УДК 539.3

С. В. Саркисян, А. С. Погосян

О МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С УЧЁТОМ ДЕФОРМАЦИЙ СДВИГА

Исследуется задача о поперечных колебаниях трансверсально-изотропной электропроводящей пластинки при наличии постоянного магнитного поля с учетом поперечных сдвиговых деформаций. Рассмотрены две гипотезы о характере изменяемости компонент электромагнитного поля по толщине пластины.

1. Постановка и решение задачи. Пусть бесконечная пластинка постоянной толщины $2h$ в декартовой системе координат xyz расположена так, что срединная плоскость совпадает с координатной плоскостью $z=0$, причем плоскость изотропии материала пластинки в каждой точке пластинки параллельна срединной плоскости пластинки.

Для пластинки, изготовленной из материала с конечной электропроводностью $\hat{\sigma}(\sigma,\sigma,\sigma')$ принимается, что относительная магнитная проницаемость $\mu=1$. Это с достаточно высокой точностью приемлимо при рассмотрении задач магнитоупругости пластин из проводящих материалов. Принимается также, что посторонние токи и заряды отсутствуют, а электромагнитные свойства среды, окружающей пластинку, эквивалентны свойствам вакуума.

Уравнения исследуемой задачи были получены на основе линеаризованных уравнений электродинамики [3] и уравнений движения тонких пластин с учетом поперечных сдвиговых деформаций [1]. Для изменения компонент e_1, e_2, h_3 электромагнитного поля по толщине пластины принимаются следующие два известных предположения:

a) независимость от поперечной координаты (гипотеза магнитоупругости тонких тел) [3]

$$e_1=\varphi(x,y,t), e_2=\psi(x,y,t), h_3=f(x,y,t); \tag{1}$$

b) линейный закон изменения [2[

$$e_1=\varphi(x,y,t)+z\varphi_1(x,y,t),\ e_2=\psi(x,y,t)+z\psi_1(x,y,t),\ h_3=f(x,y,t)+zf_1(x,y,t). \tag{2}$$

Для задачи поперечных колебаний пластинки, при дополнительном допущении относительно характера изменения электромагнитного поля в окружающей среде [3[, получим следующие системы уравнений:

для продольного магнитного поля $\vec{B}(B_1,0,0)$ (при предположениях либо (1) либо (2)) [5]

$$L[W]=-\frac{hB_1}{2\pi}\frac{\sigma'}{\sigma}\left(1-\frac{2\varrho h^2}{5G'}\Delta+\frac{2\varrho h^2}{5G'}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{h_1^+-h_1^-}{2h}-\frac{\partial f}{\partial x}\right)-$$

$$\frac{h^2B_1}{6\pi}\frac{\sigma}{\sigma'}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_1^+-h_1^-}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_2^+-h_2^-}{2}\right)\right),$$

$$\Delta f-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{4\pi\sigma B_1}{c^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_1^+-h_1^-}{2h}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_2^+-h_2^-}{2h}\right); \tag{3}$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{h_1^+-h_1^-}{2}\right)=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{4\pi\sigma}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_1^+-h_1^-}{2h}-\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\frac{B_1}{c^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right),$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{h_2^+-h_2^-}{2}\right)=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{4\pi\sigma}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_2^+-h_2^-}{2h}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right),$$

$$L[\ ]=D\Delta\Delta+2\varrho h\left(1-\frac{h^3}{3}\Delta-\frac{2Eh^2}{5G'(1-v^2)}\Delta+\frac{2\varrho h^2}{5G'}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2};$$

для поперечного магнитного поля $\vec{B}(0,0,B_3)$, случай (1) [1]

$$L[W]=\frac{2\sigma hB_3^2}{c^2}\left(\frac{h^2}{3}\Delta-\frac{2\varrho h^2}{5G'}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial W}{\partial t}, \tag{4}$$

случай (2) [6]

$$L[W]=-\frac{2h^3}{3}\frac{2\sigma B_3}{c^2}\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{2\sigma hB_3^2}{c^2}\left(\frac{h^2}{3}\Delta-\frac{2\varrho h^2}{5G'}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial W}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[\left(1+\frac{h}{\lambda}-\frac{h^2}{3}\Delta+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{h^2}{3}\frac{\partial}{\partial t}\right)f_1+\right.$$

$$\left.\frac{4\pi\sigma B_3}{c^2}\left(\frac{h^2}{3}\Delta-\frac{2\varrho h^2}{5G'}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial W}{\partial t}\right]=0.$$

В общем случае к этим уравнениям необходимо присоединить граничные условия.

Отметим, что колебания электропроводящей пластинки в магнитном поле на основе гипотез уточненной теории пластин с применением операторного метода в комплексе с методом усреднения исследованы в работе [7].

