УДК 517.526

Т. М. Антонова, В. Р. Гладун

ДЕЯКІ ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ ТА СТІЙКОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ ЗІ ЗНАКОЗМІННИМИ ЧАСТИННИМИ ЧИСЕЛЬНИКАМИ

Встановлено достатні умови додатності залишків гіллястих ланцюгових дробів зі знакозмінними частинними чисельниками. Для такого класу гіллястих ланцюгових дробів доведено ознаки збіжності та стійкості.

Однією із важливих задач аналітичної теорії неперервних дробів (НД) і їх багатовимірних узагальнень – гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД), є задача дослідження стійкості до збурень, оскільки не завжди вдається точно визначити значення елементів дробу. Якщо ряди мають властивість накопичувати похибку заокруглення, то, як показують числові експерименти, НД і ГЛД мають властивість стійкості до нагромадження похибок. Дослідження стійкості ГЛД тісно пов'язане з дослідженням їх збіжності, якій присвячено значну кількість робіт. У той самий час відома невелика кількість робіт, де вивчається питання стійкості НД і ГЛД. Зокрема, стійкість НД досліджували У. Джоунс, В. Трон [11], Г. Бланч [10], Н. Мейкон і М. Баскервіл [12], а задача стійкісті ГЛД та інтегральних дробів розглядалась у роботах П. І. Боднарчука [6], В. Я. Скоробогатька [9], М. О. Недашковського [7], Д. І. Боднара [2], Д. І. Боднара, Х. Воделанда, Х. Й. Кучмінської, О. М. Сусь [3], Т. М. Антонової [8]. У роботі [4] розглянуто стійкість ГЛД як їх неперервну залежність від елементів, при цьому запропоновано означення стійкості нескінченних ГЛД і встановлено ознаки стійкості до збурень ГЛД з додатними елементами. Коректне означення стійкості нескінченних ГЛД вимагає їх збіжності. Тому попередньо, перед вивченням питання стійкості, досліджується їх збіжність.

Питання стійкості та збіжності ГЛД зі знакозмінними елементами раніше систематично не вивчалось. У цій роботі розглянуто питання збіжності та стійкості до збурень таких ГЛД у випадку додатних залишків.

Об'єктом дослідження є гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) вигляду

$$\mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1} a_{i(k)}}{1}, \tag{1}$$

де N , $N \in \mathbb{N}$, – кількість розгалужень на поверхах дробу , $i(k)$ – мультиіндекс:

$$i(k) \in I = \{i(k) : i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k ; i_p = 1, 2, \ldots, N, p = 1, 2, \ldots, k; k = 1, 2, \ldots\}.$$

Нехай

$$a_{i(k)} \geq 0, \qquad i(k) \in I. \tag{2}$$

Підхідним дробом s -го порядку ГЛД (1) називають скінченний ГЛД $f^{(s)} = \mathop{\mathbf{D}}\limits_{k=1}^{s} \sum\limits_{i_k=1}^{N} \dfrac{(-1)^{k-1} a_{i(k)}}{1}$. Застосувати відомі достатні умови збіжності ГЛД з дійсними елементами [2, 9] можна лише у випадку, коли $\sum\limits_{i_{2k}=1}^{N} a_{i(2k)} < \dfrac{1}{4}$. Для дослідження збіжності послідовностей підхідних дробів ГЛД (1) використовуємо підходи, запропоновані у роботах [1, 5], які вимагають встановлення множин значень залишків підхідних дробів ГЛД.

Залишками підхідного дробу s-го порядку ГЛД (1) називають вирази, які визначаються рекурентними співвідношеннями

$$Q_{i(p)}^{(p)} = 1, \quad i(p) \in I, \quad p = 1, 2, \dots,$$

$$Q_{i(k)}^{(s)} = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}}{Q_{i(k+1)}^{(s)}}, \quad i(k) \in I, \quad k = s-1, s-2, \dots, 1, \quad s = 2, 3, \dots .$$

Надалі використовуватимемо формулу різниці між двома підхідними дробами ГЛД (1) [2], яку, враховуючи вигляд досліджуваного дробу, запишемо так:

$$f^{(n)} - f^{(m)} = (-1)^{m+\left[\frac{m+1}{2}\right]} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{m+1}=1}^{N} \frac{\prod\limits_{k=1}^{m+1} a_{i(k)}}{Q_{i(m+1)}^{(n)} \prod\limits_{k=1}^{m} Q_{i(k)}^{(m)} Q_{i(k)}^{(n)}}, \qquad n > m, \quad (3)$$

де $[x]$ – ціла частина числа x.

