УДК 517.98

А. В. Соломко, О. В. Лопушанський, С. В. Шарин

ПРО ТОПОЛОГІЧНИЙ ІЗОМОРФІЗМ АЛГЕБРИ РОЗПОДІЛІВ З НОСІЯМИ В КОНУСІ КОМУТАНТУ НАПІВГРУПИ ЗСУВІВ

Досліджуються властивості дуальної пари $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma\rangle$, асоційованої з класичною згортковою алгеброю розподілів Шварца D'_Γ з носіями в конусі $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. Визначається операція крос–кореляції відносно введеної двоїстості. Встановлюється теорема про топологічний ізоморфізм згорткової алгебри D'_Γ комутантам (C_o)–напівгрупи в алгебрі неперервних операторів $L(D_\Gamma)$ над відповідним простором основних функцій D_Γ.

Метою роботи є доведення теореми про топологічний ізоморфізм локально опуклої згорткової алгебри розподілів Шварца з носіями в конусі простору $\mathbb{R}^n$ комутанту n–параметричної напівгрупи зсувів вздовж цього конусу в алгебрі лінійних неперервних операторів над простором основних функцій до цієї згорткової алгебри. В роботі використовується стандартна термінологія з книг [3], [4].

1. Нехай дано класичну дуальну пару Шварца $\langle D'(\mathbb{R}^n),\, D(\mathbb{R}^n)\rangle$, де $D(\mathbb{R}^n)$ — простір нескінченно–диференційованих функцій з компактними носіями $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n$ та топологією рівномірної збіжності на компактах разом з усіма похідними, $D'(\mathbb{R}^n)$ — спряжений до $D(\mathbb{R}^n)$ простір лінійних неперервних функціоналів. Позначимо через Γ — довільний замкнений опуклий гострий тілесний конус в $\mathbb{R}^n$. Нехай всюди далі D'_Γ — підпростір в $D'(\mathbb{R}^n)$ тих розподілів f, носії $\operatorname{supp} f$ яких містяться в Γ. Поляра підпростору D'_Γ відносно двоїстості $\langle D'(\mathbb{R}^n),\, D(\mathbb{R}^n)\rangle$ має вигляд

$$(D'_\Gamma)^\circ = \big\{\varphi \in D(\mathbb{R}^n) :\, \operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n \backslash \Gamma\big\}.$$

Звуження білінійної форми, породженої двоїстістю $\langle D'(\mathbb{R}^n),\, D(\mathbb{R}^n)\rangle$, на прямий добуток $D'_\Gamma \times D(\mathbb{R}^n)$ є константою на довільній множині $\{(f_0, \varphi)\}$, де $f_0 \in D'_\Gamma$ — фіксований функціонал, а функція φ пробігає клас еквівалентності φ_Γ у фактор–просторі $D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^\circ$ з відповідною фактор–топологією. Отже, білінійна форма $D'_\Gamma \times D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^\circ \in \langle f, \varphi_\Gamma\rangle \to \langle f, \varphi\rangle \in \mathbb{C};\ \varphi \in \varphi_\Gamma$, індукована двоїстістю $\langle D'(\mathbb{R}^n),\, D(\mathbb{R}^n)\rangle$, ставить простори D'_Γ і $D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^\circ$ у двоїстість. Визначимо відображення

$$\varrho :\, \varphi \to \lambda_\Gamma \cdot \varphi,\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n),$$

де $\lambda_\Gamma(t) = \begin{cases} 1,\ t \in \Gamma \\ 0,\ t \notin \Gamma \end{cases}$ — характеристична функція конуса Γ, а ϱ — оператор множення на характеристичну функцію. З означення одразу випливає, що $\operatorname{Ker}\varrho = (D'_\Gamma)^\circ$, бо $\forall \varphi \in (D'_\Gamma)^\circ$, маємо $\lambda_\Gamma \cdot \varphi = 0$, оскільки $\operatorname{supp}\varphi \cap \Gamma = \varnothing$. Тому фактор–відображення реалізується формулою:

$$\varrho :\, D(\mathbb{R}^n) \in \varphi \to \varphi_\Gamma \in D_\Gamma,$$

де клас $\varphi_\Gamma = \varphi_\Gamma(t)$ залежить від змінної $t \in \Gamma$. Опишемо топологію фактор–простору D_Γ. Розглянемо довільний компакт $K \subset \Gamma$ та його відкритий ε–окіл $\mathcal{O}_{\varepsilon,K}$. Покладемо $D(\mathcal{O}_{\varepsilon,K}) = \varinjlim\limits_{S_l \subset \mathcal{O}_{\varepsilon,K}} \operatorname{ind} D_{S_l}$, де $\{S_l\}$ — напрямлена за включенням послідовність компактів така, що $\bigcup_l S_l = \mathcal{O}_{\varepsilon,K}$. При $S_l \subset S_{l+1}$

