УДК 517.524

С. М. Возна

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ФОРМУЛА ТИПУ НЬЮТОНА–ТІЛЕ У ВИГЛЯДІ ДВОВИМІРНОГО НЕПЕРЕРВНОГО ДРОБУ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

Для функції двох змінних на основі частинних обернених і розділених різниць спеціального вигляду побудовано інтерполяційний двовимірний неперервний дріб з нерівнозначними змінними. Встановлено формулу його залишкового члена.

1. Вступ. Природно, що використання раціональних функцій як апарату наближення дає кращі результати, ніж використання многочленів, принаймні у випадку мероморфних функцій. Для побудови дробово-раціональних наближень функцій однієї змінної використовуються наближення Паде та тісно пов'язані з ними неперервні дроби [1]. Для функції двох змінних запропоновано декілька формул у вигляді двовимірних неперервних дробів, а саме: формули типу Тіле [3, 5], які використовують частинні обернені різниці та їхні властивості, та формула типу Ньютона–Тіле [4], яка використовує як частинні обернені різниці, так і частинні розділені різниці. Ці інтерполяційні формули побудовано у вигляді двовимірних неперервних дробів із рівнозначними змінними.

Метою даної роботи є побудова інтерполяційної формули типу Ньютона–Тіле з нерівнозначними змінними на основі частинних обернених і розділенних різниць спеціального вигляду та її обґрунтування, а також встановлення вигляду залишкового члена інтерполяційної формули. При цьому використовуються підходи, запропоновані у роботах [4, 5].

2. Інтерполяційний двовимірний неперервний дріб з нерівнозначними змінними. Нехай функція $f(x,y)$ визначена в прямокутнику $\Delta = (a,b)\times$ $\times(c,d) \subset \mathbb{R}^2$, $\Pi_x^n = \{x_i,\ i = 0,1,\dots,n\}$ – розбиття інтервалу (a,b), причому n – непарне. Для функції $f(x,\bar{y})$, де $\bar{y} \in (c,d)$ вибрано довільно, знайдемо раціональну функцію $r_{[n/2]}(x,\bar{y}) = p_{[n/2]}(x,\bar{y})/q_{[n/2]}(x,\bar{y})$, причому $\deg p_{[n/2]}(x,\bar{y}) =$ $= [n/2]+1$, $\deg q_{[n/2]}(x,\bar{y}) = [n/2]$, таку, що інтерполює її у точках $x_i \in \Pi_x^n$, $i = 0,1,\dots,n$, тобто

$$r_{[n/2]}(x_i,\bar{y}) = f(x_i,\bar{y}), \quad i = 0,1,\dots,n.$$

Якщо така функція існує, то вона може бути знайдена як $[n/2]$ наближення дробу Ньютона–Тіле [2] у вигляді

$$\begin{aligned} r_{[n/2]}(x,\bar{y}) &= b_0(\bar{y}) + b_1(\bar{y})(x-x_0) + \\ &+ \cfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{b_2(\bar{y}) + b_3(\bar{y})(x-x_2) + \ddots + \cfrac{(x-x_{2[n/2]-2})(x-x_{2[n/2]-1})}{b_{2[n/2]}(\bar{y}) + b_{2[n/2]+1}(\bar{y})(x-x_{2[n/2]})}}. \end{aligned}$$

Нехай $\Pi_y^m = \{y_i,\ i = 0,1,\dots,m\}$ – розбиття інтервалу (c,d), причому m – непарне. Позначимо через $\Pi_{x,y}^{n,m} = \Pi_x^n \times \Pi_y^m$ прямокутну сітку. Знайдемо раціональну функцію $R_{[n/2],[m/2]}(x,y)$, яка залежить від $(n+1)(m+1)$ коефіцієнтів, таку, що

$$R_{[n/2],[m/2]}(x_i,y_j) = f_{ij} = f(x_i,y_j), \quad i = 0,1,\dots,n,\ j = 0,1,\dots,m.$$

Якщо така раціональна функція існує, то вона матиме вигляд

$$R_{[n/2],[m/2]}(x,y) = b_0(y) + b_1(y)(x-x_0) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{[n/2]} \frac{(x-x_{2k-2})(x-x_{2k-1})}{b_{2k}(y)+b_{2k+1}(y)(x-x_{2k})}, \qquad (1)$$

де всі частинні знаменники $b_j(y)$ є многочленами чи раціональними функціями від змінної y і загальна кількість їхніх коефіцієнтів дорівнює $(n+1)(m+1)$.

