УДК 517.5

О. Б. Скасків, О. М. Трусевич, І. Б. Киричинська

ПРО СУМУ І МАКСИМАЛЬНИЙ ЧЛЕН РЯДІВ, ПОДІБНИХ ДО РЯДІВ ТЕЙЛОРА–ДІРІХЛЕ

Встановлюються умови, за виконання яких для додатних рядів вигляду $F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{\lambda_nx+\tau(x)\beta_n}$ *справджується при* $x\to+\infty$ *зовні деякої виняткової множини співвідношення* $F(x)=(1+o(1))\max\{a_ne^{\lambda_nx+\tau(x)\beta_n}:\ n\ge0\}$*, де* τ *— додатна на* $[0;+\infty)$ *функція, а* λ_n *і* β_n *— невід'ємні послідовності.*

Для цілих функцій, зображуваних лакунарними степеневими рядами

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^{\lambda_n},\quad \lambda_n\in\mathbb{N}\ (n\ge1),\tag{1}$$

відомо, що умова [7]

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}<+\infty$$

забезпечує справедливість співвідношень

$$M_f(r)=(1+o(1))m_f(r),\quad M_f(r)=(1+o(1))\mu_f(r)\tag{2}$$

при $r\to+\infty$ зовні деякої множини E скінченної логарифмічної міри (тобто, $\int_{E\cap[1;+\infty)}d\ln r<+\infty$), де $M_f(r)=\max\{|f(z)|:\ |z|=r\}$, $m_f(r)=\min\{|f(z)|:\ |z|=r\}$, $\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^{\lambda_n}:\ n\ge0\}$. Якщо ціла функція f вигляду (1) має скінченний порядок і виконується умова

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{\ln R}\sum_{\lambda_n<R}\frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}=0,$$

то [7] співвідношення (2) виконуються при $R\to+\infty$ зовні деякої множини E нульової логарифмічної щільності. В [2,5] подібні твердження встановлюються в класі цілих функцій F, зображуваних абсолютно збіжними рядами Діріхле

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n},\ 0\le\lambda_0<\lambda_n\uparrow+\infty\ (1\le n\to+\infty),$$

а в [1, 4] для додатних рядів вигляду

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n},\ a_n\ge0\ (n\ge0),\tag{3}$$

де $\lambda=(\lambda_n)$, $\beta=(\beta_n)$ — невід'ємні послідовності, $\tau(x)$ — додатна неспадна на $[0;+\infty)$ функція.

При цьому в [1] за умови (1) доведено, що

$$F(x)=(1+o(1))\mu(x,F)\tag{4}$$

 ISSN 0130-9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2004. – 47, № 2. – С. 90-94.

при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри Лебега, а в [4] це ж твердження доведено за додаткового обмеження, що функція $\tau(x)$ є диференційовною і $\tau'(x) \geq 1 \quad (x > 0)$, і, що виконується умова

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} + \beta_{n+1} - \lambda_n - \beta_n} < +\infty \tag{5}$$

у випадку, коли послідовність $\alpha = (\lambda_n + \beta_n)$ — зростаюча і $\beta = (\beta_n)$ — неспадна. При цьому, як і в [2], встановлюється і необхідність умов (1) та (5).

У цій роботі, відмовившись від умови (5), встановимо умови справедливості співвідношення (4) у підкласі функцій вигляду (3), коефіцієнти яких задовольняють умову

$$a_n \leq \exp\{-(\lambda_n + \beta_n)\psi(\lambda_n)\} \quad (n \geq n_0), \tag{6}$$

де ψ — додатна неспадна на $[0; +\infty)$ функція.

Теорема. *Нехай функція $\tau(x)$ така, що $\tau(x) \leq x \quad (x > 0)$, послідовності λ, β неспадні, а функція ψ така, що $\overline{\lim\limits_{t \to +\infty}} \ln \psi(t)/\ln t < 1$. Якщо для функції вигляду (3) виконуються умови (6) і*

$$(\forall b > 0): \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\psi(bt)} \sum_{\lambda_n < t} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0, \tag{7}$$

то співвідношення (4) справджується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E нульової лінійної щільності, тобто

$$DE = \overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{1}{x} meas(E \cap [0; x]) = 0.$$

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що $\nu(R) = \max\{n : \ a_n e^{R\lambda_n + \tau(R)\beta_n} = \mu(R, F)\}$ неспадна кусково–стала функція.

