УДК 517.588

Й. Ф. Кушнірчук

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕОДНОРІДНОГО УЗАГАЛЬНЕНОГО ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОГО РІВНЯННЯ

Наведено умови розв'язності неоднорідного узагальненого гіпергеометричного рівняння третього порядку в просторі цілих функцій.

У статті [1] встановлено так звані асоційовані гіпергеометричні функції, які є розв'язками неоднорідного рівняння Ґаусса 2-го порядку

$$z(1-z)w'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)z)w' - \alpha\beta w = f(z),$$

де праві частини $f(z)$ виражаються через розв'язки відповідного однорідного рівняння. Необхідні та достатні умови існування асоційованих функцій Бесселя наведено в [2] за допомогою зведення оператора Бесселя $B = z^2D^2 + zD + {}$ $+ z^2 I$ (тут $D = \frac{d}{dz}$ – оператор диференціювання, I – одиничний оператор) до еквівалентного йому в просторі $\mathcal{A}_R$ аналітичних у крузі $\{z : |z| < R\}$ функцій оператора Ейлера $E = z^2D^2 + zD$. Цей метод застосовано у пропонованій роботі для дослідження умов існування розв'язку в просторі $\mathcal{A}_R$ неоднорідного узагальненого гіпергеометричного рівняння 3-го порядку.

1. Узагальнена гіпергеометрична функція [1]

$$_pF_q(\alpha,\gamma;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{r=1}^{p}(\alpha_r)_k}{k!\prod\limits_{s=1}^{q}(\gamma_s)_k} \cdot z^k, \tag{1}$$

де $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p)$; $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_q)$; α_r, $r = 1,2,\ldots,p$, γ_s – комплексні числа, причому $\gamma_s \ne 0,-1,-2,\ldots$, $s = 1,2,\ldots,q$; $(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$ для $k = 1,2,\ldots$; $(a)_0 = 1$; p,q – фіксовані натуральні числа, $p \le q+1$, є цілою, якщо $p < q+1$, і належить просторові $\mathcal{A}_R$ з $R = 1$ при $p = q+1$. Ця функція задовольняє лінійне диференціальне рівняння $(q+1)$-го порядку

$$\left(zD\prod_{s=1}^{q}(zD + (\gamma_s - 1)I) - z\prod_{r=1}^{p}(zD + \alpha_r I)\right) w = 0. \tag{2}$$

Якщо лише одне з чисел α_r дорівнює $-n$, $n = 0,1,2,\ldots$, то права частина (1) є многочленом n-степеня.

Для спрощення викладок розглянемо випадок $p = 3$, $q = 2$. Тоді функція $_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma_1,\gamma_2;z) = w(z)$ задовольняє диференціальне рівняння 3-го порядку

$$(zD(zD + (\gamma_1 - 1)I)(zD + (\gamma_2 - 1)I) - z(zD + \alpha_1 I)(zD + \alpha_2 I)(zD + \alpha_3 I))w(z) = 0.$$

Нехай α_r, $r = 1,2,3$, є коренями двочленного рівняння $\alpha^3 + n^3 = 0$, тобто $\alpha_1 = -n$, $\alpha_2 = n\varepsilon$, $\alpha_3 = n\bar{\varepsilon}$, де $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Тоді функція

$$w(z) = {}_3F_2(-n, n\varepsilon, n\bar{\varepsilon}, \gamma_1, \gamma_2; z) \equiv \mathcal{F}_n(z)$$

є многочленом n-го степеня і задовольняє диференціальне рівняння

$$z^2(z-1)w'''(z) + (3z - \gamma_1 - \gamma_2 - 1)zw''(z) + (z - \gamma_1\gamma_2)w'(z) = n^3 w(z).$$

Отже, $\mathcal{F}_n(z)$ є власною функцією гіпергеометричного диференціального оператора 3-го порядку [3]

$$H = z^2(z-1)D^3 + (3z - \gamma_1 - \gamma_2 - 1)zD^2 + (z - \gamma_1\gamma_2)D, \tag{3}$$

