УДК 517.925.4

З. М. Шеремета, М. М. Шеремета

ОПУКЛІСТЬ ЦІЛИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Досліджуються умови на сталі коефіцієнти диференціального рівняння $z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0$, за яких цілий розв'язок f цього рівняння і всі його похідні $f', f'', \ldots$ є опуклими в одиничному крузі.

1. Однолиста аналітична в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{1}$$

називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ — опукла область. Добре відомо, що умова $\mathrm{Re}\,\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0\,(z \in \mathbb{D})$ є необхідною і достатньою для опуклості f. Функція f називається близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ така, що $\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z)) > 0\,(z \in \mathbb{D})$. С.Шах [1] вивчав умови на дійсні коефіцієнти диференціального рівняння

$$z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0, \tag{2}$$

за яких цілий розв'язок f цього рівняння і всі його похідні є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$. Легко перевірити, що (1) є розв'язком рівняння (2) тоді, і тільки тоді, коли

$$\gamma_2 f_0 = 0, \qquad (\beta_1 + \gamma_2)f_1 + \gamma_1 f_0 = 0 \tag{3}$$

і

$$(n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2)f_n + (\beta_0(n-1) + \gamma_1)f_{n-1} + \gamma_0 f_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2). \tag{4}$$

За умови $n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2 \neq 0$ останню рівність можна записати у вигляді

$$f_n = -\frac{\beta_0(n-1) + \gamma_1}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2} f_{n-1} - \frac{\gamma_0}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2} f_{n-2} \qquad (n \geq 2). \tag{5}$$

Якщо або $\gamma_0 = 0$, або $\beta_0 = \gamma_1 = 0$, то двочленна рекурентна формула (5) перетворюється в одночленну рекурентну формулу, і в цьому випадку С.Шах за додаткових умов на інші коефіцієнти рівняння (2) показав [1], що існує цілий розв'язок f такий, що $f, f', f'', \ldots$ є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ і

$$\ln M_f(r) = (1 + o(1))\sigma r, \quad r \to \infty, \tag{6}$$

де $\sigma = |\beta_0|$ або $\sigma = \sqrt{|\gamma_0|}$ і $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Складніший випадок, коли $\gamma_0 \neq 0$ і $\beta_0 \neq 0$, вивчений в [2], де за певних умов на інші коефіцієнти рівняння (2) показано, що існує цілий розв'язок f такий, що $f, f', f'', \ldots$ є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ і виконується (6) з $\sigma = \dfrac{1}{2}(|\beta_0| + \sqrt{|\beta_0|^2 + 4|\gamma_0|})$. Подібні результати отримані також в статтях [2—5].

Виникає природне питання, за яких умов на коефіцієнти рівняння (2) існує цілий розв'язок f цього рівняння такий, що $f, f', f'', \ldots$ є опуклими в $\mathbb{D}$ і виконується (6). Цій проблемі присвячена наша стаття, в якій на відміну від [1—5] коефіцієнти рівняння (1) можуть бути комплексними.

Потрібну функцію шукатимемо у вигляді

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n, \tag{7}$$

а для дослідження опуклості $f, f', f'', \ldots$ будемо використовувати наступне твердження з [6].

Лема 1. *Функція* (7) *є опуклою, якщо* $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |f_n| < 1$.

З (3) випливають рівності $\beta_1 + \gamma_2 = 0$ та $n(n+\beta_1-1)+\gamma_2 = (n-1)(n-\beta_1)$ і, якщо, наприклад, $\beta_1 = -2$, то рекурентна формула (5) втрачає сенс для $n = 2$. Тому надалі вважатимемо, що $\beta_1 + \gamma_2 = 0$ і $|\beta_1| < 2$.

2. Розглянемо спочатку випадок одночленної рекурентної формули, причому обмежимося тільки випадком, коли $\gamma_0 = 0$.