Рассматривая решения типа гармонических волн

$$\{W,f,f_1,h_1^+-h_1^-,h_2^+-h_2^-\}=\{W_0,f_0,f_{10},h_{10}^+-h_{10}^-,h_{20}^+-h_{20}^-\}e^{i(\omega t-k_1x-k_2y)},$$

$$W_0,f_0,f_{10},h_{10}^+-h_{10}^-,h_{20}^+-h_{20}^-=const \tag{6}$$

из систем (3)–(5), после некоторых преобразований получим следующие характеристические уравнения соответственно:

для продольного магнитного поля

$$Dr^4-2\varrho h\omega^2\left(1+\frac{h^2r^2}{3}+\frac{2Eh^2r^2}{5G'(1-v^2)}-\frac{2\varrho h^2}{5G'}\omega^2\right)=-\frac{2i\omega\sigma' hB_1^2}{c^2\left(4\pi\sigma\lambda hr^2+i\omega\right)}\times$$

$$\left[\left(1+\frac{2Eh^2r^2}{5G'(1-v^2)}-\frac{2\varrho h^2}{5G'}\omega^2\right)\left(\frac{4\pi\sigma hk_1^2\left(1+\lambda hr^2\right)}{\lambda^{-1}+h\chi^2}+i\omega\right)-i\omega\frac{h^2k_2^2}{3}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2\right]; \tag{7}$$

для поперечного магнитного поля

$$Dr^4-2\varrho h\omega^2\left(1+\frac{h^2r^2}{3}+\frac{2Eh^2r^2}{5G'(1-v^2)}-\frac{2\varrho h^2}{5G'}\omega^2\right)=-\frac{2i\omega\sigma hB_3^2}{c^2}\left(\frac{h^2r^2}{3}-\frac{2\varrho h^2}{5G'}\omega^2\right); \tag{8}$$

$$\left[Dr^4-2\varrho h\omega^2\left(1+\frac{h^2r^2}{3}+\frac{2Eh^2r^2}{5G'(1-v^2)}-\frac{2\varrho h^2}{5G'}\omega^2\right)\right]\left(1+\frac{h}{\lambda}+\frac{h^2\chi^2}{3}\right)=$$

$$-\frac{2i\omega\sigma hB_1^2}{c^2}\left(\frac{h^2r^2}{3}-\frac{2\varrho h^2}{5G'}\omega^2\right)\left(1+\frac{h}{\lambda}+\frac{h^2r^2}{3}\right). \tag{9}$$

Здесь $f^2=k_1^2+k_2^2$, $\chi^2=r^2+\dfrac{4\pi i\omega\sigma}{c^2}$ и $\omega^2c^{-2}<<r^2$.

Для простоты будем принимать $\sigma = \sigma'$ и рассматривать колебания, независящие от $y\,(k_2 = 0, k_1 = k)$. При таких ограничениях характеристические уравнения (7)–(9) представим в следующем безразмерном виде:

$$\gamma Rm \frac{\xi^5}{3\delta_1}\Omega^5 + \gamma\frac{\xi^4}{3}\Omega^4 + Rm\xi\left(\frac{1}{\delta_1}\left(1+\frac{\xi^2}{2}+\gamma\xi^2\right)+\gamma\beta_1\xi\right)\Omega^3 +$$

$$\left(1+\frac{\xi^2}{3}+\gamma\xi^2\right)\Omega^2 + Rm\xi\left(\frac{1}{\delta_1}+\frac{3\gamma\beta}{\xi^3}\left(1+\gamma\xi^2\right)\right)\Omega + 1 = 0; \qquad (10)$$

$$\gamma\frac{\xi^4}{3}\Omega^4 + \beta_3 Rm\xi^2\Omega^3 + \left(1+\frac{\xi^2}{3}+\gamma\xi^2\right)\Omega^2 + \beta_3 Rm\Omega + 1 = 0; \qquad (11)$$

$$\gamma Rm\frac{\xi^6}{9\delta}\Omega^5 + \gamma\frac{\xi^4}{3}\Omega^4 + Rm\xi^2\left(\frac{1}{3\delta}\left(1+\frac{\xi^2}{3}+\gamma\xi^2\right)+\gamma\beta_3\right)\Omega^3 +$$

$$\left(1+\frac{\xi^2}{3}+\gamma\xi^2\right)\Omega^2 + Rm\left(\frac{\xi^2}{3\delta}+\beta_3\right)\Omega + 1 = 0. \qquad (12)$$