вкладення просторів Фреше $D_{S_l} \subset D_{S_{l+1}}$ — компактні. При умові $\varepsilon_{l+1} < \varepsilon_l$ звуження $D(\mathcal{O}_{\varepsilon,\,K})|_{\mathcal{O}_{\varepsilon_{l+1},\,K}} \subset D(\mathcal{O}_{\varepsilon_{l+1},\,K})$ — неперервні, тому є визначеною проективна границя $D_K = \lim\limits_{\varepsilon_l \to 0} \operatorname{pr} D(\mathcal{O}_{\varepsilon_l,\,K})$ паростків $\mathcal{C}^\infty$–функцій на компакті K. Отже,

$$D_\Gamma = \bigcup_{K \subset \Gamma} D_K \simeq \lim_{K \subset \Gamma} \operatorname{ind} D_K. \tag{1}$$

Топологія в D_Γ рівносильна секвенціальній збіжності: $(\varphi_m) \xrightarrow{D_\Gamma} \varphi_\Gamma$, якщо в довільному ε–околі $\mathcal{O}_{\varepsilon,\,K}$ довільного компакта $K \subset \Gamma$ існують представники $\{\varphi_m \in (\varphi_n)_\Gamma : \operatorname{supp} \varphi_m \subset S_l\}$ та $\{\varphi \in \varphi_\Gamma : \operatorname{supp} \varphi \subset S_l\}$ такі, що:

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{t \in S_l} |\partial^k \varphi_m - \partial^k \varphi| = 0, \ \forall\, k \in \mathbb{Z}^n_+,$$

де $\partial^k = \partial_1^{k_1} \ldots \partial_n^{k_n}$, $\partial_j^{k_j} = \dfrac{\partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}$. Справді, для довільної функції $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ виконується умова

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \,:\, \rho_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 \,:\, t \in \mathcal{O}_{\varepsilon/2,\,K} \\ 0 \,:\, t \notin \mathcal{O}_{\varepsilon,\,K} \end{cases}, \ \operatorname{supp}(\rho_\varepsilon \cdot \varphi) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon,\,K}$$

і відповідний клас еквівалентності $\varphi_\Gamma \in D_\Gamma$ можна ототожнити з паростком $\mathcal{C}^\infty$–функцій вигляду $\rho_\varepsilon \cdot \varphi$. З викладених міркувань безпосередньо випливає

Твердження 1. *Простори D_Γ і $D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^\circ$ топологічно ізоморфні і канонічна білінійна форма з $\langle D'(\mathbb{R}^n),\, D(\mathbb{R}^n)\rangle$ індукує двоїстість $\langle D'_\Gamma,\, D_\Gamma\rangle$.*

Твердження 2. *Простір D_Γ є (LF)–простором, зокрема він є борнологічним.*

Д о в е д е н н я. Нехай Γ_ν — конус, який утворюється при перетині довільного конуса Γ з кулею радіуса ν. Для кожного $\nu > 0$ простір D^ν_Γ є замкненим підпростором простору $C^\infty_{\Gamma_\nu}$ всіх нескінченно–гладких в Γ_ν функцій φ з набором півнорм $\|\varphi\|_{\nu,\,n} = \sup\limits_{t \in \Gamma_\nu} |\partial^n \varphi(t)|$. Останній є простором Фреше, отже, D^ν_Γ — простір Фреше. Те, що D_Γ є (LF)–простором, випливає з формули (1). Простори D^ν_Γ як метризовні є борнологічними, а борнологічність індуктивної границі борнологічних просторів є відомим фактом [4].