Теорема 1. *Нехай елементи ГЛД* (1) *задовольняють умови* (2) *та*

$$\sum_{i_{2k}=1}^{N} \frac{a_{i(2k)}}{1 + \sum\limits_{i_{2k+1}=1}^{N} a_{i(2k+1)}} < 1, \qquad i(2k-1) \in I, \qquad k = 1, 2, \dots . \quad (4)$$

Тоді для підхідних дробів непарного порядку ГЛД (1) *справджуються нерівності*

$$f^{(4p-3)} \le f^{(4p+1)} \le f^{(4q+3)} \le f^{(4q-1)}, \quad (5)$$

де $p, q = 1, 2, \dots$, *і послідовності* $\left\{f^{(4p+1)}\right\}$, $\left\{f^{(4p+3)}\right\}$ *збігаються.*

Д о в е д е н н я. Покажемо, що при виконанні умов (2), (4) для залишків підхідних дробів непарного порядку ГЛД (1) виконуються такі нерівності:

$$1 - \sum_{i_{2k}=1}^{N} \frac{a_{i(2k)}}{1 + \sum\limits_{i_{2k+1}=1}^{N} a_{i(2k+1)}} \le Q_{i(2k-1)}^{(2s+1)} \le 1, \quad 1 + \sum_{i_{2k+1}=1}^{N} a_{i(2k+1)} \le Q_{i(2k)}^{(2s+1)}, \quad (6)$$

$i(2k-1) \in I$, $i(2k) \in I$, $k = 1, 2, \dots, s$. Застосуємо метод математичної індукції відносно k, $k = s, s-1, \dots, 1$. Правильність оцінок (6) при $k = s$ є очевидною:

$$Q_{i(2s)}^{(2s+1)} = 1 + \sum_{i_{2s+1}=1}^{N} a_{i(2s+1)}, \quad 0 < Q_{i(2s-1)}^{(2s+1)} = 1 - \sum_{i_{2s}=1}^{N} \frac{a_{i(2s)}}{1 + \sum\limits_{i_{2s+1}=1}^{N_{i(2s)}} a_{i(2s+1)}} \le 1.$$

Припустимо, що оцінки (6) справджуються для деякого $k = p+1$, $1 \le p \le s-1$. Тоді

$$Q_{i(2p)}^{(2s+1)} = 1 + \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{a_{i(2p+1)}}{Q_{i(2p+1)}^{(2s+1)}} \ge 1 + \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} a_{i(2p+1)},$$

$$1 \ge Q_{i(2p-1)}^{(2s+1)} = 1 - \sum_{i_{2p}=1}^{N} \frac{a_{i(2p)}}{Q_{i(2p)}^{(2s+1)}} \ge 1 - \sum_{i_{2p}=1}^{N} \frac{a_{i(2p)}}{1 + \sum\limits_{i_{2p+1}=1}^{N} a_{i(2p+1)}} > 0,$$

що доводить правильність оцінок для довільного $k = p$, $1 \le p \le s-1$.

Із формули (3) та оцінок (6) випливає, що $f^{(4(p+n)+1)} - f^{(4p+1)} \geq 0$, $f^{(4(p+n)+3)} - f^{(4p+3)} \leq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, тому

$$f^{(1)} \leq f^{(5)} \leq \ldots \leq f^{(4p-3)} \leq f^{(4p+1)} \leq \ldots \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1 - \sum\limits_{i_2=1}^{N} \frac{a_{i(2)}}{1 + \sum\limits_{i_3=1}^{N} a_{i(3)}}},$$

$$f^{(3)} \geq f^{(7)} \geq \ldots \geq f^{(4p-1)} \geq f^{(4p+3)} \geq \ldots \geq \sum_{i_1=1}^{N} a_{i(1)},$$

що доводить збіжність послідовностей $\left\{f^{(4p+1)}\right\}$, $\left\{f^{(4p+3)}\right\}$. З того, що $f^{(4q+3)} - f^{(4p+1)} \geq 0$, $p, q = 0, 1, 2, \ldots$, випливає властивість «вилки» (5) для послідовності підхідних дробів непарного порядку ГЛД (1). Теорему доведено. $\diamondsuit$

Теорема 2. *Нехай елементи ГЛД* (1) *задовольняють умови* (2) *та*

$$\sum_{i_{2k}=1}^{N} a_{i(2k)} < 1, \quad i\,(2k-1) \in I, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Тоді для підхідних дробів ГЛД (1) *справджуються нерівності*

$$f^{(4p)} \leq f^{(4p+1)} \leq f^{(4p+4)} \leq f^{(4p+5)} \leq f^{(4q+7)} \leq f^{(4q+6)} \leq f^{(4q+3)} \leq f^{(4q+2)}, \tag{8}$$

де $p, q = 0, 1, 2, \ldots$, *і послідовності* $\left\{f^{(l)}\right\}$, $l = 0, 1, 4, 5, \ldots, 4p, 4p+1, \ldots$, $\left\{f^{(m)}\right\}$, $m = 2, 3, 6, 7, \ldots, 4q+2, 4q+3, \ldots$, *збігаються.*