Теорема 1. *Якщо* $\gamma_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$, $\beta_1 + \gamma_2 = 0$, $|\beta_1| < 2$ *і* $2(|\beta_0| + |\gamma_1|)/(2 - |\beta_1|) \leq (\ln 2)/2$, *то існує цілий розв'язок* (7) *рівняння* (2) *такий, що* $f, f', f'', \ldots$ *опуклі в* $\mathbb{D}$ *і виконується* (6) *з* $\sigma = |\beta_0|$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $\gamma_0 = 0$ і $\beta_1 = -\gamma_2$, то з (5) отримуємо рекурентну формулу $f_n = -\dfrac{\beta_0(n-1)+\gamma_1}{(n-1)(n+\beta_1)} f_{n-1}$, $(n \geq 2)$, звідки

$$f_n = (-1)^{n-1} \prod_{j=2}^{n} \frac{\beta_0(j-1)+\gamma_1}{(j-1)(j+\beta_1)} = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\beta_0 j + \gamma_1}{j(j+1+\beta_1)} =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n!} \prod_{j=1}^{n-1} (j+1) \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\beta_0 j + \gamma_1}{j(j+1+\beta_1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(\beta_0 j + \gamma_1)(j+1)}{j(j+1+\beta_1)}. \tag{8}$$

Нехай $k \in \mathbb{N}$. Оскільки

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)} z^n, \qquad f_n^{(k)} = \frac{(n+k)!}{n!} f_{n+k},$$

то $f^{(k)}$ опукла тоді, і тільки тоді, коли опукла функція

$$\frac{f^{(k)}(z) - f_0^{(k)}}{f_1^{(k)}} = z + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n,k} z^n, \tag{9}$$

де $f_{0,k} = 0$, $f_{1,k} = 1$, $f_{n,k} = f_n^{(k)}/f_1^{(k)}$, $(n \geq 2)$, тобто з огляду на (8)

$$f_{n,k} = \frac{(n+k)!}{n!(k+1)!} \frac{f_{n+k}}{f_{1+k}} = (-1)^{n-1} \frac{(n+k)!}{n!(k+1)!} \prod_{j=k+1}^{n+k-1} \frac{\beta_0 j + \gamma_1}{j(j+1+\beta_1)} =$$

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \prod_{j=k+1}^{n+k-1} \frac{(\beta_0 j + \gamma_1)(j+1)}{j(j+1+\beta_1)}. \tag{10}$$

Якщо покладемо $f_{n,0} = f_n$, то з (8) і (10) дістанемо

$$f_{n,k} = (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \prod_{j=k+1}^{n+k-1} \frac{(\beta_0 j + \gamma_1)(j+1)}{j(j+1+\beta_1)} \tag{11}$$

для всіх $n \geq 2$ і $k \geq 0$. За лемою, для того, щоб всі $f^{(k)}$, $k \geq 2$, були опуклими в $\mathbb{D}$, досить, щоб $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n^2|f_{n,k}| < 1$ для всіх $k \geq 0$. Позначаючи $q = \dfrac{2(|\beta_0| + |\gamma_1|)}{2 - |\beta_1|} \leq (\ln 2)/2$, з (11) маємо

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2|f_{n,k}| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \prod_{j=k+1}^{n+k-1} \frac{(|\beta_0|j + |\gamma_1|)(j+1)}{j(j+1-|\beta_1|)} =$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} \prod_{j=k+1}^{n+k-1} \frac{|\beta_0|j + |\gamma_1|}{j} \prod_{j=k+1}^{n+k-1} \frac{j+1}{j+1-|\beta_1|} \leq$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} \prod_{j=k+1}^{n+k-1} (|\beta_0| + |\gamma_1|) \prod_{j=k+1}^{n+k-1} \frac{2}{2-|\beta_1|} =$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{nq^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q^{n-1}}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q^{n-1}}{(n-1)!} = (q+1)e^q - 1 < 1,$$

тобто всі $f^{(k)}$, $k \geq 2$, опуклі в $\mathbb{D}$. Доведемо тепер (6) з $\sigma = |\beta_0|$. Оскільки $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{\varkappa}{j}\right) \to 0$, $\quad n \to \infty$, для кожної сталої $\varkappa$, то

