УДК 512.933

І. І. Кирчей

ЗОБРАЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ МУРА–ПЕНРОУЗА ЧЕРЕЗ АНАЛОГ КЛАСИЧНОЇ ПРИЄДНАНОЇ МАТРИЦІ

Узагальнена обернена Мура–Пенроуза для довільної матриці, повного чи неповного рангу, аналітично зображується через матрицю, що узагальнює класичну приєднану.

1. У роботі [7], яка появилася у 1920 році, Е. Г. Мур увів поняття та дослідив основні властивості узагальненої оберненої матриці, а також оправдав доцільність її існування, застосувавши до системи лінійних рівнянь. У 1955 р. вона була перевідкрита Р. Пенроузом [8] і з того часу називається узагальненою оберненою матрицею Мура–Пенроуза. Протягом багатьох років проблема аналітичного зображення узагальненої оберненої матриці залишається актуальною (див., наприклад, [2–6, 9, 10]). У переважній більшості робіт для її визначникового зображення використовують формулу, введену Муром, або її модифікації. А саме: нехай $\operatorname{rank}\mathbf{A}_{m\times n} = r$, де $\mathbf{A}_{m\times n}$ – матриця над комплексним полем $\mathbb{C}$, тоді її узагальнена обернена $\mathbf{A}^+ = \mathbf{G}(\mathbf{A})$ за Муром – це матриця з елементами

$$G(\mathbf{A})_{ij} = \frac{\sum\limits_{\substack{\alpha\in Q_{r,m}\\ j\in\alpha}} \sum\limits_{\substack{\beta\in Q_{r,n}\\ i\in\beta}} (-1)^{j(\alpha)+i(\beta)}\,\overline{\det\mathbf{A}_{\alpha\beta}}\cdot \mathbf{A}_{ji}}{\sum\limits_{\alpha\in Q_{r,m}} \sum\limits_{\beta\in Q_{r,n}} \det\mathbf{A}_{\alpha\beta}\overline{\det\mathbf{A}_{\alpha\beta}}},$$

де позначено $Q_{r,m} = \{\alpha = (\alpha(1),\ldots,\alpha(r))\,|1 \le \alpha(1) < \ldots < \alpha(r) \le m\}$, $Q_{r,n} = \{\beta = (\beta(1),\ldots,\beta(r))\,|1 \le \beta(1) < \ldots < \beta(r) \le n\}$, $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$ – підматриця матриці $\mathbf{A}$ з рядками $\alpha(1),\ldots,\alpha(r)$ і стовпцями $\beta(1),\ldots,\beta(r)$ та $\mathbf{A}_{ji}$ – алгебричне доповнення до a_{ji} в $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$.

У цій роботі узагальнена обернена матриця Мура–Пенроуза аналітично зображається через матриці, які узагальнюють класичну приєднану на випадки, коли вихідна матриця є довільного порядку, повного чи неповного рангу. Також подаються визначникові зображення проективних матриць.

2. Наведемо в наступних означенні, теоремі та лемах кілька відомих потрібних надалі фактів з лінійної алгебри над комплексним полем (див., напр., [1]).

Означення 1. Нехай для довільної матриці $\mathbf{A}_{m\times n}$ знайдеться така $\mathbf{A}^+$, що задовольняє умови

а) матриці $\mathbf{AA}^+$ та $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ ермітові;
б) $\mathbf{AA}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$;
в) $\mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+ = \mathbf{A}^+$.

Тоді матрицю $\mathbf{A}^+$ називають *узагальненою оберненою Мура–Пенроуза.*

Лема 1. *Для довільної матриці* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *існує єдина узагальнена обернена Мура–Пенроуза* $\mathbf{A}^+$.

Лема 2. *Для* $\forall\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^+ = \lim\limits_{\alpha\to 0}\mathbf{A}^*(\mathbf{AA}^* + \alpha\mathbf{I})^{-1} = \lim\limits_{\alpha\to 0}(\mathbf{A}^*\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^*$, *де* $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+$ *– множина дійсних додатних чисел.*

Лема 3. *Для довільної матриці* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *справджуються твердження:*
а) *якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$, *то* $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*$;
б) *якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = m$, *то* $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^*(\mathbf{AA}^*)^{-1}$;
в) *якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n = m$, *то* $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$.

