t не є сильно неперервною у просторі неперервних функцій $C_b(M)$ і зробити висновок про збереження, наприклад, просторів гладких функцій $C_b^n(M)$ на основі аналітичних методів стає неможливим.

Оскільки оператор H є оператором другого порядку, можна використати зв'язок теорії напівгруп з теорією стохастичних диференціальних рівнянь. Тоді напівгрупу можна побудувати за розв'язком стохастичного рівняння на M:

$$d\xi_t^x = A_0(\xi_\tau^x)d\tau + \sum_\alpha A_\alpha(\xi_\tau^x)\delta W_\tau^\alpha,$$
$$\xi_0^x = x \in M, \tag{3}$$

за формулою
$$(P_t f)(x) = \mathbf{E}\, f(\xi_t^x). \tag{4}$$

Тут $\mathbf{E}$ означає математичне сподівання стосовно канонічної реалізації міри Вінера $\mathcal{W}$ на ймовірносному просторі $\Omega = C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, W_τ^α – d незалежних $\mathbb{R}^1$-значних вінерівських процесів, δW_τ – диференціал Стратоновича.

Коректне означення стохастичного диференціального рівняння на многовиді є окремим питанням і на сьогодні існує декілька підходів для розв'язання цієї проблеми [6, 9, 10]. У цій роботі під розв'язком рівняння (3) розуміємо адаптований процес ξ_t^x у формі Іто–Стратоновича, що для будь-якої нескінченно диференційовної функції f розв'язує стохастичне рівняння в $\mathbb{R}^1$:

$$f(\xi_t^x) = f(x) + \int_0^t (A_0 f)(\xi_\tau^x)d\tau + \sum_\alpha \int_0^t (A_\alpha f)(\xi_\tau^x)\delta W_\tau^\alpha.$$

Зауважимо, що вибір локальних координатних функцій $f(x) = x^k$ в околах U многовиду дає сім'ю локальних дифузійних рівнянь на процес ξ_t^x, поки він знаходиться у відповідному околі U [9]. Таким чином, процес у формі Іто–Стратоновича є коректно означеним для загального рівняння на некомпактному многовиді з нескінченною кількістю карт.

Метою цієї статті є показати, що, незважаючи на відсутність сильної неперервності напівгрупи P_t, з використанням подання (4) можна довести не тільки збереження певних просторів C^n гладких функцій під дією напівгрупи, але й отримати підвищення гладкості: $P_t : C^n \to C^{n+m}$.

2. Основний результат. Нехай M – гладкий, зв'язний d-вимірний ріманів многовид, на якому задано двічі коваріантний симетричний неособливий у кожній точці метричний тензор g_{ij}.

За допомогою метричного тензора g_{ij} стандартним способом задаємо відстань $\rho(x,y)$ між двома точками x, y многовиду M:

$$\rho(x,y) = \inf_\psi \{ \int_a^b (g_{\alpha\beta}(\psi(t))\dot\psi^\alpha(t)\dot\psi^\beta(t))^{1/2}dt, \quad \psi(a) = x, \psi(b) = y \},$$

де $\inf$ беремо по будь-яких гладких кривих $\psi(t)$, що з'єднують ці точки.

Накладемо на коефіцієнти оператора (2) і геометрію многовиду наступні умови:

A1) ***Дисипативність*: *для деякої фіксованої точки $o \in M$ і для будь-якої сталої $C \in \mathbb{R}^1$ існує така стала $K_C \in \mathbb{R}^1$, що $\forall x \in M$***

$$< \widetilde{A_0}(x), \nabla^x \rho^2(x,o) > + C \sum_{\alpha=1}^d \|A_\alpha(x)\|^2 \le K_C(1 + \rho^2(x,o)).$$

Тут
$$\widetilde{A_0} = A_0 + \frac{1}{2}\sum_\alpha \nabla_{A_\alpha} A_\alpha,$$

де ∇_{A_α} позначає коваріантну похідну в напрямі векторного поля A_α; ∇^x означає, що коваріантна похідна ∇ діє на функцію $\rho^2(x,o)$ за першою змінною x; ρ – метрика на многовиді M. Надалі норми векторних полів і парування $< \cdot, \cdot >$ беруться у відповідних дотичних просторах.