Д о в е д е н н я. Умова (7) забезпечує виконання умови (4). Тому для залишків підхідних дробів непарного порядку ГЛД (1) виконуються нерівності (6). Використовуючи метод математичної індукції, покажемо, що

$$\begin{gathered} 1 + \sum_{i_{2k+1}=1}^{N} a_{i(2k+1)} \leqslant Q_{i(2k)}^{(2s)} \leqslant 1 + \sum_{i_{2k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(2k+1)}}{1 - \sum\limits_{i_{2k+2}=1}^{N} a_{i(2k+2)}}, \\ 0 < 1 - \sum_{i_{2k+2}=1}^{N} a_{i(2k+2)} \leqslant Q_{i(2k+1)}^{(2s)} \leqslant 1, \end{gathered} \tag{9}$$

$i\,(2k) \in I$, $i\,(2k+1) \in I$, $k = 0, 1, \ldots, s-1$. При $k = s-1$ маємо

$$0 < Q_{i(2s-1)}^{(2s)} = 1 - \sum_{i_{2s}=1}^{N} a_{i(2s)} \leq 1,$$

$$1 + \sum_{i_{2s-1}=1}^{N} a_{i(2s-1)} \leq Q_{i(2s-2)}^{(2s)} = 1 + \sum_{i_{2s-1}=1}^{N} \frac{a_{i(2s-1)}}{1 - \sum\limits_{i_{2s}=1}^{N} a_{i(2s)}}.$$

Припустимо, що оцінки (9) справджуються для деякого $k = p+1$, $0 \leq p \leq s-2$, і, враховуючи умови (2), (7), покажемо їх правильність при $k = p$:

$$Q_{i(2p+1)}^{(2s)} = 1 - \sum_{i_{2p+2}=1}^{N} \frac{a_{i(2p+2)}}{Q_{i(2p+2)}^{(2s)}} \geq 1 - \sum_{i_{2p+2}=1}^{N} \frac{a_{i(2p+2)}}{1 + \sum\limits_{i_{2p+3}=1}^{N} a_{i(2p+3)}} \geq 1-$$

$$- \sum_{i_{2p+2}=1}^{N} a_{i(2p+2)} > 0, Q_{i(2p)}^{(2s)} = 1 + \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{a_{i(2p+1)}}{Q_{i(2p+1)}^{(2s)}} \leq 1 + \sum_{i_{2k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(2k+1)}}{1 - \sum\limits_{i_{2k+2}=1}^{N} a_{i(2k+2)}},$$

$Q_{i(2p)}^{(2s)} \geq 1 + \sum\limits_{i_{2k+1}=1}^{N} a_{i(2k+1)} \geq 1$. Використовуючи формулу (3) та отримані оцінки для залишків підхідних дробів ГЛД (1), маємо

$$f^{(s)} - f^{(4p)} \geq 0, \quad f^{(s)} - f^{(4p+1)} \geq 0, \quad f^{(s)} - f^{(4p+2)} \leq 0, \quad f^{(s)} - f^{(4p+3)} \leq 0,$$

$s > 4p + l$, $l = 0, 1, 2, 3$, що доводить властивість «подвійної вилки»(8). Зі збіжності послідовностей $\left\{f^{(4p+1)}\right\}$, $\left\{f^{(4p+3)}\right\}$ та властивості «вилки» (5) випливає збіжність послідовностей $\left\{f^{(l)}\right\}$, $l = 0, 1, 4, 5, \ldots, 4p, 4p + 1, \ldots$, $\left\{f^{(m)}\right\}$, $m = 2, 3, 6, 7, \ldots, 4q + 2, 4q + 3, \ldots$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Теорема 3. *Нехай елементи ГЛД* (1) *задовольняють умови* (2) *та*

$$\sum_{i_{2k}=1}^{N} a_{i(2k)} \leq 1 - g_{i(2k-1)}, \qquad \sum_{i_{2k+1}=1}^{N} a_{i(2k+1)} \geq g_{i(2k)} - 1, \tag{10}$$

$$0 < g_{i(2k-1)} \leq 1, \ \ g_{i(2k)} \geq 1, \ \ i\,(2k-1) \in I, \ \ i\,(2k) \in I, \ \ k = 1, 2, \ldots,$$

і

$$\prod_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0,$$

де

$$\xi_{2k-1} = 1 - \min_{i(2k-1)\in I} \left\{g_{i(2k-1)}\right\}, \quad \xi_{2k} = \frac{1}{\min\limits_{i(2k)\in I} \left\{g_{i(2k)}\right\}}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Тоді ГЛД (1) *збігається і*

$$0 \leq f^{(s)} - f^{(4p+1)} \leq \sum_{i_1=1}^{N} a_{i(1)} \left(1 - \xi_1\right)^{-1} \prod_{k=1}^{4p+1} \xi_k, \quad s > 4p + 1.$$