Теорема 1. *Нехай* d_r *– сума головних мінорів порядку* r *матриці* $\mathbf{A}_{n\times n}, 1 \leq r \leq n$ *. Тоді її характеристичний многочлен можна подати у вигляді*

$$p\left(t\right) = \det\left(\mathbf{A} - t\mathbf{I}\right) = t^n - d_1 t^{n-1} + d_2 t^{n-2} - \ldots + \left(-1\right)^n d_n.$$

Будемо використовувати наступні позначення. Через $\mathbf{a}_{.j}$ позначимо j-й стовпець, а через $\mathbf{a}_{i\,.}$ – i-й рядок матриці $\mathbf{A}$. Нехай матриця $\mathbf{A}_{.\,j}\left(\mathbf{b}\right)$ одержується з матриці $\mathbf{A}$ заміною її j-го стовпця стовпцем $\mathbf{b}$, а матриця $\mathbf{A}_{i\,.}\left(\mathbf{b}\right)$ – заміною її i-го рядка рядком $\mathbf{b}$.

Лема 4. *Для довільної комплексної матриці* $\mathbf{A}_{m\times n}$

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right) \leq \operatorname{rank}\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,. \tag{1}$$

Д о в е д е н н я. Проведемо елементарні перетворення матриці $\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)$, домножуючи її справа на $\mathbf{P}_{i\,k}\left(-a_{jk}\right)$ – матриці, що відрізняються від одиничної елементом $-a_{jk}$, розміщеним на перетині i-го рядка та k-го стовпця $(k \neq i)$:

$$\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\cdot\prod_{k\neq i}\mathbf{P}_{i\,k}\left(-a_{jk}\right) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \sum\limits_{k\neq j} a^*_{1k}a_{k1} & \ldots & a^*_{1j} & \ldots & \sum\limits_{k\neq j} a^*_{1k}a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{k\neq j} a^*_{nk}a_{k1} & \ldots & a^*_{nj} & \ldots & \sum\limits_{k\neq j} a^*_{nk}a_{kn} \end{pmatrix} \\ [i\text{–й}] \end{array}.$$

Одержану матрицю можна факторизувати наступним чином:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \sum\limits_{k\neq j} a^*_{1k}a_{k1} & \ldots & a^*_{1j} & \ldots & \sum\limits_{k\neq j} a^*_{1k}a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{k\neq j} a^*_{nk}a_{k1} & \ldots & a^*_{nj} & \ldots & \sum\limits_{k\neq j} a^*_{nk}a_{kn} \end{pmatrix} \\ [i\text{-й}] \end{array} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & \ldots & a^*_{1m} \\ a^*_{21} & a^*_{22} & \ldots & a^*_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^*_{n1} & a^*_{n2} & \ldots & a^*_{nm} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & 0 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ [i\text{-й}] \end{array} [j\text{-й}]\,.$$

Позначимо $\tilde{\mathbf{A}} := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & 0 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ [i\text{-й}] \end{array} [j\text{-й}]$. Матрицю $\tilde{\mathbf{A}}$ одержуємо з матриці $\mathbf{A}$, поклавши $a_{ij} = 1$ та $a_{ik} = 0\ \forall k \neq i$, $a_{kj} = 0\ \forall k \neq j$. Оскільки елементарні перетворення не змінюють рангу матриці, то $\operatorname{rank}\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right) \leq$ $\leq \min\left\{\operatorname{rank}\mathbf{A}^*, \operatorname{rank}\tilde{\mathbf{A}}\right\}$. Очевидно, що $\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{A}} \geq \operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^*$. Крім того, $\operatorname{rank}\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A}$. Звідки й випливає нерівність (1).