Твердження 3. *Простір D_Γ — монтелевий.*

Д о в е д е н н я. Монтелевість простору D^ν_Γ слідує з монтелевості $C^\infty_{\Gamma_\nu}$ і замкненості D^ν_Γ в $C^\infty_{\Gamma_\nu}$. Монтелевість індуктивної границі випливає з її регулярності. □

2. Нехай далі дано n–параметричну напівгрупу зсувів вздовж конуса Γ

$$\mathcal{T}_s \,:\, D(\mathbb{R}^n) \ni \varphi(t) \to \varphi(t+s) \in D(\mathbb{R}^n), \quad \forall s \in \Gamma, \quad \forall t \in \mathbb{R}^n.$$

Лема 1. *Комутативна діаграма*

$$\begin{array}{ccc} D_\Gamma & \xrightarrow{\ \mathcal{T}_s\ } & D_\Gamma \\ \varrho^{-1} \downarrow & & \varrho \uparrow \\ D(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\ \mathcal{T}_s\ } & D(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

однозначно визначає напівгрупу $T_s = \varrho \circ \mathcal{T}_s \circ \varrho^{-1} \in L(D_\Gamma)$, яка належить класу (C_o) і є одностайно неперервною над фактор–простором D_Γ.

Д о в е д е н н я. Нехай $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Зауважимо, що $\forall s \in \Gamma : t + s \in \operatorname{supp}\varphi \iff t \in \operatorname{supp}\varphi - s = \operatorname{supp}\mathcal{T}_s\varphi$. Тобто, $\operatorname{supp}\mathcal{T}_s\varphi$ є зсувом компакту і тому є компактом. Диференціюючи по t, маємо $\partial^k\mathcal{T}_s\varphi(t) = \mathcal{T}_s\partial^k\varphi(t)$. З неперервності функції $\mathbb{R}^n \ni t \longrightarrow \mathcal{T}_s\partial^k\varphi(t)$ випливає неперервність функції $\mathbb{R}^n \ni t \longrightarrow \partial^k\mathcal{T}_s\varphi(t)$, $\forall k \in \mathbb{Z}^n_+$ та $\forall s \in \Gamma$. Тому, $\mathcal{T}_s\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, $\forall s \in \Gamma$.

Покажемо, що $\mathcal{T}_s : \operatorname{Ker}\varrho \to \operatorname{Ker}\varrho$. Якщо $\psi \in \operatorname{Ker}\varrho$, то $\operatorname{supp}\psi \in \mathbb{R}^n\backslash\Gamma$. Тому, $\forall s \in \Gamma, \forall\tau \in \operatorname{supp}\psi \subset \mathbb{R}^n\backslash\Gamma, \exists t \in \operatorname{supp}\psi - s$, таке, що $t = \tau - s$ або $t \in -\Gamma + \tau$, тобто t належить від'ємному конусу з вершиною в точці $\tau \in \mathbb{R}^n\backslash\Gamma$. Але $(-\Gamma+\tau)\cap\Gamma = \varnothing$ при $\tau \in \mathbb{R}^n\backslash\Gamma$, тому $t \in \mathbb{R}^n\backslash\Gamma$. Отже, $\operatorname{supp}\mathcal{T}_s\psi \in \mathbb{R}^n\backslash\Gamma$, тому $\mathcal{T}_s\psi \in \operatorname{Ker}\varrho$, $\forall s \in \Gamma$.

Довільний елемент φ_Γ в D_Γ однозначно визначається множиною елементів $\{\varphi+\psi : \psi \in \operatorname{Ker}\varrho\}$, де $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ — фіксована функція. З попередніх міркувань випливає, що $\varrho(\mathcal{T}_s(\varphi+\psi)) = \varrho(\mathcal{T}_s\varphi + \mathcal{T}_s\psi) = \varrho(\mathcal{T}_s\varphi) = T_s\varphi_\Gamma \in D_\Gamma$. Отже, діаграма комутативна і відображення T_s є визначеним $\forall s \in \Gamma$.

Оскільки фактор–відображення ϱ є неперервним та відкритим одночасно, то для доведення сильної неперервності відображення $\Gamma \ni s \to T_s$ над D_Γ достатньо довести сильну неперервність відображення $\Gamma \ni s \to \mathcal{T}_s$ над $D(\mathbb{R}^n)$. Нехай в $D(\mathbb{R}^n)$ маємо $\varphi_m \to 0$ при $m \to \infty$, тобто існує компакт K в $D(\mathbb{R}^n)$ такий, що $\operatorname{supp}\varphi_m \subset K$ і $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{t\in K}|\partial^k\varphi_m(t)| = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}^n_+$. Тоді $\forall s \in \Gamma$ одержимо $\operatorname{supp}\mathcal{T}_s\varphi_m \subset K - s$ і $\sup\limits_{t\in K-s}|\partial^k\mathcal{T}_s\varphi_m(t)| = \sup\limits_{t\in K-s}|\mathcal{T}_s\partial^k\varphi_m(t)| = \sup\limits_{t\in K}|\partial^k\varphi_m(t)| \to 0$ при $m \to \infty$ і напівгрупа $\mathcal{T}_s$ є класу (C_o).