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1 + \frac{\varkappa}{j}\right) = \left(\exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\varkappa}{j}\right)\right\}\right)^n = (1 + o(1))^n, \quad n \to \infty.$$

Тому $\prod\limits_{j=1}^{n-1} \dfrac{(\beta_0 j + \gamma_1)(j+1)}{j(j+1+\beta_1)} = ((1+o(1))\beta_0)^n$, $\quad n \to \infty$, і з огляду на (8), $f_n = (-1)^{n-1}\dfrac{((1+o(1))\beta_0)^n}{n!}$, $n \to \infty$. Звідси неважко отримати (6) з $\sigma = |\beta_0|$.

Зауваження 1. Якщо $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ і $\gamma_1 \neq 0$, то для всіх $n \geq 2$ і $k \geq 0$

$$f_{n,k} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\prod_{j=k+1}^{n+k-1} \frac{\gamma_1(j+1)}{j(j+1+\beta_1)},$$

$$|f_{n,k}| = \frac{|\gamma_1|^{n-1}}{n!}\prod_{j=k+1}^{n+k-1} \frac{2}{j(2-|\beta_1|)} \leq \left(\frac{2|\gamma_1|}{2-|\,b_1|}\right)^{n-1} \frac{1}{n!(n-1)!},$$

а якщо $2|\gamma_1|/(2-|\,b_1|) \leq 2/5$, то $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n^2|f_{n,k}| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{(n!)^2}\left(\dfrac{2|\gamma_1|}{2-|\,b_1|}\right)^n < 1$. Тому $f_n = (-1)^{n-1}\dfrac{((1+o(1))\gamma_1)^n}{(n!)^2}$, $n \to \infty$ і $\ln M_f(r) \sim \sqrt{|\gamma_1|r}$, $r \to +\infty$.

Зауваження 2. Умова $2(|\beta_0| + |\gamma_1|)/(2 - |\beta_1|) < (\ln 2)/2$ в теоремі 1 появилась в результаті методу доведення. Замінити в ній $(\ln 2)/2$ на сталу $c > 1$ не можна, на що вказує приклад цілої функції $f_*(z) = (e^{cz} - 1)/c$, опуклої в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ тоді, і тільки тоді, коли $|c| \leq 1$. Функція f_* є розв'язком рівняння $z^2 w'' - cz^2 w' = 0$, яке є частковим випадком рівняння (2) (з $\beta_0 = -c$ і $\beta_1 = \gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$), а наша умова тоді має вигляд $|c| \leq (\ln 2)/2$.

3. Перейдемо до випадку двочленної рекурентної формули. Цілий розв'язок знову шукатимемо у вигляді (7).

Теорема 2. *Нехай* $\beta_0 \neq 0,\ \ \gamma_0 \neq 0,\ \ \beta_1 + \gamma_2 = 0,\ \ |\beta_1| < 2$ *і*

$$4\frac{|\beta_0| + |\gamma_1|}{2 - |\beta_1|} + \frac{9}{8}\frac{2|\beta_0| + |\gamma_1|}{3 - |\beta_1|} + \frac{9|\gamma_0|}{2(3 - |\beta_1|)} + \frac{4}{3}\frac{|\gamma_0|}{4 - |\beta_1|} < 1. \tag{12}$$

Тоді існує цілий розв'язок (7) *рівняння* (2) *такий, що* $f,\ f',\ f'',\ldots$ *опуклі в* $\mathbb{D}$ *і виконується* (6), *де або* $\sigma = \sigma_1 = \left|-\beta_0 + \sqrt{\beta_0^2 - 4\gamma_0}\right|/2,$ *або* $\sigma = \sigma_2 = \left|-\beta_0 - \sqrt{\beta_0^2 - 4\gamma_0}\right|/2.$