A2) ***Коерцитивність*: *для будь-яких сталих C, $C' \in \mathbb{R}^1$ існує така стала $K_C \in \mathbb{R}^1$, що для будь-яких $x, y \in M$ і будь-якого h***

$$< \nabla\widetilde{A_0}[h], h > + C \sum_{\alpha=1}^d \|\nabla A_\alpha[h]\|^2 + C' \sum_{\alpha=1}^d < R(A_\alpha, h)A_\alpha, h > \le K_C\|h\|^2.$$

Тут вираз

$$< R(A_\alpha,h)A_\alpha,h> = g_{mn}R_{p\ \ell q}^{\ m}\,A_\alpha^p h^n A_\alpha^\ell h^q$$

визначається у термінах $(1,3)$-тензора кривини $R_{p\ \ell q}^{\ m}$ і метричного тензора g_{mn}.

A3) ***Нелінійність поведінки коефіцієнтів і кривини***: для будь-якого n існують сталі $\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_\alpha,\mathbf{k}_R$ такі, що

$$\|\nabla_\gamma A_0(x)\| \le (1+\rho(x,o))^{\mathbf{k}_0},$$
$$\|\nabla_\gamma A_\alpha(x)\| \le (1+\rho(x,o))^{\mathbf{k}_\alpha},$$
$$\|\nabla_\gamma R(x)\| \le (1+\rho(x,o))^{\mathbf{k}_R},$$

де $\nabla_\gamma = \nabla_{j_1}...\nabla_{j_n}$, $\gamma=\{j_1,...,j_n\}$.

Побудуємо простори гладких функцій наступним чином. Скажемо, що функція $f\in C^n_{\vec q(\mathbf{k})}(M)$, якщо норма

$$\|f\|_{C^n_{\vec q(\mathbf{k})}} = \max_{i=0,..,n}\sup_{x\in M}\frac{\sum\limits_{|\gamma|=i}\|\nabla_\gamma f(x)\|}{q_i(\rho^2(x,o))},\qquad \vec q=\{q_0,..,q_n\},$$

є скінченною і функції $q_i\ge 1$ мають поліноміальну поведінку та задовольняють ієрархію

$$\forall\, i=1,...,n,\qquad \forall\, y\in\mathbb{R}_+\quad q_{i+1}(y)\ge(1+y)^{\mathbf{k}}q_i(y).$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови **A1**) – **A3**) та існує така стала* $\mathbf{k}_\varepsilon>0$, *що*

$$\inf_x \frac{\|A_\alpha(x)\|}{(1+\rho^2(x,o))^{\mathbf{k}_\varepsilon}}\ge\varepsilon>0. \tag{5}$$

Тоді для будь-якого n *існують такі сталі* K, M *та* $\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_\alpha,\mathbf{k}_R,\mathbf{k}_\varepsilon)$, *що*

$$\forall\, t>0\qquad P_t: C^n_{\vec q(\mathbf{k})}(M)\mapsto C^{n+1}_{(\vec q(\mathbf{k}),q_{n+1}(\mathbf{k}))}(M),\qquad n\in\mathbb{N},$$

і справджується нерівність

$$\|P_t f\|_{C^{n+1}_{(\vec q(\mathbf{k}),q_{n+1}(\mathbf{k}))}}\le\frac{Ke^{Mt}}{\sqrt t}\|f\|_{C^n_{\vec q(\mathbf{k})}}.$$

Д о в е д е н н я. Наступне зображення для коваріантної похідної n-го порядку напівгрупи є відправним при доведенні теореми 1:

$$\nabla_\gamma P_t f(x)=\sum_{\delta_1\cup..\cup\delta_s=\gamma}\mathbf{E}\,(\nabla^\xi_{\{j_1...j_s\}}f)(\xi^x_t)\,\mathbb{V}_{\delta_1}\xi^{j_1}...\mathbb{V}_{\delta_s}\xi^{j_s}. \tag{6}$$