Оскільки простір $D(\mathbb{R}^n)$ — бочковий [3], то для одностайної неперервності напівгрупи $\mathcal{T}_s$ вистачить перевірити її поточкову обмеженість. Остання випливає з рівностей $\sup\limits_{s\in\Gamma}\sup\limits_{t\in K-s}|\partial^k\mathcal{T}_s\varphi(t)| = \sup\limits_{s\in\Gamma}\sup\limits_{t\in K}|\partial^k\varphi(t)| = \sup\limits_{t\in K}|\partial^k\varphi(t)|$ для всіх $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. □

Означення 1. *Для довільного розподілу $f \in D'_\Gamma$ та функції $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ визначимо операцію крос–кореляції*

$$(f \star \varphi)(t) = \langle f(s), \mathcal{T}_s\varphi(t)\rangle = (\mathcal{M}_f\varphi)(t), \forall s \in \Gamma, \forall t \in \mathbb{R}^n.$$

Зауважимо, що для фіксованого $t \in \mathbb{R}^n$ функція $\varphi_t(s) = \mathcal{T}_s\varphi(t)$ є визначеною в конусі Γ і належить простору D, тому форма $\langle f(s), \psi_t(s)\rangle$ є визначеною.

Лема 2. *Для будь–якого розподілу $f \in D'_\Gamma$ комутативна діаграма*

$$\begin{array}{ccc} D_\Gamma & \xrightarrow{M_f} & D_\Gamma \\ \varrho^{-1}\downarrow & & \varrho\uparrow \\ D(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{M}_f} & D(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

однозначно визначає оператор $M_f = \varrho \circ \mathcal{M}_f \circ \varrho^{-1} \in L(D_\Gamma)$.

Д о в е д е н н я. Для будь–якої функції $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ маємо $f\star\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Це випливає з рівностей $\partial^k(f \star \varphi) = f \star \partial^k\varphi, \forall k \in \mathbb{Z}^n_+$, та неперервності форми f. Покажемо за аналогією до попередньої леми, що $\mathcal{M}_f : \operatorname{Ker}\varrho \to \operatorname{Ker}\varrho$. Нехай $\psi \in \operatorname{Ker}\varrho$, тобто $\operatorname{supp}\psi \in \mathbb{R}^n\backslash\Gamma$. Оскільки $\operatorname{supp}(f\star\psi) \subset \operatorname{supp}\psi - \operatorname{supp}f$, то маємо включення $\operatorname{supp}(f\star\psi) \subset -\Gamma + \operatorname{supp}\psi$. З того, що $\operatorname{supp}\psi \in \mathbb{R}^n\backslash\Gamma$ і $(-\Gamma + \mathbb{R}^n\backslash\Gamma)\cap\Gamma = \varnothing$, випливає $f\star\psi \in \operatorname{Ker}\varrho$. Отже, відображення $\mathcal{M}_f : \varphi + \operatorname{Ker}\varrho \to (f\star\varphi) + \operatorname{Ker}\varrho, \forall\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ є визначеним. Покажемо, що клас еквівалентності $(f\star\varphi) + \operatorname{Ker}\varrho$ має представника з простору $D(\mathbb{R}^n)$. Оскільки

$\varrho(f\star\varphi) = \lambda_\Gamma(f\star\varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ і $\operatorname{supp}\lambda_\Gamma(f\star\varphi) = (\operatorname{supp}\varphi - \operatorname{supp} f)\cap\Gamma$ — компакт, то $\lambda_\Gamma(f\star\varphi)\in D_\Gamma$.