Здесь $\Omega = \dfrac{i\omega}{\omega_0}$, $\omega_0^2 = \dfrac{Dk^4}{2\varrho h}$, ω_0 — собственная частота колебаний пластинки в отсутствие магнитного поля без учета поперечных сдвигов, $\gamma = \dfrac{2E}{5G'\left(1-v^2\right)}$ характеризирует учет поперечных сдвигов, $c_0^2 = \dfrac{E}{\varrho\left(1-v^2\right)}$, $Rm = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\dfrac{4\pi\sigma c_0 h}{c^2}$ — магнитное число Рейнольдса, $V_{Ai}^2 = \dfrac{B_i^2}{4\pi\varrho}$ — скорость распространения волн Альвена, $\beta_i = \dfrac{V_{Ai}^2}{c_0^2}$ $(i = 1,2,3)$ — величина типа магнитного давления, характеризирует интенсивность влияния магнитного поля, $\lambda = k^{-1}$, $\xi = kh$, $\delta = 1 + \xi + \dfrac{\xi^2}{3}$, $\delta_1 = 1 + \xi$.

Исследование уравнений (10)–(12) проведем с помощью асимптотического разложения искомой величины Ω по параметру Rm, пропорциональному электропроводности пластинки σ. Рассмотрим два случая, соответствующие слабопроводящим и сильнопроводящим пластинкам: $Rm < 1$ и $Rm > 1$ [8].

2. Слабопроводящие пластинки. Такие пластинки характеризируются неравенством $Rm < 1$. Искомую величину Ω представим в виде асимптотического разложения по Rm

$$\Omega = \Omega_0 + Rm\Omega_1 + Rm^2\Omega_2 + ... \qquad (13)$$

Подставляя (13) в уравнения (10)–(12) и приравнивая члены при одинаковых степенях Rm, получаем нулевые приближения при $(Rm)^0$, первые — при $(Rm)^1$ и т.д. При этом различаются два случая в зависимости от величины магнитного давления $\beta_i << 1$ и $\beta_i \approx 1$.

В нулевом приближении во всех случаях имеем

$$\gamma\frac{\xi^4}{3}\Omega_0^4 + \left(1+\frac{\xi^2}{3}+\gamma\xi^2\right)\Omega_0^2 + 1 = 0. \qquad (14)$$

В первом приближении Ω_1 будет уже зависеть от известного нулевого приближения. Отметим, что в случае сильного поперечного магнитного поля $(\beta_3 \approx 1)$ первые приближения уравнений (11) и (12) совпадают, а в случае слабого поперечного магнитного поля $(\beta_3 << 1)$ из первых приближений уравнений (11) и (12) имеем $\Omega_{1b} = \Omega_{1a} - \dfrac{\gamma\beta_3\xi^2\Omega_0^2}{2\left(2\gamma\frac{\xi^4}{3}\Omega_0^2 + \gamma\xi^2 + 1\right)}$.

3. Сильнопроводящие пластинки. В этом случае пластинки характеризуются неравенством $Rm > 1$ и искомая величина Ω представляется в виде асимптотического разложения по обратным степеням Rm

$$\Omega = \Omega_0 + Rm^{-1}\Omega_1 + Rm^{-2}\Omega_2 + \dots . \tag{15}$$

Подставляя (15) в уравнения (10)–(12) и приравнивая члены при одинаковых степенях Rm^{-1}, получаем последовательно уравнения асимптотических приближений.

Уравнения нулевого приближения, соответствующие идеальной проводимости, будут:

для продольного магнитного поля

$$\gamma\frac{\xi^4}{3}\Omega_0^4 + \left(1 + \frac{\xi^2}{3} + \gamma\xi^2 + \gamma\beta_1\delta_1\xi\right)\Omega_0^2 + \frac{3\beta_1\delta_1}{\xi^2}\left(1+\gamma\xi^2\right) + 1 = 0; \tag{16}$$

для поперечного магнитного поля

$$a)\quad \gamma\xi^2\Omega_0^2 + 1 = 0, \tag{17}$$

$$b)\quad \gamma\frac{\xi^4}{3}\Omega_0^4 + \left(1 + \frac{\xi^2}{3} + \gamma\xi^2 + 3\gamma\beta_3\delta\right)\Omega_0^2 + \frac{3\beta_3\delta}{\xi^2} + 1 = 0. \tag{18}$$

Поправка Ω_1 согласно уравнений первого приближения будет определяться выражениями:

для продольного магнитного поля

$$\Omega_1 = \frac{3\beta_1\delta_1^2}{2\xi^4}\frac{\gamma\frac{\xi^4}{3}\Omega_0^2 + \gamma\xi^2 + 1}{2\left(2\gamma\frac{\xi^4}{3}\Omega_0^2 + \gamma\xi^2 + \gamma\beta_1\delta_1\xi + \frac{\xi^2}{3} + 1\right)}; \tag{19}$$