Тут $\gamma=\{j_1,...,j_n\}$ — множина напрямів, вздовж яких відбувається диференціювання, $\nabla^\xi_{\{j_1...j_s\}}=\nabla^\xi_{j_1}...\nabla^\xi_{j_s}$, де ∇^ξ_k позначає коваріантну похідну Рімана, яка діє на функцію f за змінною ξ (на відміну від ∇, що діє за x). Вираз $\mathbb{V}_\delta=\mathbb{V}_{k_1}...\mathbb{V}_{k_i}$, $\delta=\{k_1,...,k_i\}$, де $\mathbb{V}_k$ – узагальнення коваріантної похідної Рімана на випадок довільного дифеоморфізму на многовиді, задається рекурентною формулою

$$\begin{aligned}&\mathbb{V}_k\xi^m=\nabla_k\xi^m=\frac{\partial\xi^m}{\partial x^k},\\ &\mathbb{V}_k(\mathbb{V}_\gamma\xi^m)=\nabla_k(\mathbb{V}_\gamma\xi^m)+\Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi^x_t)\mathbb{V}_\gamma\xi^p\nabla_k\xi^q.\end{aligned} \tag{7}$$

Тут $\xi^m=(\xi^x_t)^m$ – m-та координата процесу ξ^x_t. Зображення (6) перевіряється прямим обчисленням і випливає з подання Коломогорова для напівгрупи (4). У роботах [1, 3] обговорюється природність введення похідної (7), її властивості та тензорний характер усіх виразів в (6). Крім того, для похідної $\mathbb{V}_k$ має місце ланцюжкове правило: для будь-якого тензора $T^\beta=T^{i_1...i_n}$, $\beta=\{i_1,..,i_n\}$,

$$\mathbb{V}_k(T^\beta(\xi))=\nabla_m T^\beta(\xi)\mathbb{V}_k\xi^m.$$

На наступному кроці отримаємо зображення для похідної напівгрупи, з якого випливатиме підвищення гладкості під її дією. Для цього використаємо деякі стандартні означення аналізу на вінерівському просторі (числення Маллявена).

Нехай $\mathcal{J}$ – множина всіх адаптовних неперервних інтегровних процесів $u_t(\omega)$ таких, що $\mathbf{E}\int_0^T |u_t|^p dt < \infty$ для будь-яких T, $p > 0$. Нагадаємо [7, 12], що випадкова функція $F(\omega)$ є *стохастично диференційовною*, якщо для будь-якого $u \in \mathcal{J}$ на множині повної міри існує похідна в $\bigcap\limits_{p\geq 1} L_p(\Omega, \mathcal{W})$:

$$D_u F(\omega) = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} F(\{\omega_t + \varepsilon \int_0^t u_\tau d\tau\}_{t\in\mathbb{R}_+}).$$

Добре відомо, що D_u має такі властивості:

$$\begin{array}{ll} 1^\circ) & D_u f(\xi^1,...,\xi^n) = \sum\limits_{i=1}^n \partial_i f(\xi^1,...,\xi^n)\, D_u\xi^i; \\ 2^\circ) & D_u \int_0^t f_\tau d\tau = \int_0^t D_u f_\tau d\tau; \\ 3^\circ) & D_u \int_0^t g_\tau \delta W_\tau = \int_0^t D_u g_\tau \delta W_\tau + \int_0^t u_\tau g_\tau d\tau, \end{array} \tag{8}$$

і справджується формула інтегрування частинами [7, 12]

$$\mathbf{E}\, D_u F = \mathbf{E}\, F \int_0^\infty u_\tau\, dW_\tau. \tag{9}$$

Подібно до (7) запровадимо *узагальнену стохастичну похідну* $\mathbb{D}_u$ таким чином:

$$\begin{array}{l} \mathbb{D}_u \xi^m = D_u \xi^m, \\ \mathbb{D}_u(\mathbb{D}_\gamma \xi^m) = D_u(\mathbb{D}_\gamma \xi^m) + \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi)\mathbb{D}_\gamma \xi^p D_u \xi^q. \end{array}$$

Тут $\gamma = \{u_1, ..., u_n\}$ – множина напрямів $u_i \in \mathcal{J}$, $i = 1, ..., n$, $\mathbb{D}_\gamma = \mathbb{D}_{u_1} ... \mathbb{D}_{u_n}$.