Залишилось показати, що відображення M_f неперервне відносно секвенціальної збіжності. Для цього достатньо довести неперервність відображення $\mathcal{M}_f$. Нехай в $D(\mathbb{R}^n)$ маємо $\varphi_m \to 0$ при $m\to\infty$, тобто існує компакт K в $\mathbb{R}^n$ такий, що $\operatorname{supp}\varphi_m \subset K$ і $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{t\in K}|\partial^k\varphi_m(t)| = 0$, $\forall k\in\mathbb{Z}^n_+$. Тоді $\forall s\in\Gamma$ маємо $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{t\in K}|\partial^k\mathcal{M}_f\varphi_m(t)| = \lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{t\in K}|(f\star\partial^k\varphi_m)(t)| = |\langle f(s),$ $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{t\in K}\mathcal{T}_s\partial^k\varphi_m(t)\rangle| = 0$, бо f — лінійний і неперервний функціонал над простором D_Γ. Лему доведено. □

Розглянемо згорткову алгебру D'_Γ і алгебру $L(D_\Gamma)$ лінійних неперервних відображень над простором D_Γ. Нехай в кожній з них введено топологію рівномірної збіжності на опуклих компактах, тоді справедливою є наступна теорема, яка є основним результатом даної роботи.

Теорема. *Відображення*

$$D'_\Gamma \ni f \to M_f \in L(D_\Gamma)$$

здійснює топологічний ізоморфізм згорткової алгебри розподілів D'_Γ на комутант напівгрупи T_s в алгебрі $L(D_\Gamma)$. Зокрема, для будь–яких розподілів $f,g\in D'_\Gamma$ маємо

$$M_{f*g} = M_f\circ M_g, \qquad M_\delta = I,$$

де δ — функція Дірака, I — одиничний оператор в $L(D_\Gamma)$, $*$ — згортка.

Д о в е д е н н я. Нехай $f\in D'_\Gamma$, $\varphi_\Gamma\in D_\Gamma$ і $(M_f\varphi_\Gamma)(t) = \langle f(s),\, T_s\varphi_\Gamma(t)\rangle$, $\forall s,t\in\Gamma$. Справедливі рівності $(M_fT_r\varphi_\Gamma)(t) = \langle f(s),\, T_r\circ T_s\varphi_\Gamma(t)\rangle = \langle f(s),\, T_s\circ T_r\varphi_\Gamma(t)\rangle = \langle f(s),\, T_s\varphi_\Gamma(t+r)\rangle = (T_rM_f\varphi_\Gamma)(t)$, бо $T_r\lambda_\Gamma = \lambda_\Gamma$, $\forall r\in\Gamma$, тобто характеристична функція конуса є нерухомою точкою напівгрупи зсуву вздовж нього.

Навпаки, нехай оператор $M\in L(D_\Gamma)$ задовольняє умові $(MT_s)\varphi_\Gamma = (T_sM)\varphi_\Gamma$, $\forall\varphi_\Gamma\in D_\Gamma, \forall s\in\Gamma$. Розглянемо неперервну лінійну форму вигляду $M\varphi_\Gamma(0) = \langle f,\, \varphi_\Gamma\rangle$. Замінюючи в ній φ_Γ на $T_s\varphi_\Gamma$, отримаємо $\langle f(s),\, T_s\varphi_\Gamma(t)\rangle = \langle f(s),\, T_t\varphi_\Gamma(s)\rangle = (MT_t\varphi_\Gamma)(0) = (M\varphi_\Gamma)(t), \forall t\in\Gamma$.

Оскільки простори D^ν_Γ є інваріантними відносно дії операторів M_f алгебри $L(D_\Gamma)$ і множина всіх таких операторів утворює підалгебру алгебри $L(D_\Gamma)$, яку позначимо $[T_s]^c$, то $[T_s]^c$ належить проективній границі $\lim\limits_{\nu\to\infty}\operatorname{pr} L(D^\nu_\Gamma)$, де в просторах $L(D^\nu_\Gamma)$ задано топології рівномірної збіжності на компактах. Проективна границя ізоморфно вкладається в $L(D_\Gamma)$, тому до M_f можна застосувати теорему про відкрите відображення [2]. Отже, відображення M_f здійснює топологічний ізоморфізм.

Залишилось довести, що M_f є гомоморфізмом алгебр. Розпишемо:

$$(M_{f*g}\varphi_\Gamma)(t) = \langle (f*g)(s),\, T_s\varphi_\Gamma(t)\rangle = \langle f(s), \xi(s)\langle g(p),\, \eta(p)\varphi_\Gamma(s+t+p)\rangle\rangle =$$

$$\langle f(s),\, \xi(s)(M_g\varphi_\Gamma(s+t))\rangle = ((M_f\circ M_g)\varphi_\Gamma)(t),$$