що відповідає власному значенню n^3, тобто

$$H\mathcal{F}_n(z) = n^3\mathcal{F}_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Для відповідного оператора Ейлера

$$E = z^3D^3 + 3z^2D^2 + zD \tag{5}$$

власною функцією з тим же власним значенням є z^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, тобто

$$Ez^n = n^3z^n. \tag{6}$$

2. Введемо оператор T, який на елементах z^n природного базису довільного простору $\mathcal{A}_R$, $R > 0$, визначається рівностями

$$Tz^n = \mathcal{F}_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Матриця оператора T є верхньотрикутною з елементами

$$t_{kn} = (-1)^k \frac{n^3(n^3-1)(n^3-2^3)\ldots(n^3-(k-1)^3)}{k!(\gamma_1)_k(\gamma_2)_k}, \quad n \geq k > 0,$$

$$t_{00} = 1, \quad t_{kn} = 0 \quad \text{для} \quad k > n \geq 0.$$

Оскільки її діагональні елементи $t_{kk} \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то вона має обернену матрицю (також верхньотрикутну), елементи якої t'_{jk} визначаються із систем лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{l=j+1}^{n} t_{ln}t'_{jl} = -t_{jj}^{-1}t_{jn}, \quad n = j+1, i+2, \ldots, k, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

з відмінними від нуля визначниками $\Delta_{k-j} = \prod\limits_{l=j+1}^{k} t_{ll}$. Ця матриця породжує оператор T'. За допомогою матричного критерію [5] доводиться неперервність у просторі $\mathcal{A}_\infty$ всіх цілих функцій операторів T і $T' = T^{-1}$. Отже, $T : \mathcal{A}_\infty \to \mathcal{A}_\infty$ є ізоморфізмом простору $\mathcal{A}_\infty$. На основі рівностей (7) безпосередньо отримуємо таку теорему.

Теорема 1. *Система $(\mathcal{F}_n(z))_{n=1}^{\infty}$ узагальнених гіпергеометричних многочленів утворює квазістепеневий базис простору $\mathcal{A}_\infty$.*

Справджується також

Теорема 2. *Оператори H, E, визначені рівностями* (3) *і* (5) *відповідно, лінійно еквівалентні в просторі $\mathcal{A}_\infty$, тобто виконуються співвідношення*

$$HT = TE \quad \textit{або} \quad T^{-1}H = ET^{-1}. \tag{8}$$

Д о в е д е н н я. З рівностей (6) отримуємо

$$TEz^n = n^3Tz^n, \quad n - 0, 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

На основі (7) рівності (4) можна записати у такому вигляді:

$$HTz^n = n^3 Tz^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \ . \tag{10}$$

З рівностей (9) і (10) випливає, що й ліві їхні частини співпадають:

$$(HT)z^n = (TE)z^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \ . \tag{11}$$

Оскільки добутки неперервних в $\mathcal{A}_\infty$ операторів є неперервними операторами, то зі співвідношень (11) випливає операторна рівність

$$HT = TE.$$

Отже, ізоморфізм $T,$ визначений рівністю (7), є оператором перетворення оператора E в оператор $H,$ а самі оператори лінійно еквівалентні в просторі $\mathcal{A}_\infty.$ $\diamondsuit$