Лему доведено. $\diamondsuit$

Аналогічно доводиться

Лема 5. *Для довільної комплексної матриці* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *маємо*

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right) \leq \operatorname{rank}\mathbf{A}\mathbf{A}^*.$$

Означення 2. Будемо говорити, що *підматриця* $\mathbf{M}$ *є нанизаною на* i *-й рядок (стовпець) матриці* $\mathbf{A}$, якщо елементи i -го рядка (стовпця) матриці $\mathbf{A}$ входять в її підматрицю $\mathbf{M}$.

Нехай $\mathbf{C}^{k,i,l}$ – головна підматриця порядку k матриці $\mathbf{D}_{n\times n} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$, нанизана на її i -й стовпець, а $\mathbf{C}^{k,i,l}_{.\,j}(\mathbf{b})$ – аналогічна підматриця порядку k матриці $\mathbf{D}_{.\,j}(\mathbf{b})$ $\forall l = \overline{1, \binom{n-1}{k-1}}$. Через $\mathbf{R}^{\,k,i,s}$ позначимо головну підматрицю порядку k матриці $\mathbf{G}_{m\times m} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$, нанизану на її i -й рядок, а через $\mathbf{R}^{k,i,s}_{j\,.}(\mathbf{b})$ – таку ж головну підматрицю матриці $\mathbf{G}_{j.}(\mathbf{b})$ $\forall s = \overline{1, \binom{m-1}{k-1}}$.

Теорема 2. *Для довільної комплексної матриці* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *виконується*

а) якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = k < \min\{m, n\}$, *то її узагальнену обернену Мура–Пенроуза* $\mathbf{A}^+_{n\times m}$ *можна подати у вигляді*

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{d_k(\mathbf{D})}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix} \tag{2}$$

або

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{d_k(\mathbf{G})}\begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & \dots & r_{m1} \\ r_{12} & r_{22} & \dots & r_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{1n} & r_{2n} & \dots & r_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

де $d_k(\mathbf{D}), d_k(\mathbf{G})$ – *суми головних мінорів порядку* k *матриць* $\mathbf{D} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *та* $\mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$ *відповідно;* $c_{i\,j} = \sum\limits_{l} \det \mathbf{C}^{k,i,l}_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.\,j}\right)$, $r_{i\,j} = \sum\limits_{s} \det \mathbf{R}^{k,i,s}_{i\,.}\left(\mathbf{a}^*_{j.}\right)$;

б) якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$, *то*

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{\det\mathbf{D}}\begin{pmatrix} \det\mathbf{D}_{.\,1}(\mathbf{a}^*_{.1}) & \det\mathbf{D}_{.\,1}(\mathbf{a}^*_{.\,2}) & \dots & \det\mathbf{D}_{.1}(\mathbf{a}^*_{.\,m}) \\ \det\mathbf{D}_{.\,2}(\mathbf{a}^*_{.1}) & \det\mathbf{D}_{.\,2}(\mathbf{a}^*_{.\,2}) & \dots & \det\mathbf{D}_{.\,2}(\mathbf{a}^*_{.\,m}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \det\mathbf{D}_{.\,n}(\mathbf{a}^*_{.1}) & \det\mathbf{D}_{.\,n}(\mathbf{a}^*_{.\,2}) & \dots & \det\mathbf{D}_{.\,n}(\mathbf{a}^*_{.\,m}) \end{pmatrix} \tag{4}$$

або $\mathbf{A}^+$ *можна записати у вигляді* (3), *якщо при цьому* $n < m$;

в) якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = m$, *то*

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{\det\mathbf{G}}\begin{pmatrix} \det\mathbf{G}_{1\,.}(\mathbf{a}^*_{1\,.}) & \det\mathbf{G}_{2\,.}(\mathbf{a}^*_{1\,.}) & \dots & \det\mathbf{G}_{m\,.}(\mathbf{a}^*_{1\,.}) \\ \det\mathbf{G}_{1\,.}(\mathbf{a}^*_{2\,.}) & \det\mathbf{G}_{2\,.}(\mathbf{a}^*_{2\,.}) & \dots & \det\mathbf{G}_{m\,.}(\mathbf{a}^*_{2\,.}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \det\mathbf{G}_{1\,.}(\mathbf{a}^*_{n\,.}) & \det\mathbf{G}_{2\,.}(\mathbf{a}^*_{n\,.}) & \dots & \det\mathbf{G}_{m\,.}(\mathbf{a}^*_{n\,.}) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

якщо при цьому $n > m$, *то її можна подати також формулою* (2).