Розглянемо наступну інтерполяційну задачу. Нехай $\Pi^{n,m}_{x,y} = \Pi^n_x \times \Pi^m_y \subset \Delta$ і функція $f(x,y)$ визначена у вузлах інтерполяції (x_i,y_j), $i=0,1,\ldots,n$, $j = 0,1,\ldots,m$, тобто

$$f(x_i,y_j) = f_{ij}, \quad i=0,1,\ldots,n,\ j=0,1,\ldots,m. \qquad (2)$$

Знайдемо раціональну функцію $R_{[n/2],[m/2]}(x,y) = \dfrac{P_{[n/2],[m/2]}(x,y)}{Q_{[n/2],[m/2]}(x,y)}$ у вигляді (1), де $b_i(y) = p_i(y)/q_i(y)$, $i=0,1,\ldots,2[n/2]+1,$ – раціональні функції, причому

$$\deg p_i(y) \le k < [m/2]+1, \quad \deg q_i(y) \le [m/2]-k, \qquad (3)$$

таку, що

$$R_{[n/2],[m/2]}(x_i,y_j) = f_{ij}, \quad i=0,1,\ldots,n, \quad j=0,1,\ldots,m. \qquad (4)$$

За аналогією із одновимірним випадком умови (4) замінимо умовами

$$f_{ij}Q_{[n/2],[m/2]}(x_i,y_j) - P_{[n/2],[m/2]}(x_i,y_j) = 0,\ i=0,1,\ldots,n,\ j=0,1,\ldots,m. \qquad (5)$$

Доведемо існування та єдиність раціональної функції $R_{[n/2],[m/2]}(x,y)$ вигляду (1), що задовольняє умови (3) і (5).

Якщо k у нерівностях (3) є заданим, то очевидно, що існує єдина раціональна функція $b_0(y) = p_0(y)/q_0(y)$, степені чисельника та знаменника якої задовольняють умови (3), така, що

$$f_{0,j}q_0(y_j) - p_0(y_j) = 0, \quad j=0,1,\ldots,m.$$

Для знаходження раціональної функції $b_1(y) = p_1(y)/q_1(y)$ розглянемо систему $m+1$ однорідних лінійних рівнянь

$$q_1(y_j)[f_{1,j}q_0(y_j) - p_0(y_j)] - p_1(y_j)q_0(y_j)(x_1-x_0) = 0, \quad j=0,1,\ldots,m. \qquad (6)$$

Така система містить $2(m+1)$ невідомих коефіцієнтів і тому є невизначеною. Покладемо

$$P_{0,[m/2]}(x,y) = p_0(y)q_1(y) + p_1(y)q_0(y)(x_1-x_0), \quad Q_{0,[m/2]}(x,y) = q_1(y)q_0(y).$$

Тоді із системи (6) отримуємо

$$f_{ij}Q_{0,[m/2]}(x_i,y_j) - P_{0,[m/2]}(x_i,y_j) = 0, \quad i=0,1,\ j=0,1,\ldots,m.$$

Припустимо, що існують раціональні функції $b_i(y) = p_i(y)/q_i(y)$, $i=0,1,\ldots,$ $2[l/2]-1 < 2[n/2]+1$, такі, що для

$$R_{[l/2]-1,[m/2]}(x,y) = \frac{P_{[l/2]-1,[m/2]}(x,y)}{Q_{[l/2]-1,[m/2]}(x,y)} = b_0(y) + b_1(y)(x-x_0) + \\ + \cfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{b_2(y)+b_3(y)(x-x_2) + \ddots + \cfrac{(x-x_{2[l/2]-4})(x-x_{2[l/2]-3})}{b_{[l/2]-2}(y)+b_{[l/2]-1}(y)(x-x_{2[l/2]-2})}}$$