Д о в е д е н н я. Повторюючи викладки, наведені при доведенні теорем 1, 2, легко показати, що при виконанні умов (2), (10) для залишків s-го підхідного дробу ГЛД (1) справджуються такі оцінки:

$$Q_{i(k)}^{(s)} \geq g_{i(k)}, \quad i\,(k) \in I, \quad k = 1, 2, \ldots, s - 1.$$

Розглянемо різницю між підхідними дробами $f^{(s)}$ та $f^{(4p+1)}$, $s > 4p + 1$:

$$f^{(s)} - f^{(4p+1)} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{4p+2}=1}^{N} \frac{\prod\limits_{k=1}^{4p+2} a_{i(k)}}{Q_{i(4p+2)}^{(s)} \prod\limits_{k=1}^{4p+1} Q_{i(k)}^{(s)} Q_{i(k)}^{(4p+1)}} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{4p+2}=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(s)}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{p} \frac{\prod\limits_{l=1}^{2} a_{i(4k-3+l)}}{Q_{i(4k-2)}^{(s)} \prod\limits_{l=1}^{3} Q_{i(4(k-1)+l)}^{(4p+1)}} \frac{\prod\limits_{l=0}^{1} a_{i(4k+l)}}{Q_{i(4k)}^{(4p+1)} \prod\limits_{l=0}^{2} Q_{i(4k-1+l)}^{(s)}} \frac{a_{i(4p+2)}}{Q_{i(4p+1)}^{(4p+1)} Q_{i(4p+2)}^{(s)}}.$$

Встановимо оцінки для величин $\sum\limits_{i_{2k}=1}^{N} \sum\limits_{i_{2k+1}=1}^{N} \dfrac{a_{i(2k)} a_{i(2k+1)}}{Q_{i(2k-1)}^{(m)} Q_{i(2k)}^{(m)} Q_{i(2k+1)}^{(m)}}$, $i\,(2k-1) \in I$, $k = 1, 2, \ldots, 2p$, $m \in \{s, 4p + 1\}$:

$$\sum_{i_{2k}=1}^{N}\sum_{i_{2k+1}=1}^{N}\frac{a_{i(2k)}a_{i(2k+1)}}{Q_{i(2k-1)}^{(m)}Q_{i(2k)}^{(m)}Q_{i(2k+1)}^{(m)}}=$$

$$=\sum_{i_{2k}=1}^{N}\sum_{i_{2k+1}=1}^{N}\frac{a_{i(2k)}\left(Q_{i(2k)}^{(m)}-\left(1-g_{(2k-1)}\right)\right)a_{i(2k+1)}}{Q_{i(2k-1)}^{(m)}Q_{i(2k)}^{(m)}\left(Q_{i(2k)}^{(m)}-\left(1-g_{(2k-1)}\right)\right)Q_{i(2k+1)}^{(m)}}=$$

$$=\sum_{i_{2k}=1}^{N}\frac{\frac{a_{i(2k)}}{Q_{i(2k)}^{(m)}}\left(Q_{i(2k)}^{(m)}-\left(1-g_{(2k-1)}\right)\right)}{1-\sum\limits_{i_{2k}=1}^{N}\frac{a_{i(2k)}}{Q_{i(2k)}^{(m)}}}\sum_{i_{2k+1}=1}^{N}\frac{\frac{a_{i(2k+1)}}{Q_{i(2k+1)}^{(m)}}}{g_{(2k-1)}+\sum\limits_{i_{2k+1}=1}^{N}\frac{a_{i(2k+1)}}{Q_{i(2k+1)}^{(m)}}}\leq$$

$$\leq\sum_{i_{2k}=1}^{N}\frac{\frac{a_{i(2k)}}{Q_{i(2k)}^{(m)}}\left(Q_{i(2k)}^{(m)}-\left(1-g_{(2k-1)}\right)\right)\frac{1}{1-g_{(2k-1)}}\left(1-g_{(2k-1)}\right)}{1-\sum\limits_{i_{2k}=1}^{N}\frac{a_{i(2k)}}{1-g_{(2k-1)}}+\sum\limits_{i_{2k}=1}^{N}\frac{a_{i(2k)}}{Q_{i(2k)}^{(m)}\left(1-g_{(2k-1)}\right)}\left(Q_{i(2k)}^{(m)}-\left(1-g_{(2k-1)}\right)\right)}\leq$$

$$\leq 1-g_{(2k-1)}\leq\xi_{2k-1}\ .$$

Враховуючи отримані оцінки, а також те, що

$$\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(s)}}\leq\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{g_{i(1)}}\leq\left(1-\xi_1\right)^{-1}\sum_{i_1=1}^{N}a_{i(1)},$$

$$\sum_{i_{4p+2}=1}^{N}\frac{a_{i(4p+2)}}{Q_{i(4p+1)}^{(4p+1)}Q_{i(4p+2)}^{(s)}}\leq\sum_{i_{4p+2}=1}^{N}a_{i(4p+2)}\leq 1-g_{i(4p+1)}\leq\xi_{4p+1},i\left(4p+1\right)\in I,$$

$$Q_{i(2k)}^{(m)}\geq g_{i(2k)}\geq\frac{1}{\xi_{2k}},\quad i\left(2k\right)\in I,\quad k=1,2,\ldots,2p,$$