Враховуючи властивості (8) і (9) похідної D_u нескладно переконатися, що для узагальненої стохастичної похідної $\mathbb{D}_u$ має місце ланцюжкове правило

$$\mathbb{D}_u(\nabla_\gamma^\xi f(\xi_t^x)) = \nabla_m^\xi(\nabla_\gamma^\xi f(\xi_t^x))\mathbb{D}_u\xi^m \tag{10}$$

та справджується формула інтегрування частинами

$$\mathbf{E}\,(\mathbb{D}_u F)G = -\mathbf{E}\, F\mathbb{D}_u G + \mathbf{E}\, F\, G \int_0^\infty u_\tau\, dW_\tau. \tag{11}$$

Наступна теорема узагальнює результати робіт [2, 5] на випадок многовиду.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* ***A1*** *)–* ***A3*** *) та* (5). *Тоді існує такий стохастичний напрямок* z_k, *що*

$$\mathbb{D}_{z_k} \xi^m = t \mathbb{V}_k \xi^m, \tag{12}$$

і справджується оцінка

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t z_k^\sigma dW^\sigma\right)^{2q} \leq K\, t^q e^{M\, t}(1 + \rho^2(x, o))^{2q\mathbf{k}_0}. \tag{13}$$

Д о в е д е н н я. Перш за все, зауважимо, що рівняння на першу похідну $\dfrac{\partial \xi_t^m}{\partial x^k}$ процесу ξ_t за початковою умовою за x і стохастичну похідну $\mathbb{D}_u \xi_t^m$ мають вигляд [4]

$$\frac{\partial \xi_t^m}{\partial x^k} = -\int_0^t \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi_s)\frac{\partial \xi_s^p}{\partial x^k}\,\delta\xi_s^q + \int_0^t \mathbb{V}_k A_0^m(\xi_s)\, ds + \int_0^t \mathbb{V}_k A_\sigma^m(\xi_s)\,\delta W^\sigma, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_u \xi_t^m = \int_0^t A_\sigma^m(\xi_s) u^\sigma\, ds - \int_0^t \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi_s)\, \mathbb{D}_u \xi_s^p\, \delta_s^q + \\ + \int_0^t \mathbb{D}_u A_0^m(\xi_s)\, ds + \int_0^t \mathbb{D}_u A_\sigma^m(\xi_s)\,\delta W_s^\sigma. \end{aligned} \tag{15}$$

На основі критеріїв, наведених у [11], та умов **A1**)–**A3**) для фіксованого $u \in \mathcal{J}$ існує єдиний розв'язок цих рівнянь. Якщо вибрати стохастичний напрямок $u = z_k$ так, щоб

$$\frac{\partial \xi_t^m}{\partial x^k} = A_\sigma^m(\xi_t) z_k^\sigma, \tag{16}$$

то, підставляючи в (15) замість $I\!\!D_u \xi_t$ значення $I\!\!D_{z_k} \xi^m = t \mathbb{V}_k \xi^m$ з використанням (14), співвідношень $I\!\!D_u A^m(\xi_t) = \nabla_j A^m(\xi_t)\, I\!\!D_u \xi^j$ та означення $\mathbb{V}_k$, переконуємося, що рівняння (15) виконується тотожно. З єдиності розв'язків рівняння (15) випливає результат (12). Використовуючи нерівність Дуба [8, гл. 7]

$$\mathbf{E}(\int_0^t z_s^\sigma \, dW_s^\sigma)^{2q} \leq K_q \, t^{q-1} \mathbf{E} \int_0^t \|z_s\|^{2q} \, ds,$$