справджуються співвідношення

$$f_{ij}Q_{[l/2]-1,[m/2]}(x_i,y_j) - P_{[l/2]-1,[m/2]}(x_i,y_j) = 0$$

при $i=0,1,\ldots,2[l/2]-1$, $j=0,1,\ldots,m$. Для визначення раціональних функцій $b_{[l/2]}(y)=p_{[l/2]}(y)/q_{[l/2]}(y)$ і $b_{[l/2]+1}(y)=p_{[l/2]+1}(y)/q_{[l/2]+1}(y)$ відповідно розглянемо такі системи однорідних лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} &q_{[l/2]}(y_j)(x_{2[l/2]}-x_{2[l/2]-2})(x_{2[l/2]}-x_{2[l/2]-1})\times\\ &\times[f(x_{2[l/2]},y_j)Q_{[l/2]-2,[m/2]}(x_{2[l/2]},y_j)-P_{[l/2]-2,[m/2]}(x_{2[l/2]},y_j)]+\\ &+p_{[l/2]}(y_j)[f(x_{2[l/2]},y_j)Q_{[l/2]-1,[m/2]}(x_{2[l/2]},y_j)-P_{[l/2]-1,[m/2]}(x_{2[l/2]},y_j)]=0, \quad (7)\\ &q_{[l/2]+1}(y_j)q_{[l/2]}(y_j)(x_{2[l/2]+1}-x_{2[l/2]-2})(x_{2[l/2]+1}-x_{2[l/2]-1})\times\\ &\times[f(x_{2[l/2]+1},y_j)Q_{[l/2]-2,[m/2]}(x_{2[l/2]+1},y_j)-P_{[l/2]-2,[m/2]}(x_{2[l/2]+1},y_j)]+\\ &+[p_{[l/2]}(y_j)q_{[l/2]+1}(y_j)+p_{[l/2]+1}(y_j)q_{[l/2]}(y_j)(x_{2[l/2]+1}-x_{2[l/2]})]\times\\ &\times[f(x_{2[l/2]+1},y_j)Q_{[l/2]-1,[m/2]}(x_{2[l/2]+1},y_j)-P_{[l/2]-1,[m/2]}(x_{2[l/2]+1},y_j)]=0, \quad (8)\end{aligned}$$

де $j=0,1,\ldots,m$. Системи (7) і (8) мають нетривіальні розв'язки, тому раціональні функції $b_{[l/2]}(y)$ і $b_{[l/2]+1}(y)$ визначається неоднозначно.

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} &P_{[l/2],[m/2]}(x,y)=[p_{[l/2]}(y)q_{[l/2]+1}(y)+p_{[l/2]+1}(y)q_{[l/2]}(y)(x-x_{2[l/2]})]\times\\ &\times P_{[l/2]-1,[m/2]}(x,y)+q_{[l/2]+1}(y)q_{[l/2]}(y)(x-x_{2[l/2]-2})(x-x_{2[l/2]-1})P_{[l/2]-2,[m/2]}(x,y),\\ &Q_{[l/2],[m/2]}(x,y)=[p_{[l/2]}(y)q_{[l/2]+1}(y)+p_{[l/2]+1}(y)q_{[l/2]}(y)(x-x_{2[l/2]})]\times\\ &\times Q_{[l/2]-1,[m/2]}(x,y)+q_{[l/2]+1}(y)q_{[l/2]}(y)(x-x_{2[l/2]-2})(x-x_{2[l/2]-1})Q_{[l/2]-2,[m/2]}(x,y).\end{aligned}$$

При цьому із системи (7) отримуємо

$$f_{ij}Q_{[l/2],[m/2]}(x_i,y_j)-P_{[l/2],[m/2]}(x_i,y_j)=0 \quad (9)$$

для $i=0,1,\ldots,2[l/2]$, $j=0,1,\ldots,m$.

Далі, враховуючи введені вище позначення, із системи (8) отримуємо (9) при $i=0,1,\ldots,2[l/2]+1$, $j=0,1,\ldots,m$. З огляду на загальну теорію неперервних дробів $P_{[l/2],[m/2]}(x,y)$ і $Q_{[l/2],[m/2]}(x,y)$ можемо розглядати як чисельник і знаменник неперервного дробу

$$\frac{P_{[l/2]}(x,y)}{Q_{[l/2]}(x,y)}=b_0(y)+b_1(y)(x-x_0)+ \\ +\cfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{b_2(y)+b_3(y)(x-x_2)+\ddots+\cfrac{(x-x_{2[l/2]-2})(x-x_{2[l/2]-1})}{b_{2[l/2]}(y)+b_{2[l/2]+1}(y)(x-x_{2[l/2]})}}.$$

Отже, всі $b_i(y)$ існують і визначаються однозначно. Таким чином, справджується така теорема.