маємо

$$0\leq f^{(s)}-f^{(4p+1)}\leq\sum_{i_1=1}^{N}a_{i(1)}\left(1-\xi_1\right)^{-1}\prod_{k=1}^{4p+1}\xi_k,\quad s>4p+1,$$

що доводить теорему. $\diamondsuit$

Поклавши у (10) $g_{i(2k-1)}=\dfrac{\mu_k}{1+\mu_k}$, $g_{i(2k)}=1+\nu_k$, отримаємо

Наслідок 1. *Нехай елементи ГЛД* (1) *задовольняють умови* (2),

$$\sum_{i_{2k}=1}^{N}a_{i(2k)}\leq\frac{1}{1+\mu_k},\quad\mu_k>0,\quad i\left(2k-1\right)\in I,\quad k=1,2,\ldots,$$

$$\sum_{i_{2k+1}=1}^{N}a_{i(2k+1)}\geq\nu_k,\quad\nu_k\geq 0,\quad i\left(2k\right)\in I,\quad k=1,2,\ldots,$$

і хоча б один із рядів $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\nu_k$ *розбігається. Тоді ГЛД* (1) *збігається, і*

$$0\leq f^{(s)}-f^{(4p+1)}\leq\sum_{i_1=1}^{N}a_{i(1)}\frac{1+\mu_1}{\mu_1}\prod_{k=1}^{2p}\frac{1}{1+\nu_k}\prod_{k=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\mu_k},\quad s>4p+1.$$

Теорема 4. *Нехай елементи ГЛД* (1) *задовольняють умови* (2) *та*

$$\sum_{i_{2k}=1}^{N} a_{i(2k)} \le 1 - g_{i(2k-1)}, \qquad \sum_{i_{2k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(2k+1)}}{g_{i(2k+1)}} \le g_{i(2k)} - 1, \tag{11}$$

$$0 < g_{i(2k-1)} \le 1, \ \ g_{i(2k)} \ge 1, \ \ i\,(2k-1) \in I, \ \ i\,(2k) \in I, \ \ k = 1, 2, \ldots,$$

і

$$\prod_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0, \tag{12}$$

де

$$\xi_{2k} = 1 - \frac{1}{\max\limits_{i(2k)\in I} \left\{ g_{i(2k)} \right\}}, \quad \xi_{2k-1} = \frac{1}{\min\limits_{i(2k-1)\in I} \left\{ g_{i(2k-1)} \right\}} - 1, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Тоді ГЛД (1) *збігається і*

$$0 \le f^{(s)} - f^{(4p+1)} \le \sum_{i_1=1}^{N} a_{i(1)} \left(1 + \xi_1\right) \prod_{k=1}^{4p+1} \xi_k, \quad s > 4p + 1.$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи метод математичної індукції відносно k, покажемо, що при виконанні умов (2), (11) для залишків s-го підхідного дробу ГЛД (1) справджуються оцінки

$$1 \le Q_{i(2k)}^{(s)} \le g_{i(2k)}, \quad g_{i(2k+1)} \le Q_{i(2k-1)}^{(s)} \le 1, \tag{14}$$

$i\,(2k) \in I$, $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{s}{2}\right]$, s = 2,3, … . При $k = \left[\frac{s}{2}\right]$, $s = 2n$, $n = 1, 2, \ldots$, маємо

$$Q_{i(2n)}^{(2n)} = 1 \le g_{i(2n)}, \quad 1 \ge Q_{i(2n-1)}^{(2n)} = 1 - \sum_{i_{2n}=1}^{N} a_{i(2n)} \ge g_{i(2n-1)} > 0.$$

При $k = \left[\frac{s}{2}\right]$, $s = 2n+1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, одержимо

$$1 \le Q_{i(2n)}^{(2n+1)} = 1 + \sum_{i_{2n+1}=1}^{N} a_{i(2n+1)} \le 1 + \sum_{i_{2n+1}=1}^{N} \frac{a_{i(2n+1)}}{g_{i(2n+1)}} \le g_{i(2n)},$$

$$1 \ge Q_{i(2n-1)}^{(2n+1)} = 1 - \sum_{i_{2n}=1}^{N} \frac{a_{i(2n)}}{Q_{i(2n)}^{(2n+1)}} \ge 1 - \sum_{i_{2n}=1}^{N} a_{i(2n)} \ge g_{i(2n-1)} > 0.$$