Д о в е д е н н я. *а*). Спочатку доведемо виконання формули (2). За лемою 2 маємо $\mathbf{A}^+ = \lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^*$. Матриця $\left(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{n\times n}$ є ермітовою матрицею повного рангу, тому для неї можна побудувати обернену матрицю

$$\left(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)}\begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & \dots & L_{n1} \\ L_{12} & L_{22} & \dots & L_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{1n} & L_{2n} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix},$$

де L_{ij} – алгебричне доповнення відповідного елемента матриці $\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Тоді

$$\mathbf{A}^+=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\det(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})}\begin{pmatrix}\det(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.1}(\mathbf{a}^*_{.1}) & \ldots & \det(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.1}(\mathbf{a}^*_{.m})\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \det(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,n}(\mathbf{a}^*_{.1}) & \ldots & \det(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,n}(\mathbf{a}^*_{.m})\end{pmatrix}. \quad (6)$$

Застосувавши теорему 1, одержимо

$$\det(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})=\alpha^n+d_1\alpha^{n-1}+d_2\alpha^{n-2}+\ldots+d_n,$$

де d_r – сума головних мінорів порядку r матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ $\forall r=\overline{1,n}$. Оскільки $\operatorname{rank}\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\operatorname{rank}\mathbf{A}=k$, то $d_n=d_{n-1}=\ldots=d_{k+1}=0$, тому

$$\det(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})=\alpha^n+d_1\alpha^{n-1}+d_2\alpha^{n-2}+\ldots+d_k\alpha^{n-k}.$$

У свою чергу, для $\forall i=\overline{1,n}$, $\forall j=\overline{1,m}$

$$\det(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)=c_1^{(ij)}\alpha^{n-1}+c_2^{(ij)}\alpha^{n-2}+\ldots+c_n^{(ij)},$$

де $c_r^{(ij)}=\sum\limits_l\det\mathbf{C}^{r,i,l}_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)$ $\forall r=\overline{1,n-1}$, $c_n^{(ij)}=\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)$. Оскільки за лемою 4 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\le k$, то для $\mathbf{C}^{r,i,l}_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)$ – довільної головної підматриці порядку $r\ge k+1$ матриці $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)$, маємо $\det\mathbf{C}^{r,i,l}_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)=0$. Звідси $c_r^{(ij)}=\sum\limits_l\det\mathbf{C}^{r,i,l}_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)=0$ при $k+1\le r<n$ та $c_n^{(ij)}=\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)=0$ $\forall i=\overline{1,n},\forall j=\overline{1,m}$.

Отже, $\det(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)=c_1^{(ij)}\alpha^{n-1}+c_2^{(ij)}\alpha^{n-2}+\ldots+c_k^{(ij)}\alpha^{n-k}$. Підставивши ці значення у матрицю з формули (6), одержимо

$$\mathbf{A}^+=\lim_{\alpha\to 0}\begin{pmatrix}\frac{c_1^{(11)}\alpha^{n-1}+\ldots+c_k^{(11)}\alpha^{n-k}}{\alpha^n+d_1\alpha^{n-1}+\ldots+d_k\alpha^{n-k}} & \ldots & \frac{c_1^{(1m)}\alpha^{n-1}+\ldots+c_k^{(1m)}\alpha^{n-k}}{\alpha^n+d_1\alpha^{n-1}+\ldots+d_k\alpha^{n-k}}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{c_1^{(n1)}\alpha^{n-1}+\ldots+c_k^{(n1)}\alpha^{n-k}}{\alpha^n+d_1\alpha^{n-1}+\ldots+d_k\alpha^{n-k}} & \ldots & \frac{c_1^{(nm)}\alpha^{n-1}+\ldots+c_k^{(nm)}\alpha^{n-k}}{\alpha^n+d_1\alpha^{n-1}+\ldots+d_k\alpha^{n-k}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{c_k^{(11)}}{d_k} & \ldots & \frac{c_k^{(1m)}}{d_k}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{c_k^{(n1)}}{d_k} & \ldots & \frac{c_k^{(nm)}}{d_k}\end{pmatrix}.$$

Звідси, перепозначивши $c_k^{(ij)}=c_{ij}$, одержимо вираз (2) для $\mathbf{A}^+$.