зображення (16), умову (5) і наступний наслідок нелінійної квазістискуючої оцінки, доведеної у [1]:

$$\mathbf{E}(1 + \rho^2(\xi_t, o))^{2q\mathbf{k}} \|\mathbb{V} \xi_t\|^{2q} \leq M e^{N\,t} (1 + \rho^2(x, o))^{2q\mathbf{k}},$$

отримаємо

$$\mathbf{E}(\int_0^t z_s^\sigma dW_s^\sigma)^{2q} \leq K_q \, t^{q-1} \mathbf{E} \int_0^t (1 + \rho^2(\xi_s, o))^{2q\mathbf{k}_1} \|\mathbb{V} \xi_s\|^{2q} ds \leq$$

$$\leq K \, t^q e^{N\,t} (1 + \rho^2(x, o))^{2q\mathbf{k}_1},$$

що завершує доведення теореми 2. $\diamondsuit$

З теореми 2 і ланцюжкового правила (10) випливає, що для будь-якої гладкої функції $f \in C^\infty_{loc}(M)$ виконується рівність

$$I\!\!D_{z_k}[\nabla^\xi_\gamma f(\xi^x_t)] = \nabla^\xi_m (\nabla^\xi_\gamma f(\xi^x_t)) I\!\!D_{z_k} \xi^m = t \nabla^\xi_m \nabla^\xi_\gamma f(\xi^x_t) \mathbb{V}_k \xi^m. \tag{17}$$

У поданні (6), яке виписано для $(n+1)$ похідної напівгрупи $\nabla_{\gamma+1} P_t f(x)$, $\gamma + 1 = \{k, j_1, ..., j_n\}$, розглянемо перший член і використаємо (11) та (17):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\ \nabla^\xi_{\{i\, i_1..i_n\}} f(\xi^x_t)\ \underbrace{\mathbb{V}_k \xi^i \, \mathbb{V}_{j_1} \xi^{i_1} ... \mathbb{V}_{j_n} \xi^{i_n}}_{n+1} = \\
&= \mathbf{E}\ \frac{1}{t}\, I\!\!D_{z_k} [\nabla^\xi_{\{i_1..i_n\}} f(\xi^x_t)]\, \underbrace{\mathbb{V}_{j_1} \xi^{i_1} ... \mathbb{V}_{j_n} \xi^{i_n}}_{n} = \\
&= \frac{1}{t}\, \mathbf{E}\ \nabla^\xi_{\{i_1..i_n\}} f(\xi^x_t)\, (-I\!\!D_{z_k} + \textstyle\int_0^t z_k dW)\, \underbrace{\mathbb{V}_{j_1} \xi^{i_1} ... \mathbb{V}_{j_n} \xi^{i_n}}_{n}.
\end{aligned}$$

Ці перетворення дозволяють звести перший член у поданні (6) похідної напівгрупи до вигляду з n множниками, що відповідає n-й похідній функції f. Решта членів у (6) для $(\nabla_{\gamma+1} P_t f)(x)$ вже мають таку структуру.

Щоб завершити доведення теореми 1, необхідні оцінки щодо поведінки стохастичних $I\!\!D_{z_k}$ і звичайних $\mathbb{V}_k$ варіацій процесу ξ^x_t. Для цього введемо позначення для нелінійного виразу

$$r_n(\xi, t) = \sum_{\alpha \cup \beta = \{1,..,i\}, i=1,..,n} \mathbf{E}\ p_i(\rho^2(\xi^x_t, o)) \| \frac{1}{t^{|\beta|}} \mathcal{D}^{\alpha \cup \beta} \xi^x_t \|^{q/i}, \quad q \geq 2n. \tag{18}$$

Тут $\mathcal{D}^{\alpha \cup \beta}$ – позначення для набору похідних $\mathcal{D}_{k_1} ... \mathcal{D}_{k_s}$, де $\alpha \cup \beta = \{k_1, ..., k_s\}$, та $\mathcal{D}_{k_j}$ — стохастична $I\!\!D_{k_j}$ або звичайна $\mathbb{V}_{k_j}$ похідна процесу ξ^x_t. Причому до множини β належать ті значення індексів k_j, для яких $\mathcal{D}_{k_j} = I\!\!D_{k_j}$.