Теорема 1. *Для кожної прямокутної сітки* $\Pi^{n,m}_{x,y}=\Pi^n_x\times\Pi^m_y\subset\Delta$ *існують однозначно визначені раціональні функції* $b_i(y)=p_i(y)/q_i(y)$, $i=0,1,\ldots,2[n/2]+1$, *такі, що:*

1) $\deg p_i(y)\le k<[m/2]+1$, $\deg q_i(y)\le[m/2]-k$, $i=0,1,\ldots,2[n/2]+1$;

2) раціональна функція вигляду

$$R_{[n/2],[m/2]}(x,y)=\frac{P_{[n/2],[m/2]}(x,y)}{Q_{[n/2],[m/2]}(x,y)}=b_0(y)+b_1(y)(x-x_0)+ \\ +\cfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{b_2(y)+b_3(y)(x-x_2)+\ddots+\cfrac{(x-x_{2[n/2]-2})(x-x_{2[n/2]-1})}{b_{[n/2]}(y)+b_{[n/2]+1}(y)(x-x_{[n/2]})}}$$

задовольняє рівняння

$$f_{ij}Q_{[n/2],[m/2]}(x_i,y_j)-P_{[n/2],[m/2]}(x_i,y_j)=0,\quad i=0,1,\ldots,n,\quad j=0,1,\ldots,m.$$

Введемо частинні обернені різниці та розділені різниці аналогічно до того, як це було зроблено в [4].

Нехай $\Pi^{n,m}_{x,y} \subset \Delta \subset \mathbb{R}^2$ і функція $f(x,y)$ визначена у вузлах інтерполяції (x_i, y_j), $i = 0,1,\ldots,n$, $j = 0,1,\ldots,m$, тобто виконуються співвідношення (2). Введемо такі позначення:

$$\varphi_{0,0}(x_i, y_j) = f_{ij}, \quad i = 0,1,\ldots,n, \quad j = 0,1,\ldots,m, \tag{10}$$

і при $i \geq 0$, $j \geq 0$

$$\varphi_{2i+1,0}(\mathbf{x}_{2i+1}; y_0) = \frac{\varphi_{2i,0}(\mathbf{x}_{2i-1}, x_{2i+1}; y_0) - \varphi_{2i,0}(\mathbf{x}_{2i}; y_0)}{x_{2i+1} - x_{2i}}, \tag{11}$$

$$\varphi_{i,2j+1}(\mathbf{x}_i; \mathbf{y}_{2j+1}) = \frac{\varphi_{i,2j}(\mathbf{x}_i; \mathbf{y}_{2j-1}, y_{2j+1}) - \varphi_{i,2j}(\mathbf{x}_i; \mathbf{y}_{2j})}{y_{2j+1} - y_{2j}}, \tag{12}$$

$$\varphi_{2i+2,0}(\mathbf{x}_{2i+2}; y_0) = \frac{x_{2i+2} - x_{2i+1}}{\varphi_{2i+1,0}(\mathbf{x}_{2i}, x_{2i+2}; y_0) - \varphi_{2i+1,0}(\mathbf{x}_{2i+1}; y_0)}, \tag{13}$$

$$\varphi_{i,2j+2}(\mathbf{x}_i; \mathbf{y}_{2j+2}) = \frac{y_{2j+2} - y_{2j+1}}{\varphi_{i,2j+1}(\mathbf{x}_i; \mathbf{y}_{2j}, y_{2j+2}) - \varphi_{i,2j+1}(\mathbf{x}_i; \mathbf{y}_{2j+1})}, \tag{14}$$