для поперечного магнитного поля

$$a)\quad \Omega_1 = -\frac{1}{2\gamma\beta_3\xi^2}, \tag{20}$$

$$b)\quad \Omega_1 = \frac{9\beta_3\delta}{2\xi^4}\frac{\gamma\xi\Omega_0^2 + 1}{\Omega_0^2\left(2\gamma\frac{\xi^4}{3}\Omega_0^2 + \gamma\xi^2 + 3\gamma\beta_3\delta\xi^2 + \frac{\xi^2}{3} + 1\right)}. \tag{21}$$

Уравнения (16), (18), (19) и (21) упрощаются в случае $\beta_1 << 1$.

Отметим, что в случае a) для частоты поперечных колебаний пластинки, ограничиваясь первым приближением, из (17) и (20) получаем

$$\omega = \pm\frac{\omega_0}{\sqrt{\gamma}\xi} + \frac{i\omega_0}{2\gamma\beta_3 Rm\xi^2}. \tag{22}$$

Практическое значение при решении задач имеют нулевые приближения, которые существенно проще исходных уравнений. На основе уравнений идеальной проводимости решено большее число задач, а в приближении слабой проводимости получено значительно меньше решений. Если в (16) не учитывать поперечные сдвиговые деформации $\left(\gamma = 0, \xi^2 << 1\right)$, то для частоты идеально проводящей пластинки в продольном магнитном поле получим

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 + \frac{3\beta_1(\mu+\xi)}{\xi^3}, \tag{23}$$

которое соответствует уравнению, полученному на основе гипотезы недеформируемых нормалей [2].

Для частоты поперечных колебаний идеально проводящей пластинки в поперечном магнитном поле соответствующее гипотезе недеформируемых нормалей и линейного закона изменения компонент индуцированного электромагнитного поля будем иметь

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 + \frac{3\beta_3(1+\mu\xi)}{\xi^2}. \tag{24}$$

Выражение (24) аналогично выражению для частоты поперечных колебаний прямоугольной идеально-проводящей пластинки в поперечном магнитном поле, полученном в [2] с учетом влияния индуцированного электромагнитного поля. Формулы (23) и (24) показывают, что влияние магнитного поля существенно зависит от отношения толщины пластинки к длине волны (от $\xi = kh$) [4]. Поэтому следует ожидать, что для достаточно малых ξ умеренные магнитные поля могут привести к увеличению частоты колебаний пластинки в несколько раз, особенно в случае продольного магнитного поля.

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. (Прочность, устойчивость и колебания) – М.: Наука, 1987. – 360 с.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е.* Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. – М.: Наука, 1996. – 288 с.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
4. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* Колебания и устойчивость токонесущих пластин. – Изв-во АН Армении, Ереван, 1992. – 123 с.
5. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В., Саркисян С. В.* Магнитоупругие колебания пластин в продольном магнитном поле с учетом деформаций сдвига // Тр. 12–ой Всес. конф. по теории оболочек и пластин, 1. – Ереван: Изд. ЕГУ, 1980. – С. 53–59.
6. *Саркисян С. В., Погосян А. С.* Влияние индуцированного электромагнитного поля и поперечных сдвиговых деформаций на колебание проводящих пластин в поперечном магнитном поле// Изв. НАН Армении, Механика, 2000. – Т. 53. – С. 59–65.
7. *Саркисян В. С., Саркисян С. В., Джилавян С. А., Саргсян А. Л.* Исследование колебаний электропроводящих пластин в магнитном поле// Механика, Межвуз. сб. науч. трудов, Ереван. – 1991. – С. 49–60.
8. *Селезов И. Т.* Некоторые приближенные формы уравнений движения магнитоупругих сред// Изв. АН СССР, МТТ. – 1975. – № 5. – С. 86–91.

ПРО МАГНІТОПРУЖНІ КОЛИВАННЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО–ІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН ІЗ УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙ ЗСУВУ

Досліджується задача про магнітопружні коливання трансверсально–ізотропної електропровідної пластинки при наявності постійного магнітного поля із урахуванням поперечних зсувних деформацій. Розглянуто дві гіпотези про характер змінності компонент електромагнітного поля по товщині пластинки.

ABOUT MAGNETOELASTIC VIBRATIONS OF TRANSVERS–ISOTROPIC PLATES ACCORDING TO SHEAR DEFORMATION

The problem of vibration of transversally–isotropic electroconductive plate is investigated at presence of a constant magnetic field, involving cross shear deformations. For change of components of an electromagnetic field two cases are considered.

Ереванский государственный
университет, Армения

Отримано
29.11.03