Теорема 3 [4]. *Нехай виконуються умови **A1**)–**A3**) і поліноми $p_i(y) \geq 1$ у (18) задовольняють ієрархію*

$$\forall\ \{j_1, ..., j_s\} : \quad j_1 + ... + j_s = i \leq n, \quad [p_i(y)]^i (1 + |y|^2)^{q\,\mathbf{k}} \leq [p_{j_1}(y)]^{j_1} ... [p_{j_s}(y)]^{j_s}.$$

Тоді справджується нелінійна квазістискуюча оцінка на варіації

$$\exists \quad K_\mathbf{k} : \quad \forall \quad t \geq 0 \quad r_n(\xi, t) \leq e^{K_\mathbf{k} t} r_n(\xi, 0).$$

Зауважимо, що вираз $r_n(\xi,t)$ при $t=0$ добре визначений і не має сингулярних членів, що пов'язано з певною поведінкою $I\!D_{k_i}\xi_t^x$ при $t\to 0$. Теорему 3 доведено в роботі [4].

Як наслідок теореми 3 отримуємо нерівність

$$\mathbf{E}\,P(\rho^2(\xi_t^x,o))\|\frac{1}{t^{|\beta|}}\mathcal{D}^i\xi_t^x\|^{q/i}\le Ke^{M\,t}P(\rho^2(x,o))(1+\rho^2(x,o))^{\frac{\mathbf{k}\,q(i-1)}{i}}, \qquad (19)$$

якщо вибрати $p_j(y)=P(y)(1+|y|)^{m\,\mathbf{k}(\frac{1}{j}-\frac{1}{i})}$, $j<i$.

Остаточно має місце така оцінка:

$$\frac{\|\nabla_{\gamma+1}^x P_t f(x)\|}{q_{n+1}(\rho^2(x,o))}\le\sum_{\delta_1\cup..\cup\delta_s=\gamma+1}\frac{\|\mathbf{E}\ \nabla^{\xi}_{\{i_1..i_s\}}f(\xi_t^x)\ \eta_{\delta_1}\mathbb{V}_{\delta_2}\xi^{i_2}...\mathbb{V}_{\delta_s}\xi^{i_s}\|}{q_{n+1}(\rho^2(x,o))}\le$$

$$\le\sum\left(\sup_{\xi_t^x\in M}\frac{\sum\limits_{|\gamma|=s}\|\nabla_\gamma^\xi f(\xi_t^x)\|_{T_\xi^{(0,s)}}}{q_s(\rho^2(\xi_t^x,o))}\right)\frac{\mathbf{E}\ q_s(\rho^2(\xi_t^x,o))\|\eta_{\delta_1}\|\,\|\mathbb{V}_{\delta_2}\xi_t^x\|...\|\mathbb{V}_{\delta_s}\xi_t^x\|}{q_{n+1}(\rho^2(x,o))}\le$$

$$\le\|f\|_{C_{\vec q}^n}\sum\frac{\left(\mathbf{E}\ q_s(\rho^2(\xi_t^x,o))\|\eta_{\delta_1}\|^{\frac{n}{a_1}}\right)^{\frac{a_1}{n}}\prod\limits_{\ell=2}^{s}\left(\mathbf{E}\ q_s(\rho^2(\xi_t^x,o))\|\mathbb{V}_{\delta_\ell}\xi_t^x\|^{\frac{n}{a_\ell}}\right)^{\frac{a_\ell}{n}}}{q_{n+1}(\rho^2(x,o))}=I.$$

Тут через η_{δ_1} позначено один із виразів $\mathbb{V}_{\delta_1}\xi_t^x$, $\dfrac{1}{t}I\!D\xi_t^x$ або $\int_0^t z_k\,dW$, які виникають у відповідних доданках, $a_i=|\delta_i|$. Використовуючи оцінки метрики, властивості звичайних і стохастичних похідних та оцінки (17), (19), для I маємо

$$I\le Ke^{M\,t}\frac{q_s(\rho^2(x,o))(1+\rho^2(x,o))^{\mathbf{k}'}}{\sqrt{t}\,q_{n+1}(\rho^2(x,o))}\|f\|_{C_{\vec q}^n}\le\frac{K'e^{M\,t}}{\sqrt{t}}\|f\|_{C_{\vec q}^n},$$

що завершує доведення теореми 1. $\diamondsuit$

Висновки. В істотно нелінійному випадку досліджено властивість підвищення регулярності для нелінійного потоку на некомпактному многовиді.