де $\mathbf{x}_r = x_0, x_1, \ldots, x_r$, $\mathbf{y}_s = y_0, y_1, \ldots, y_s$, $r \geq 0$, $s \geq 0$. Формули (11), (12) називають частинними розділеними різницями типу частинних розділених різниць Ньютона, а (13), (14) – частинними оберненими різницями типу частинних обернених різниць Тіле. Зі співідношень (11)–(14) отримуємо

$$\begin{aligned}
&\varphi_{2i,0}(\mathbf{x}_{2i-1}, x; y_0) = \varphi_{2i,0}(\mathbf{x}_{2i}; y_0) + \varphi_{2i+1,0}(\mathbf{x}_{2i}, x; y_0)(x - x_{2i}),\\
&\varphi_{i,2j}(\mathbf{x}_i; \mathbf{y}_{2j-1}, y) = \varphi_{i,2j+1}(\mathbf{x}_i; \mathbf{y}_{2j}, y)(y - y_{2j}) + \varphi_{i,2j}(\mathbf{x}_i; \mathbf{y}_{2j}),\\
&\varphi_{2i+1,0}(\mathbf{x}_{2i}, x; y_0) = \varphi_{2i+1,0}(\mathbf{x}_{2i+1}; y_0) + \frac{x - x_{2i+1}}{\varphi_{2i+2,0}(\mathbf{x}_{2i+1}, x; y_0)},\\
&\varphi_{i,2j+1}(\mathbf{x}_i; \mathbf{y}_{2j}, y) = \varphi_{i,2j+1}(\mathbf{x}_i; \mathbf{y}_{2j+1}) + \frac{y - y_{2j+1}}{\varphi_{i,2j+2}(\mathbf{x}_i; \mathbf{y}_{2j+1}, y)}.
\end{aligned}$$

Використовуючи схему, запропоновану в роботі [5], на основі останніх співвідношень можна побудувати двовимірний неперервний дріб вигляду

$$R_{[n/2],[m/2]}(x,y) = \frac{P_{[n/2],[m/2]}(x,y)}{Q_{[n/2],[m/2]}(x,y)} = K_0(x,y) + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{[n/2]} \frac{(x - x_{2j-2})(x - x_{2j-1})}{K_{2j}(x,y)} =$$

$$= K_0(x,y) + \cfrac{(x - x_0)(x - x_1)}{K_2(x,y) + \cfrac{(x - x_2)(x - x_3)}{K_4(x,y) + \ddots + \cfrac{(x - x_{2[n/2]-2})(x - x_{2[n/2]-1})}{K_{2[n/2]}(x,y)}}}, \tag{15}$$

де

$$\begin{aligned}
&K_{2i}(x,y) = \varphi_{2i,0}(\mathbf{x}_{2i}; y_0) + \varphi_{2i,1}(\mathbf{x}_{2i}; \mathbf{y}_1)(y - y_0) +\\
&+ \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{[m/2]} \frac{(y - y_{2k-2})(y - y_{2k-1})}{\varphi_{2i,2k}(\mathbf{x}_{2i}; \mathbf{y}_{2k}) + \varphi_{2i,2k+1}(\mathbf{x}_{2i}; \mathbf{y}_{2k+1})(y - y_{2k})} +\\
&+ (x - x_{2i}) \Bigg[\varphi_{2i+1,0}\mathbf{x}_{2i+1}; y_0) + \varphi_{2i+1,1}(\mathbf{x}_{2i+1}; \mathbf{y}_1)(y - y_0) +\\
&+ \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{[m/2]} \frac{(y - y_{2k-2})(y - y_{2k-1})}{\varphi_{2i+1,2k}(\mathbf{x}_{2i+1}; \mathbf{y}_{2k}) + \varphi_{2i+1,2k+1}(\mathbf{x}_{2i+1}; \mathbf{y}_{2k+1})(y - y_{2k})} \Bigg].
\end{aligned}$$

Лема. *Нехай всі частинні розділені та частинні обернені різниці* $\varphi_{ij}(\mathbf{x}_i;\mathbf{y}_j)$, $i=0,1,\ldots,n$, $j=0,1,\ldots,m$, *визначені за формулами* (10)–(14). *Тоді формула* (15) *є інтерполяційною, тобто*

$$R_{[n/2],[m/2]}(x_i,y_j)=f(x_i,y_j),\quad (x_i,y_j)\in\Pi_{x,y}^{n,m},\quad i=0,1,\ldots,n,\ j=0,1,\ldots,m.$$