тут функції $\xi(s)$ і $\eta(p)$ — довільні безмежно гладкі, які рівні одиниці відповідно в носіях $\operatorname{supp} f$ та $\operatorname{supp} g$ і нулю поза межами деякого околу носія. Маємо $(M_\delta\varphi_\Gamma)(t) = \langle\delta(s),\, T_s\varphi_\Gamma(t)\rangle = \langle\delta(s),\, \varphi_\Gamma(t+s)\rangle = \varphi_\Gamma(t)$, звідси $M_\delta = I$. Теорему доведено. □

Означення 2. *Операція крос–кореляції розподілу з основною функцією визначається рівностями:*

$$M_f\varphi_\Gamma = \lambda_\Gamma\langle f(s),\, \mathcal{T}_s\varphi\rangle = \langle f(s),\, T_s\varphi_\Gamma\rangle, \quad \varphi\in D(\mathbb{R}^n), \quad f\in D'_\Gamma.$$

Твердження 4. *Операція крос–кореляції має наступні властивості:*
1) $M_{f*g} = M_f \circ M_g$, $M_\delta = I$;
2) $\partial^k(M_f\varphi_\Gamma) = M_f\partial^k\varphi_\Gamma = (-1)^{|k|}M_{\partial^k f}\varphi_\Gamma$;
3) $M_{\partial^k f} \circ M_g = M_f \circ M_{\partial^k g}$.

Д о в е д е н н я. Перша властивість вже доведена в попередній теоремі. Для другої, маємо

$$\partial^k(M_f\varphi_\Gamma) = \partial^k\langle f(s), T_s\varphi_\Gamma\rangle = \partial^k(\lambda_\Gamma\langle f(s), \mathcal{T}_s\varphi\rangle) =$$
$$\lambda_\Gamma\langle f(s), \partial^k\mathcal{T}_s\varphi\rangle = \lambda_\Gamma\langle f(s), \mathcal{T}_s\partial^k\varphi\rangle = \langle f(s), T_s\partial^k\varphi_\Gamma\rangle = M_f\partial^k\varphi_\Gamma.$$

З іншого боку,

$$M_f\partial^k\varphi_\Gamma = \langle f(s), T_s\partial^k\varphi_\Gamma\rangle =$$
$$\langle f(s), \partial^k T_s\varphi_\Gamma\rangle = (-1)^{|k|}\langle\partial^k f(s), T_s\varphi_\Gamma\rangle = (-1)^{|k|}M_{\partial^k f}\varphi_\Gamma.$$

Отже, другу властивість також доведено. Використовуючи те, що $M_{f*g} = M_f \circ M_g$, ми можемо записати

$$M_\partial^k f \circ M_g = M_{f*\partial^k g} = M_f \circ M_{\partial^k g}, \forall k \in \mathbb{Z}_+^n,$$

звідки і випливає правильність останньої рівності. □

1. *Лопушанський О.* Локально опуклі алгебри I. Борнологічні властивості// Препринт 4–93. – Львів: ІППММ, 1993. – 55 с.
2. *Райков Д.* Двусторонняя теорема о замкнутом графике для топологических линейных пространств // Сиб. мат. ж. – 1966. – 7, № 2. – С. 353–372.
3. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. – Москва: Мир, 1967. – 257 с.
4. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – Москва: Мир, 1971. – 360 с.

О ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ИЗОМОРФИЗМЕ АЛГЕБРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С НОСИТЕЛЯМИ В КОНУСЕ КОММУТАНТА ПОЛУГРУППЫ СДВИГОВ

Исследуются свойства дуальной пары $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma\rangle$, ассоциированной с классической свёрточной алгеброй распределений Шварца D'_Γ с носителями в конусе $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. Определяется операция кросс–корелляции относительно построенной двойственности. Доказывается теорема о топологическом изоморфизме свёрточной алгебры D'_Γ коммутантам (C_o) -полугруппы в алгебре непрерывных операторов $L(D_\Gamma)$ над соответствующим пространством основных функций D_Γ.

ON TOPOLOGICAL ISOMORPHISM OF DISTRIBUTIONS ALGEBRA WITH SUPPORTS IN CONE TO COMMUTANT OF SHIFT SEMIGROUP

Properties of dual pair $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma\rangle$ associated with classical convolution algebra of Schwartz distributions with supports in a cone $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ are investigated. The operation of cross–corellation with respect to constructed duality is defined. The theorem about topological isomorphism of the convolution algebra D'_Γ to commutant of the (C_o) –semigroup in algebra $L(D_\Gamma)$ on the corresponding space of test functions is proved.

Прикарпатський університет
ім. В. Стефаника, Івано–Франківськ,
Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Отримано
01.09.03