3. Розглянемо неоднорідне гіпергеометричне рівняння

$$(H - n^3 I)\phi(z) = f(z) \tag{12}$$

з фіксованим $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ і правою частиною $f \in \mathcal{A}_\infty$. Застосуємо до обох частин рівняння (12) оператор T^{-1} і скористаємось другою із рівностей (8). Тоді отримаємо рівняння

$$(E - n^3 I)\psi(z) = g(z), \tag{13}$$

у якому $\psi(z) = T^{-1}\phi(z)$, $g(z) = T^{-1}f(z)$. Зауважимо, що рівняння (12) тоді й лише тоді має розв'язок $\phi \in \mathcal{A}_\infty$, коли рівняння (13) має розв'язок $\psi \in \mathcal{A}_\infty$. Розв'язок рівняння (13) знаходимо у формі степеневого ряду: $\psi(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \psi_m z^m$. Якщо степеневий розклад правої частини має вигляд $g(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} g_m z^m$, то для визначення коефіцієнтів ψ_m одержуємо систему рівнянь

$$(m^3 - n^3)\psi_m = g_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \ ,$$

з якої при $m \neq n$ однозначно знаходимо $\psi_m = \frac{g_m}{m^3 - n^3}$. При $m = n$ відповідне рівняння має довільний розв'язок $\psi_n = A$, якщо тільки $g_n = \frac{1}{n!}g^{(n)}(0) = 0$. При виконанні цієї умови розв'язок рівняння (13) має вигляд

$$\psi(z) = Az^n + \sum_{m \neq n} \frac{g_m}{m^3 - n^3} z^m.$$

Виразимо умову $g_n = 0$ через коефіцієнти степеневого розкладу правої частини рівняння (12) $f(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} f_m z^m$. Оскільки

$$g(z) = T^{-1}\Big(\sum_{m=0}^{\infty} f_m z^m\Big) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \Big(\sum_{j=0}^{m} t'_{jm} z^j\Big) = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=j}^{\infty} t'_{jm} f_m\Big) z^j$$

(тут t'_{jm} – елементи матриці оператора T^{-1}), то за властивістю єдиності степеневого розкладу коефіцієнт $g_n = \sum\limits_{m=n}^{\infty} t'_{nm} f_m$.

Отже, правильна

Теорема 3. *Для того щоб рівняння* (12) *мало розв'язок* $\phi \in \mathcal{A}_\infty$, *необхідно та достатньо, щоб коефіцієнти* f_m *степеневого розкладу його правої частини задовольняли умову*

$$\sum_{m=n}^{\infty} t'_{nm} f_m = 0. \tag{14}$$

При виконанні умови (14) розв'язок рівняння (12) виражається через гіпергеометричні многочлени формулою

$$\phi(z) = A\mathcal{F}_n(z) + \sum_{m\neq n} \frac{g_m}{m^3 - n^3}\mathcal{F}_m(z),$$

у якій $g_m = \sum\limits_{\nu=m}^{\infty} t'_{m\nu} f_\nu$.

Зауважимо, що умова (14) виконується, зокрема, тоді, коли права частина рівняння (12) є многочленом, степінь якого менший ніж n .

1. *Андреев А. А., Килбас А. А.* Решение неоднородного гипергеометрического уравнения и вычисление интегралов // Докл. АН БССР. – 1983. – **27**, № 6. – С. 493–496.
2. *Ибрагимов И. И., Кушнирчук И. Ф.* Об эквивалентности операторов Бесселя и Эйлера в пространствах аналитических в круге функций // Докл. АН СССР. – 1974. – **214**, № 1. – С. 33–36.
3. *Кушнірчук Й. Ф.* Розкладання цілих функцій в ряди за гіпергеометричними многочленами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 6. – С. 503–507.
4. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. – М.–Л.: Физматгиз, 1963. – 379 с.
5. *Фишман К. М.* К вопросу о линейных преобразованиях аналитических пространств // Докл. АН СССР. – 1959. – **127**, № 1. – С. 40–43.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕОДНОРОДНОГО ОБОБЩЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Приведены условия разрешимости неоднородного обобщенного гипергеометрического уравнения третьего порядка в пространстве целых функций.

SOLVABILITY OF NON-HOMOGENEOUS GENERALIZED HYPERGEOMETRIC EQUATION

Conditions of solvability of non-homogeneous generalized hypergeometric third-order equation in the space of entire functions are obtained.

Чернів. нац. ун-т
ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
09.09.03