Д о в е д е н н я. Нехай j – непарне, $j=0,1,\ldots,[m/2]$. Тоді при будь-якому i, $i=0,1,\ldots,[n/2]$, маємо

$$\begin{aligned}
&K_{2i}(x,y_j)=\varphi_{2i,0}(\mathbf{x}_{2i};y_0)+\varphi_{2i,1}(\mathbf{x}_{2i};\mathbf{y}_1)(y_j-y_0)+\\
&+\frac{(y_j-y_0)(y_j-y_1)}{\varphi_{2i,2}(\mathbf{x}_{2i};\mathbf{y}_2)+\varphi_{2i,3}(\mathbf{x}_{2i};\mathbf{y}_3)(y_j-y_2)+}\cdots+\\
&+\frac{(y_j-y_{j-3})(y_j-y_{j-2})}{\varphi_{2i,j-1}(\mathbf{x}_{2i};\mathbf{y}_{j-1})+\varphi_{2i,j}(\mathbf{x}_{2i};\mathbf{y}_j)(y_j-y_{j-1})}+\\
&+(x-x_{2i})\Big[\varphi_{2i+1,0}(\mathbf{x}_{2i+1};y_0)+\varphi_{2i+1,1}(\mathbf{x}_{2i+1};\mathbf{y}_1)(y_j-y_0)+\\
&+\frac{(y_j-y_0)(y_j-y_1)}{\varphi_{2i+1,2}(\mathbf{x}_{2i+1};\mathbf{y}_2)+\varphi_{2i+1,3}(\mathbf{x}_{2i+1};\mathbf{y}_3)(y_j-y_2)+}\cdots+\\
&+\frac{(y_j-y_{j-3})(y_j-y_{j-2})}{\varphi_{2i+1,j-1}(\mathbf{x}_{2i+1};\mathbf{y}_{j-1})+\varphi_{2i+1,j}(\mathbf{x}_{2i+1};\mathbf{y}_j)(y_j-y_{j-1})}\Big]=\\
&=\varphi_{2i,j}(\mathbf{x}_{2i};y_j)+(x-x_{2i})\varphi_{2i+1,j}(\mathbf{x}_{2i+1};y_j).
\end{aligned}$$

У випадку, коли j – парне, при будь-якому i, $i=0,1,\ldots,[n/2]$, отримуємо

$$\begin{aligned}
&K_{2i}(x,y_j)=\varphi_{2i,0}(\mathbf{x}_{2i};y_0)+\varphi_{2i,1}(\mathbf{x}_{2i};\mathbf{y}_1)(y_j-y_0)+\\
&+\frac{(y_j-y_0)(y_j-y_1)}{\varphi_{2i,2}(\mathbf{x}_{2i};\mathbf{y}_2)+\varphi_{2i,3}(\mathbf{x}_{2i};\mathbf{y}_3)(y_j-y_2)+}\cdots+\frac{(y_j-y_{j-2})(y_j-y_{j-1})}{\varphi_{2i,j}(\mathbf{x}_{2i};\mathbf{y}_j)}+\\
&+(x-x_{2i})\Big[\varphi_{2i+1,0}(\mathbf{x}_{2i+1};y_0)+\varphi_{2i+1,1}(\mathbf{x}_{2i+1};\mathbf{y}_1)(y_j-y_0)+\\
&+\frac{(y_j-y_0)(y_j-y_1)}{\varphi_{2i+1,2}(\mathbf{x}_{2i+1};\mathbf{y}_2)+\varphi_{2i+1,3}(\mathbf{x}_{2i+1};\mathbf{y}_3)(y_j-y_2)+}\cdots+\frac{(y_j-y_{j-2})(y_j-y_{j-1})}{\varphi_{2i+1,j}(\mathbf{x}_{2i+1};\mathbf{y}_j)}\Big]=\\
&=\varphi_{2i,j}(\mathbf{x}_{2i};y_j)+(x-x_{2i})\varphi_{2i+1,j}(\mathbf{x}_{2i+1};y_j).
\end{aligned}$$