Д о в е д е н н я. Оскільки $\beta_1 + \gamma_2 = 0,$ то з (5) маємо

$$f_n = -\frac{\beta_0(n-1) + \gamma_1}{(n-1)(n+\beta_1)}f_{n-1} - \frac{\gamma_0}{(n-1)(n+\beta_1)}f_{n-2} \quad (n \geq 2), \tag{13}$$

звідки

$$|f_n| \leq \frac{|\beta_0|(n-1) + |\gamma_1|}{(n-1)(n-|\beta_1|)}|f_{n-1}| + \frac{|\gamma_0|}{(n-1)(n-|\beta_1|)}|f_{n-2}| \quad (n \geq 2). \tag{14}$$

Оскільки коефіцієнти $f_{n,k}$ функції (9) визначаються першою рівністю (10), то з (13) отримуємо

$$f_{n,k} = \frac{(n+k)!}{n!(k+1)!}\frac{f_{n+k}}{f_{1+k}} = -\frac{(n+k)!}{n!(k+1)!f_{1+k}}\times$$
$$\left(\frac{\beta_0(n+k-1) + \gamma_1}{(n+k-1)(n+k+\beta_1)}f_{n+k-1} + \frac{\gamma_0}{(n+k-1)(n+k+\beta_1)}f_{n+k-2}\right) =$$
$$-\frac{n+k}{n}\frac{\beta_0(n+k-1) + \gamma_1}{(n+k-1)(n+k+\beta_1)}\frac{(n-1+k)!}{(n-1)!(k+1)!}\frac{f_{n-1+k}}{f_{1+k}} -$$
$$\frac{(n+k)(n+k-1)}{n(n-1)}\frac{\gamma_0}{(n+k-1)(n+k+\beta_1)}\frac{(n-2+k)!}{(n-2)!(k+1)!}\frac{f_{n-2+k}}{f_{1+k}} =$$
$$-\frac{n+k}{n}\frac{\beta_0(n+k-1) + \gamma_1}{(n+k-1)(n+k+\beta_1)}f_{n-1,k} - \frac{n+k}{n}\frac{\gamma_0}{(n-1)(n+k+\beta_1)}f_{n-2,k}$$

і

$$|f_{n,k}| \leq \frac{(n+k)|f_{n-1,k}|}{n+k-|\beta_1|}\frac{|\beta_0|(n+k-1) + |\gamma_1|}{n(n+k-1)} + \frac{(n+k)|f_{n-2,k}|}{n+k-|\beta_1|}\frac{|\gamma_0|}{n(n-1)} \leq$$
$$\frac{|\beta_0|(n-1) + |\gamma_1|}{(n-1)(n-|\beta_1|)}|f_{n-1,k}| + \frac{|\gamma_0|}{(n-1)(n-|\beta_1|)}|f_{n-2,k}|, \quad (n \geq 2). \tag{15}$$

Якщо, як вище, покладемо $f_{n,0} = f_n,$ то з (14) одержимо (15) для всіх $k \geq 0.$ Тому для кожного $k \geq 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2|f_{n,k}| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^2\frac{|\beta_0|(n-1) + |\gamma_1|}{(n-1)(n-|\beta_1|)}(n-1)^2|f_{n-1,k}| +$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{n-2}\right)^2\frac{|\gamma_0|}{(n-1)(n-|\beta_1|)}(n-2)^2|f_{n-2,k}| =$$
$$4\frac{|\beta_0| + |\gamma_1|}{2-|\beta_1|} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{n(n+1-|\beta_1|)}n^2|f_{n,k}| +$$
$$\frac{4|\gamma_0|}{2-|\beta_1|}|f_{0,k}| + \frac{9|\gamma_0|}{2(3-|\beta_1|)}|f_{1,k}| + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^2\frac{|\gamma_0|n^2}{(n+1)(n+2-|\beta_1|)}|f_{n,k}|.$$