Формулу (3) доводимо аналогічно.

б). Нехай тепер $\operatorname{rank}\mathbf{A}=n$. Тоді за лемою 3 $\mathbf{A}^+=(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*$, де матриця $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ є квадратною матрицею повного рангу. Виразивши її обернену через класичну приєднану та розкривши добуток $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^*$, одержимо вираз $\mathbf{A}^+$ формулою (5). Якщо при цьому $m>n$, то матриця $\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\mathbf{G}$ є матрицею неповного рангу і, зважаючи на частину *а*) доведення, для $\mathbf{A}^+$ є правильною також і формула (3).

в). Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A}=m$, то за лемою 3 $\mathbf{A}^+=\mathbf{A}^*(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-1}$. Виразивши $\mathbf{G}^{-1}=(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-1}$ через класичну приєднану та розкривши добуток $\mathbf{A}^+=\mathbf{A}^*\mathbf{G}^{-1}$, одержимо вираз $\mathbf{A}^+$ формулою (5). Оскільки при умові $m<n$ $\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\mathbf{D}$ є матрицею неповного рангу, то в цьому випадку виконується ще й формула (2).

Теорему доведено. $\diamondsuit$

Наслідок 1. *Нехай* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *матриця рангу* k , *де* $k < \min\{m,n\}$ *або* $k = m < n$. *Тоді проективну матрицю* $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$ *можна подати у вигляді*

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{d_k\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \ldots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \ldots & q_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{n1} & q_{n2} & \ldots & q_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тут $q_{ii} = \sum\limits_{l} \det \mathbf{C}^{k,i,l}$ $\forall i = \overline{1,n}$, $q_{ij} = \sum\limits_{l} \det \mathbf{C}^{k,i,l}_{.\,i}\left(\mathbf{d}_{.j}\right), i \neq j$, *де* $\mathbf{d}_{.j}$ – j*-й стовпець матриці* $\mathbf{D}_{n\times n} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

Наслідок 2. *Нехай* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *матриця рангу* k , *де* $k < \min\{m,n\}$ *або* $k = n < m$. *Тоді проективну матрицю* $\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$ *можна подати у вигляді*

$$\mathbf{P} = \frac{1}{d_k\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{m1} & p_{m2} & \ldots & p_{mm} \end{pmatrix}.$$

Тут $p_{ii} = \sum\limits_{s} \det \mathbf{R}^{k,i,s}$ $\forall i = \overline{1,m}$, $p_{ij} = \sum\limits_{s} \det \mathbf{R}^{k,i,l}_{i.}\left(\mathbf{g}_{j.}\right)$, $i \neq j$, *де* $\mathbf{g}_{j.}$ – j*-й рядок матриці* $\mathbf{G}_{m\times m} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$.

Наслідки безпосередньо доводяться зображенням матриці $\mathbf{A}^{+}$ в добутках $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$ та $\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$ відповідно формулами (2) і (3).

Зауваження 1. Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$ або $\operatorname{rank}\mathbf{A} = m$, то на підставі леми 3 $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{I}_{n\times n}$ та $\mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \mathbf{I}_{m\times m}$. Подавши матрицю $\mathbf{A}^{+}$ з формул (4) і (5) відповідно як $\mathbf{A}^{+} = \frac{\tilde{\mathbf{D}}}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})}$ та $\mathbf{A}^{+} = \frac{\tilde{\mathbf{G}}}{\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)}$, одержимо $\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{A} = \det\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)\mathbf{I}_{n\times n}$, $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{G}} = \det\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)\mathbf{I}_{m\times m}$. Тобто матриці $\tilde{\mathbf{D}}$ та $\tilde{\mathbf{G}}$ є відповідно лівим і правим узагальненням матриці, приєднаної до матриці $\mathbf{A}_{m\times n}$ повного рангу.