Припустимо, що оцінки (14) справджуються для деякого $k = p + 1$, $1 \le p \le$ $\le \left[\frac{s}{2}\right] - 1$, і, враховуючи умови (2), (11), покажемо їх правильність при $k = p$:

$$1 \le Q_{i(2p)}^{(s)} = 1 + \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{a_{i(2p+1)}}{Q_{i(2p+1)}^{(s)}} \le 1 + \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{a_{i(2p+1)}}{g_{i(2p+1)}} \le g_{i(2p)},$$

$$1 \ge Q_{i(2p-1)}^{(s)} = 1 - \sum_{i_{2p}=1}^{N} \frac{a_{i(2p)}}{Q_{i(2p)}^{(s)}} \ge 1 - \sum_{i_{2p}=1}^{N} a_{i(2p)} \ge g_{i(2p-1)} > 0.$$

Враховуючи оцінки (14), встановимо оцінки для величин
$\sum\limits_{i_k=1}^{N}\dfrac{a_{i(k)}}{Q^{(s)}_{i(k-1)}Q^{(s)}_{i(k)}}$, $i(k-1)\in I$, $k=2,3,\ldots,s$:
при $k=2p$ –

$$\sum_{i_{2p}=1}^{N}\frac{a_{i(2p)}}{Q^{(s)}_{i(2p-1)}Q^{(s)}_{i(2p)}}=\frac{1}{Q^{(s)}_{i(2p-1)}}\sum_{i_{2p}=1}^{N}\frac{a_{i(2p)}}{Q^{(s)}_{i(2p)}}=\frac{1-Q^{(s)}_{i(2p-1)}}{Q^{(s)}_{i(2p-1)}}\le\frac{1-g_{i(2p-1)}}{g_{i(2p-1)}}\le\xi_{2p-1};$$

при $k=2p+1$ –

$$\sum_{i_{2p+1}=1}^{N}\frac{a_{i(2p+1)}}{Q^{(s)}_{i(2p)}Q^{(s)}_{i(2p+1)}}=\frac{1}{Q^{(s)}_{i(2p)}}\sum_{i_{2p+1}=1}^{N}\frac{a_{i(2p+1)}}{Q^{(s)}_{i(2p+1)}}=\frac{Q^{(s)}_{i(2p)}-1}{Q^{(s)}_{i(2p)}}\le\frac{g_{i(2p)}-1}{g_{i(2p)}}\le\xi_{2p}.$$

Використовуючи формулу (3), одержимо:
$0\le f^{(s)}-f^{(4p+1)}=$

$$=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{4p+2}=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{Q^{(4p+1)}_{i(1)}}\prod_{k=1}^{2p+1}\frac{a_{i(2k)}}{Q^{(s)}_{i(2k-1)}Q^{(s)}_{i(2k)}}\prod_{k=1}^{2p}\frac{a_{i(2k+1)}}{Q^{(4p+1)}_{i(2k)}Q^{(4p+1)}_{i(2k+1)}}\le\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{g_{i(1)}}\prod_{k=1}^{4p+1}\xi_k.$$

і доходимо висновку про збіжність ГЛД (1) при виконанні умови (12). $\diamondsuit$

Розглянемо ГЛД

$$\mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}\ \widehat{a}_{\,i(k)}}{1},\tag{15}$$

елементи якого $\widehat{a}_{\,i(k)}$, $\widehat{a}_{\,i(k)}=a_{i(k)}+\Delta a_{i(k)}$, $i(k)\in I$, $k=1,2,\ldots$, є збуреними до елементів ГЛД (1), де $\Delta a_{i(k)}$, $i(k)\in I$, $k=1,2,\ldots$, – абсолютні похибки величин $a_{i(k)}$.

Використовуючи методику, яка була застосована при встановленні формул для абсолютної похибки інтегрального ланцюгового дробу [8], та враховуючи знакозмінність частинних чисельників ГЛД (1), (15), отримаємо формулу для абсолютної похибки s-го підхідного дробу ГЛД (1), $s=2,3,\ldots$:

$\Delta f^{(s)}=\widehat{f^{(s)}}-f^{(s)}=$

$$=\sum_{i_1=1}^{N}\frac{\Delta a_{i(1)}}{\widehat{Q}^{(s)}_{i(1)}}+\sum_{l=2}^{s}(-1)^{\left[\frac{l}{2}\right]}\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{Q^{(s)}_{i(1)}}\sum_{i_2=1}^{N}q^{(s)}_{i(2)}\cdots\sum_{i_{l-1}=1}^{N}q^{(s)}_{i(l-1)}\sum_{i_l=1}^{N}r^{(s)}_{i(l)}\Delta a_{i(l)},\tag{16}$$