Оскільки $f_{0,k}=0$ і $f_{1,k}=1$, то звідси

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{|\beta_0|n+|\gamma_1|}{n(n+1-|\beta_1|)}-\left(\frac{n+2}{n}\right)^2\frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+2-|\beta_1|)}\right)n^2|f_{n,k}|\leq$$
$$4\frac{|\beta_0|+|\gamma_1|}{2-|\beta_1|}+\frac{9|\gamma_0|}{2(3-|\beta_1|)}$$

і тому

$$\left(1-\frac{9}{8}\frac{2|\beta_0|+|\gamma_1|}{3-|\beta_1|}-\frac{4}{3}\frac{|\gamma_0|}{4-|\beta_1|}\right)\sum_{n=2}^{\infty}n|f_{n,k}|\leq 4\frac{|\beta_0|+|\gamma_1|}{2-|\beta_1|}+\frac{9|\gamma_0|}{2(3-|\beta_1|)}.$$

З (12) випливає, що $1-\dfrac{9}{8}\dfrac{2|\beta_0|+|\gamma_1|}{3-|\beta_1|}-\dfrac{4}{3}\dfrac{|\gamma_0|}{4-|\beta_1|}>0$ і $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n|f_{n,k}|<1$, тобто за лемою всі $f^{(k)}$, $k\geq 0$, опуклі в $\mathbb{D}$.

Нехай $\mu_f(r)=\max\{f_nr^n:\ n\geq 1\}$ — максимальний член ряду (7), $\nu_f(r)=\max\{n:\ f_nr^n=\mu_f(r)\}$ — його центральний індекс, а ξ — точка на колі $\{z:|z|=r\}$ така, що $M_f(r)=|f(\xi)|$. Тоді [7, с.25] існує множина $E\subset[1,+\infty)$ скінченної логарифмічної міри така, що $f^{(m)}(\xi)=(\nu_f(r)/\xi)^mf(\xi)(1+\eta_m(\xi))$, $m=1,2$, де $\eta_m(\xi)=O((\nu_f(r))^{-1/5})$, $r\to+\infty$, $r\notin E$. (Множина E є об'єднанням $[r_n,r_n^*)$ таких, що $r_n^*/r_n\to 1$, $n\to\infty$.) З огляду на те, що $\beta_0\neq 0$ і $\gamma_0\neq 0$, для цілого розв'язку f рівняння (2) маємо

$$\left(\frac{\nu_f(r)}{\xi}\right)^2(1+\eta_2(\xi))+\beta_0(1+\eta_1(\xi))(1+\eta_1^*(\xi))\frac{\nu_f(r)}{\xi}+\gamma_0(1+\eta_2^*(\xi))=0,$$

де $\eta_1^*(\xi))\to 0$, $\xi\to\infty$. Звідси $\dfrac{\nu_f(r)}{\xi}=\dfrac{-\beta_0\pm\sqrt{\beta_0^2-4\gamma_0}}{2}(1+\eta_3(\xi))$, де $\eta_3(\xi)\to 0$, $r\to+\infty$, $r\notin E$. Тобто $\nu_f(r)=(1+o(1))\sigma r$, $r\to+\infty$, $r\notin E$, де $\sigma=\sigma_1$ або $\sigma=\sigma_2$. Якщо ж $r\in E$, тобто $r\in[r_n,r_n^*)$, то $(1+o(1))\sigma=r(1+o(1))\sigma r_n=\nu_f(r_n)\leq\nu_f(r)\leq\nu_f(r_n^*)=(1+o(1))\sigma r_n^*=(1+o(1))\sigma r$, $r\to+\infty$. Отже, $\nu_f(r)=(1+o(1))\sigma r$, $r\to+\infty$. Тому

$$\ln\mu_f(r)=\ln\mu_f(0)+\int_0^r\frac{\nu_f(t)}{t}=(1+o(1))\sigma r,\quad r\to+\infty,$$

і, оскільки $\ln M_f(r)\sim\ln\mu_f(r)$, $r\to+\infty$, то звідси отримуємо (6).