Зауваження 2. Якщо матриця $\mathbf{A}_{m\times n}$ є неповного рангу, то, виходячи з формул (2) і (3), одержимо $\mathbf{A}^{+} = \frac{\mathbf{C}}{d_k(\mathbf{D})}$ та $\mathbf{A}^{+} = \frac{\mathbf{R}}{d_k(\mathbf{G})}$, де $\mathbf{C} = \left(c_{ij}\right)_{n\times m}$ і $\mathbf{R} = \left(r_{ij}\right)_{n\times m}$. Тоді $\mathbf{C}\mathbf{A} = d_k\left(\mathbf{D}\right)\cdot\mathbf{Q}$ і $\mathbf{A}\mathbf{R} = d_k\left(\mathbf{G}\right)\cdot\mathbf{P}$. Оскільки всі власні значення проективних матриць $\mathbf{Q}$ і $\mathbf{P}$ є тільки 1 та 0, то знайдуться такі унітарні матриці $\mathbf{U}$ і $\mathbf{V}$, що $\mathbf{C}\mathbf{A} = d_k\left(\mathbf{D}\right)\cdot\mathbf{U}\left(\operatorname{diag}\left(1,\ldots,1,0,\ldots,0\right)\right)_{n\times n}\mathbf{U}^*$, $\mathbf{A}\mathbf{R} = d_k\left(\mathbf{D}\right)\cdot \cdot\mathbf{V}\left(\operatorname{diag}\left(1,\ldots,1,0,\ldots,0\right)\right)_{m\times m}\mathbf{V}^*$. Отже, в цьому випадку матриці $\mathbf{C}$ і $\mathbf{R}$ можна розглядати як відповідно лівий і правий аналог приєднаної матриці.

1. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
2. *Arghiriade E. et Dragomir A.* Une nouvelle definition de l'inverse generalisee d'une matrice // Lincei - Rend. Sc. fis. mat. e nat. XXXV. – 1963.– P. 158–165.
3. *Bapat R. B. and Robinson D. W.* The Moore–Penrose inverse over a commutative ring // Linear Algebra and Appl. – 1992. – **177**. – P. 89–103.
4. *Ben-Israel A. and Grevile T. N. E.* Generalized inverses: Theory and applications. – New York: Wiley-Intersci., 1974.
5. *Bhaskara Rao K. P. S.* Generalized inverses of matrices over integral domains // Linear Algebra and Appl. – 1983. – **49**. – P. 179–163.
6. *Gabriel R.* Das verallgemeinerte Inverse einer Matrix, über einem beliebigen Körper – analytish betrachtet // J. Reine angew Math. – 1970. – **244(V)**. – P. 83–93.
7. *Moore E. H.* On reciprocal of the general algebric matrix // Bull. Amer. Math. Soc. – 1920. – **26**. – P. 394–395.
8. *Penroze R.* A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1955. – **51**. – P. 406–413.
9. *Stanimirovic' P.S.* General determinantal representation of pseudoinverses of matrices // Mat. Vesnik. – 1996. – **48**. – P. 1–9.
10. *Stanimirovic' P. and Stankovic' M.* Determinantal representation of weighted Moore–Penrose inverse // Mat. Vesnik. – 1994. – **46**. – P. 41–50.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ МУРА–ПЕНРОУЗА ЧЕРЕЗ АНАЛОГ КЛАССИЧЕСКОЙ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАТРИЦЫ

Обобщенная обратная Мура–Пенроуза для произвольной матрицы, полного или неполного ранга, аналитически представлена через матрицу, которая обобщает классическую присоединенную.

REPRESENTATION OF GENERALIZED INVERSE MOORE–PENROSE MATRIX BY ANALOG OF CLASSICAL ADJOINT MATRIX

The Moore–Penrose generalized inverse of arbitrary matrix of completed or incomplete rank is analytically represented by a matrix, which is the generalization of classical adjoint one.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
09.09.03