$$\text{де } q^{(s)}_{i(k)}=\begin{cases}\dfrac{a_{i(k)}}{Q^{(s)}_{i(k-1)}Q^{(s)}_{i(k)}}, & k\ -\ \text{непарне},\\[2mm] \dfrac{\widehat{a}_{i(k)}}{\widehat{Q}^{(s)}_{i(k-1)}\widehat{Q}^{(s)}_{i(k)}}, & k-\ \text{парне},\end{cases}\qquad r^{(s)}_{i(l)}=\begin{cases}\dfrac{1}{Q^{(s)}_{i(l-1)}\widehat{Q}^{(s)}_{i(l)}}, & l\ -\ \text{непарне},\\[2mm] \dfrac{1}{\widehat{Q}^{(s)}_{i(l-1)}Q^{(s)}_{i(l)}}, & l\ -\text{парне}.\end{cases}$$

Розглянемо такі множини $E_{i(k)}$, $E_{i(k)}\subset\mathbb{R}^N$, $i(k)\in I$, $k=0,1,2,\ldots$:

$$E_{i(2k)}=\Big\{\big(x_{i(2k)1},\ x_{i(2k)2},\ldots,x_{i(2k)N}\big):x_{i(2k)j}\ge0,j=1,2,\ldots,N,$$
$$\left.\sum_{i_{2k+1}=1}^{N}\frac{x_{i(2k+1)}}{g_{i(2k+1)}}\le g_{i(2k)}-1\right\},\tag{17}$$

$$E_{i(2k-1)}=\Big\{\big(x_{i(2k-1)1},\ x_{i(2k-1)2},\ldots,x_{i(2k-1)N}\big):x_{i(2k-1)j}\ge0,j=1,2,\ldots,N\ ,$$

$$\left.\sum_{i_{2k}=1}^{N} x_{i(2k)} \le 1 - g_{i(2k-1)}\right\}, \tag{18}$$

де $g_{i(2k)} > 1$, $0 < g_{i(2k-1)} < 1$, $k = 1, 2, \dots$, $E_0 = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) : x_j \ge 0,$ $j = 1, 2, \dots, N\}$, які є послідовністю багатовимірних множин елементів ГЛД (1) та збуреного до нього ГЛД (15), тобто для всіх наборів мультиіндексів $\mathbf{a}_{i(k)} =$ $= \left(a_{i(k)1}, a_{i(k)2}, \dots, a_{i(k)N}\right) \in E_{i(k)}$, $\widehat{\mathbf{a}}_{i(k)} = \left(\widehat{a}_{i(k)1}, \widehat{a}_{i(k)2}, \dots, \widehat{a}_{i(k)N}\right) \in$ $\in E_{i(k)}$. У наступній теоремі встановлено достатні умови, за яких багатовимірні множини елементів, що визначаються з (17), (18), є множинами абсолютної стійкості [2, 3] ГЛД (1).

Теорема 5. *Нехай модулі абсолютних похибок елементів ГЛД* (1) *є рівномірно обмеженими зверху:* $\left|\Delta a_{i(k)}\right| \le \Delta, \quad i(k) \in I, \quad k = 1, 2, \dots$.

Тоді сукупність множин $\left\{E_{i(k)}\right\}$*, які визначаються з* (17), (18) *є послідовністю множин абсолютної стійкості послідовності підхідних дробів* $\left\{f^{(s)}\right\}$ *ГЛД* (1)*, якщо збігається ряд*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(1 + \xi_{2\left[\frac{l}{2}\right]+1}\right) \prod_{k=1}^{l-1} \xi_k, \tag{19}$$

де ξ_k, $k = 1, 2, \dots$, *визначаються за формулами* (13)*. Для модуля абсолютної похибки* s*-ої апроксиманти ГЛД* (1) *справджується оцінка*