Зауваження 3. Якщо $1-4\gamma_0/\beta_0^2\leq 0$, то (6) виконується з $\sigma=\sigma_1=\sigma_2=\left|-\beta_0+\sqrt{\beta_0^2-4\gamma_0}\right|/2$. В загальному випадку, коли $\sigma_1\neq\sigma_2$, правдоподібною є гіпотеза, що (6) виконується для $\sigma=\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$, бо, наприклад, якщо $\beta_1=\gamma_1=\gamma_2=0$, то рівняння (2) має вигляд $z^2w''+\beta_0z^2w'+\gamma_0z^2w=0$ із загальним розв'язком $w(z)=C_1\exp\{\lambda_1z\}+C_2\exp\{\lambda_2z\}$, де $\lambda_1=\Big(-\beta_0+\sqrt{\beta_0^2-4\gamma_0}\Big)/2$ і $\lambda_2=\left(-\beta_0-\sqrt{\beta_0^2-4\gamma_0}\right)/2$. Розв'язок f цього рівняння, який задовольняє умови $f(0)=f'(0)-1=0$, має вигляд $f(z)=(\beta_0^2-4\gamma_0)^{-1/2}\left(\exp\{\lambda_1z\}-\exp\{\lambda_2z\}\right)$. Оскільки $|\lambda_1|=\sigma_1\neq\sigma_2=\lambda_2$, то ця функція f має регулярне зростання і тип $\sigma=\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$.

Зауваження 4. Умова (12) в теоремі 2 появилась в результаті методу доведення. Усунути її не можна, на що вказує приклад функції $f_*(z)=ze^{cz}$, $c>0$, яка є розв'язком рівняння $z^2w''-2cz^2w'+c^2z^2w=0$, тобто рівняння (2) з $\beta_0=-2c$, $\gamma_0=c^2$, $\beta_1=\gamma_1=\gamma_2=0$. Умова (12) в цьому випадку записується у вигляді $11c^2 + 33c - 6 < 0$ і виконується, якщо $c < (\sqrt{1353} - 33)/22 = 0,17\ldots$. З іншого боку, для $z = -1$ і $c = (3 - \sqrt{5})/2$ маємо

$$\mathrm{Re}\left\{1 + z\frac{f_*''(z)}{f_*'(z)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{1 + cz + \frac{cz}{1+cz}\right\} = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = 0,$$

тобто для того, щоб f_* була опуклою в $\mathbb{D}$, необхідно (можна показати, що й достатньо), щоб $c \le (3 - \sqrt{5})/2 = 0,62\ldots$.

1. *Shah S.M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II // J. Math. anal. and appl. – 1989. – V. 142. – P. 422–430.
2. *Шеремета З.М.* О свойствах целых решений одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 8. – С. 1045–1050.
3. *Шеремета З.М.* Близькість до опуклості цілого розв'язку одного диференціального рівняння // Мат. методи і фіз.-мех. поля – 1999. – Т. 42, № 3. – С. 31–35.
4. *Sheremeta Z.M.* On entire solutions of a differential equation // Matematychni studii. – 2000. – V. 14, № 1. – P. 54–58.
5. *Шеремета З.М.* Про близькість до опуклості цілого розв'язку одного диференціального рівняння // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2000. – Вип. 58. – С. 54–56.
6. *Goodman A.W.* Univalent functions and nonanalytic curves // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – V. 8. – P. 597–601.
7. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. – М.: Гостехиздат. – 1960. – 348 с.

ВЫПУКЛОСТЬ ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Исследуются условия на постоянные коэффициенты дифференциального уравнения $z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0$, при которых целое решение f этого уравнения и все его производные $f', f'', \ldots$ являются выпуклыми в единичном круге.

CONVEXITY OF ENTIRE SOLUTIONS OF A DIFFERENTIAL EQUATION

Conditions on constant coefficients of differential equation $z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0$, under which an entire solution f of the equation and all its derivatives $f', f'', \ldots$ are convex in the unit disk is investigated.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
Львівський національний
університет ім. І. Франка

Отримано
09.05.03