Таким чином, маємо

$$R_{[n/2],[m/2]}(x_i,y_j)=K_0(x_i,y_j)+\cfrac{(x_i-x_0)(x_i-x_1)}{K_2(x_i,y_j)+\ddots+\cfrac{(x_i-x_{i-3})(x_i-x_{i-2})}{K_i(x_i,y_j)}}=f_{ij},$$

якщо i – непарне, і

$$R_{[n/2],[m/2]}(x_i,y_j)=K_0(x_i,y_j)+\cfrac{(x_i-x_0)(x_i-x_1)}{K_2(x_i,y_j)+\ddots+\cfrac{(x_i-x_{i-2})(x_i-x_{i-1})}{K_i(x_i,y_j)}}=f_{ij},$$

якщо i – парне. Лему доведено. $\diamondsuit$

Наступна теорема встановлює вигляд залишкового члена інтерполяційної формули (15).

Теорема 2. *Нехай функція $f(x,y)$ є $n+m+2$ рази диференційовною в області $D=\{a<x<b; c<y<d\}$, яка містить точки інтерполяції (x_i,y_j), $i=0,1,\ldots,n$, $j=0,1,\ldots,m$. Тоді всередині області D для довільної точки $(x,y)\in D$, яка не є полюсом інтерполяційного дробу* (15), *залишковий член інтерполяційної формули* (15) *має вигляд*

$$R_{n+m+2}(x,y)=f(x,y)-R_{[n/2],[m/2]}(x,y)=$$
$$=\frac{1}{Q_{n,m}(x,y)}\left\{\frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1}F(\xi,y)}{\partial x^{n+1}}+\frac{\prod_{i=0}^{m}(y-y_i)}{(m+1)!}\frac{\partial^{m+1}F(x,\eta)}{\partial y^{m+1}}-\right.$$
$$\left.-\frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!}\frac{\prod_{i=0}^{m}(y-y_i)}{(m+1)!}\frac{\partial^{n+m+2}F(\xi,\eta)}{\partial x^{n+1}\partial y^{m+1}}\right\},$$

де $(\xi,\eta)\in D$.

Д о в е д е н н я проводиться за схемою, запропонованою в [3]. $\diamondsuit$

Зауважимо, що незалежно від парності чи непарності n чи m лема та теорема 2 залишаються правильними, а інтерполяційна формула (15) відповідним чином модифікується.

Запропонована інтерполяційна формула типу Ньютона–Тіле дає ще одну можливість інтерполювати функції двох змінних двовимірним неперервним дробом спеціального вигляду.

Отже, маємо ширший вибір інтерполяційних формул і виникає питання, яка з них краща? Тому цікаво порівняти результати інтерполяції різними формулами, а також отримати оцінки швидкості збіжності інтерполяційного процесу.

1. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
2. *Возна С. М., Кучмінська Х. Й., Ель Хатіб А.* Інтерполяція приєднаним неперервним дробом // Матеріали IX-ї Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 16–19 травня 2002 р.) – К.: Нац. техн. ун-т України «КПІ», 2002. – С. 238.
3. *Кучминская Х. И.* О приближении функций цепными и ветвящимися цепными дробями // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 12. – С. 3–10.
4. *Кучмінська Х. Й., Сусь О. М., Возна С. М.* Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журнал. – 2003. – **55**, № 1. – С. 30–44.
5. *Siemaszko W.* Thiele-type branched continued fraction for two-variable functions // J. Comput. and Appl. Math. – 1983. – No. 9. – P. 137–153.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ТИПА НЬЮТОНА–ТИЛЕ В ВИДЕ ДВУМЕРНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ДРОБИ С НЕРАВНОЗНАЧНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Для функции двух переменных на основании частных обратных и разделенных разностей специального вида построена интерполяционная двухмерная непрерывная дробь с неравнозначными переменными. Установлена формула ее остаточного члена.

NEWTON–TILE-TYPE INTERPOLATIONAL FORMULA IN THE FORM OF TWO-DIMENSIONAL CONTINUED FRACTION WITH NON-EQUIVALENT VARIABLES

Interpolational two-dimensional continued fraction with non-equivalent variables has been constructed for the function of two variables by use of partial inverse and divided differences of special type. The remainder of this interpolational fraction is also established.

Нац. ун-т « Львів. політехніка», Львів

Одержано
01.09.03