$$\left|\Delta f^{(s)}\right| \le \Delta N \left(1 + \xi_1\right) \left(1 + \sum_{i_1=1}^{N} a_{i(1)} \sum_{l=1}^{s-1} \left(1 + \xi_{2\left[\frac{l}{2}\right]+1}\right) \prod_{k=1}^{l-1} \xi_k\right). \tag{20}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $\mathbf{a}_{i(k)}$, $\widehat{\mathbf{a}}_{i(k)} \in E_{i(k)}$, де $E_{i(k)}$ визначаються з (17), (18), то елементи ГЛД (1) і збуреного до нього ГЛД (15) задовольняють умови теореми 4, тому правильними є такі оцінки: $\sum\limits_{i_k=1}^{N} q_{i(k)}^{(s)} \le \xi_{k-1}$, $i(k-1) \in I$, $k = 2, 3, \dots, s$, де ξ_k визначаються за формулами (13). Встановимо оцінки для величин $\sum\limits_{i_l=1}^{N} r_{i(l)}^{(s)}$, $i(l-1) \in I, l = 2, 3, \dots, s$. При $l = 2p$, $2 \le 2p \le s$, маємо $\sum\limits_{i_{2p}=1}^{N} \dfrac{1}{\widehat{Q}_{i(2p-1)}^{(s)} Q_{i(2p)}^{(s)}} \le \dfrac{N}{\widehat{Q}_{i(2p-1)}^{(s)}} \le \dfrac{N}{g_{i(2p-1)}} \le N\left(1 + \xi_{2p-1}\right)$. При $l = 2p+1$, $2 \le$ $\le 2p+1 \le s$, маємо $\sum\limits_{i_{2p+1}=1}^{N} \dfrac{1}{Q_{i(2p)}^{(s)} \widehat{Q}_{i(2p+1)}^{(s)}} \le \sum\limits_{i_{2p+1}=1}^{N} \dfrac{1}{\widehat{Q}_{i(2p+1)}^{(s)}} \le \dfrac{N}{g_{i(2p+1)}} \le$ $\le N\left(1 + \xi_{2p+1}\right)$. Враховуючи те, що $\sum\limits_{i_1=1}^{N} \dfrac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(s)}} \le \sum\limits_{i_1=1}^{N} \dfrac{a_{i(1)}}{g_{i(1)}} \le \left(1 + \xi_1\right) \sum\limits_{i_1=1}^{N} a_{i(1)}$, одержимо

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(s)}} \sum_{i_2=1}^{N} q_{i(2)}^{(s)} \cdots \sum_{i_{l-1}=1}^{N} q_{i(l-1)}^{(s)} \sum_{i_l=1}^{N} r_{i(l)}^{(s)} \le$$

$$\le N\left(1 + \xi_1\right) \sum_{i_1=1}^{N} a_{i(1)} \left(1 + \xi_{2\left[\frac{l}{2}\right]+1}\right) \prod_{k=1}^{l-1} \xi_k,$$

звідки випливає оцінка (20) для модуля абсолютної похибки $\Delta f^{(s)}$, $s = 2, 3, \dots$. Крім того, $\Delta f^{(1)} = \sum\limits_{i_1=1}^{N} \Delta a_{i(1)} \le N\Delta$. Збіжність ряду (19) забезпечує виконання умови (12). Тому сукупність множин $\{E_{i(k)}\}$ є послідовністю множин збіжності ГЛД (1), (15). Враховуючи обмеженість величин $\left|\Delta f^{(s)}\right|$, доходимо висновку про абсолютну стійкість ГЛД (1). Теорему доведено. $\diamondsuit$

З використанням аналогічних підходів можна встановити умови, за яких багатовимірні множини елементів, що визначаються з (17), (18), є множинами відносної стійкості [2, 4, 5] ГЛД (1).

Надалі доцільно розглянути умови збіжності та стійкості ГЛД (1) у випадку, коли не всі залишки є додатними.

1. *Антонова Т. М.* Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – 45, № 1. – С. 11–15.
2. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
3. *Боднар Д. І., Воделанд Х., Кучмінська Х. Й., Сусь О. М.* Про стійкість гіллястих ланцюгових дробів // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1994. – Вып. 37. – С. 3–7.
4. *Боднар Д. І., Гладун В. Р.* Достатні умови стійкості гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – 45, № 1. – С. 22–27.
5. *Гладун В. Р.* Ознаки збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів із від'ємними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, № 4. – С. 16–26.
6. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – Київ: Наук. думка, 1974. – 272 с.
7. *Недашковский Н. А.* О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. 20. – С. 27–31.
8. *Одноволова Т. Н. (Антонова Т. Н.)* Некоторые оценки погрешности вычисления интегральных цепных дробей // Докл. АН УССР. – 1984. – № 7. – С. 19–22.
9. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и её применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
10. *Blanch G.* Numerical evaluation of continued fractions // SIAM Rev. – 1964. – **7**. – P. 383–421.
11. *Jones W. B., Thron W. J.* Numerical stability in evaluating continued fractions // Math. Comp. – 1974. – **28**. – P. 795–810.
12. *Macon N., Baskervill M.* On the generation of errors in the digital evaluation of continued fractions // J. Assoc. Comput. Mach. – 1956. – **3**. – P. 199–202.

НЕКОТОРЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМИ ЧАСТНЫМИ ЧИСЛИТЕЛЯМИ

Установлены достаточные условия положительности остатков ветвящихся цепных дробей со знакопеременными частными числителями. Для такого класса ветвящихся цепных дробей доказаны признаки сходимости и устойчивости.

SOME SUFFICIENT CONDITIONS FOR CONVERGENCE AND STABILITY OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS WITH ALTERNATING PARTIAL NUMERATORS

Sufficient conditions for positiveness for tails of branched continued fractions with alternating partial numerators are established. Criteria of convergence and stability for such class of branched continued fractions are proved.

Ін-т прикл. математики та фундам. наук
нац. ун-ту «Львів. політехніка», Львів

Одержано
03.10.03