1. *Антонюк О. Вал.* Нелінійні оцінки на регулярність диференціальних потоків на многовидах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 63–71.
2. *Антонюк О. Вал., Антонюк О. Вікт.* Формули високих порядків для похідних нелінійних дифузійних напівгруп // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 1. – С. 117–122.
3. *Antoniouk A. Val.* Nonlinear symmetries of variational calculus and regularity properties of differential flows on non-compact manifolds // Proc. 5 th Int. Conf. «Symmetries in Math. Phys.». – Kiev, 2003. – P. 1228–1235.
4. *Antoniouk A. Val., Antoniouk A. Vict.* Nonlinear calculus of variations for differential flows on manifolds, geometrically correct introduction of covariant and stochastic variations // Укр. мат. вісн. – 2004. – **1**, № 4. – С. 449–484.
5. *Antoniouk A. Val., Antoniouk A. Vict.* Nonlinear estimates approach to the regularity properties of diffusion semigroups // In «FrontNonlinear Analysis and Applications: To V. Lakshmikantham on his 80th birthday» / Eds. Ravi P. Agarwal and Donal O'Regan. – Kluwer, 2003. – Vol. 1. – P. 165–226.
6. *Belopolskaja Y. I., Daletskii Y. L.* Stochastic equations and differential geometry. – Kluwer, 1996. – 256 p.
7. *Bismut J.-M.* Large deviations and the Malliavin calculus. – Basel: Birkhäuser, 1984. – 216 p. – Ser. «Progr. in Math.», vol. **45**.
8. *Doob J. L.* Stochastic processes. – New York: Willey, 1953. – 605 p.
9. *Emery M.* Stochastic calculus in manifolds. – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – 151 p.
10. *Itô K.* The Brownian motion and tensor fields on Riemannian manifolds // Proc. Int. Cong. Math. (Stockholm). – 1962. – P. 536–539.
11. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations. – Cambridge Univ. Press, 1990. – 324 p.
12. *Malliavin P.* Stochastic Analysis. – Paris: Springer-Verlag, 1997. – 342 p.

РЕГУЛЯРНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫМИ ПОТОКАМИ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Для исследования регулярных свойств полугрупп, порожденных параболическими уравнениями второго порядка с неограниченными коэффициентами на некомпактном многообразии, использовано представление Колмогорова полугруппы в терминах решений стохастических дифференциальных уравнений. Установлено влияние начальных условий и некоторых случайных параметров решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений на регулярность решений параболических уравнений. Доказана возможность повышения гладкости решений под действием полугруппы в пространствах непрерывно дифференцируемых функций. Условия, необходимые для реализации такой возможности, записаны в терминах коэффициентов уравнения и характеристик геометрии многообразия.

REGULAR PROPERTIES OF SEMIGROUPS, GENERATED BY NONLINEAR FLOWS ON MANIFOLDS

At the investigation of regular properties of semigroups, generated by second order parabolic equations with unbounded coefficients on noncompact manifold the methods of strongly continuous semigroups theory become inapplicable in the spaces of continuously differentiable functions. In this case one can use the relation of semigroup theory with the theory of stochastic differential equations. We study how the regular properties of solutions of parabolic equations are related with the differentiability of solutions to the nonlinear stochastic differential equations with respect to the initial data and random parameters. It is shown how one can prove the result about the raise of smoothness under the action of semigroup in spaces of continuously differentiable functions. The arising conditions relate the nonlinearity of coefficients with the geometry of manifold.

Ін-т математики НАН України, Київ

Одержано
02.10.03