Нам потрібна наступна лема, яка є варіантом леми 2 [3] і доводиться подібно.

Лема. *Нехай $\nu(x)$ довільна неспадна східчаста функція, що набуває натуральних значень при $x \in \mathbb{R}_+$. Якщо (ε_k), $\varepsilon_k \leq 0 \quad (k \leq 1)$ — довільна послідовність, то рівності*

$$\nu(x + \varepsilon_{\nu(x)}) = \nu(x), \quad \nu(x - \varepsilon_{\nu(x)}) = \nu(x) \tag{8}$$

виконуються для всіх $x \in [0; +\infty) \setminus E$, де E — деяка множина, для Лебегової міри якої виконується

$$meas(E \cap [0; R]) = \int\limits_{E \cap [0; R]} dx \leq c + 2 \sum_{n=1}^{\nu(R-0)} \varepsilon_n, \tag{9}$$

а $c \geq 0$ стала, залежна лише від функції $\nu(x)$.

Визначимо тепер (див. [5,6]) $q(k) = n(2\lambda_k) - 1, \ \ n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leq t} 1$, а також

$$\delta(l, j) = (j - l + 1)^{-3/2} \sum_{m=l}^{j} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)^{-1},$$

$$\delta_k = \max\{\delta(l,j):\ 0 \le l \le k-1 \le j \le q(k)\}.$$

В [6] доведено, що з умови (7) випливає існування послідовності $c_n \uparrow +\infty$ ($n \to +\infty$), для якої

$$\frac{1}{\psi(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_k = o(1) \quad (n \to +\infty). \tag{10}$$

Застосовуючи лему до центрального індексу $\nu(x)$ функції $F(x)$ з $\varepsilon_k = c_k\delta_k$, ми отримаємо, що рівності (8) виконуються для всіх $x \in [0;+\infty) \setminus E$, де E — деяка множина, для якої виконується (9).

Оскільки для всіх досить великих R

$$0 \le \ln \mu(R) \le (R - \psi(\lambda_{\nu(R)}))(\lambda_{\nu(R)} + \beta_{\nu(R)}),$$

то $R \ge \psi(\lambda_{\nu(R)})$ і, отже, із нерівності (9) за співвідношенням (10) отримуємо

$$DE \le \varlimsup_{R\to+\infty} \frac{2}{R} \sum_{k=1}^{\nu(R)} \varepsilon_k \le \varlimsup_{R\to+\infty} \frac{2}{\psi(\lambda_{\nu(R)})} \sum_{k=1}^{\nu(R)} \varepsilon_k = 0,$$

тобто $DE = 0$.

З рівностей (8) при $x \notin E$ маємо для $\nu = \nu(x)$

$$a_n e^{(x\pm\varepsilon_\nu)\lambda_n + \tau(x\pm\varepsilon_\nu)\beta_n} \le \mu(x \pm \varepsilon_\nu, F) =$$

$$a_\nu e^{(x\pm\varepsilon_\nu)\lambda_\nu + \tau((x\pm\varepsilon_\nu)\beta_\nu)} = \mu(x,F) e^{\pm\varepsilon_\nu\lambda_\nu + (\tau(x\pm\varepsilon_\nu) - \tau(x))\beta_\nu},$$

звідки

$$a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} \le \mu(x,F) e^{\pm\varepsilon_\nu(\lambda_\nu - \lambda_n) + (\tau(x\pm\varepsilon_\nu - \tau(x))(\beta_\nu - \beta_n)}.$$

Залишається зауважити, що $(\tau(x - \varepsilon_\nu - \tau(x))(\beta_\nu - \beta_n) \le 0 \quad (n < \nu)$ і $(\tau(x + \varepsilon_\nu - \tau(x))(\beta_\nu - \beta_n) \ge 0 \quad (n > \nu)$, тому для всіх $x \notin E$ і $n \ge 0$

$$a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} \le \mu(x,F) e^{-\varepsilon_\nu|\lambda_\nu - \lambda_n|}. \tag{11}$$

Відзначимо тепер, що [5,6]

$$\sum_{n=0}^{q(\nu)} e^{-\varepsilon_\nu|\lambda_\nu - \lambda_n|} = 1 + o(1) \quad (\nu \to +\infty). \tag{12}$$

З іншого боку, з умови (7), за нерівністю Коші–Буняковського

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \ge \frac{n^2}{\lambda_n - \lambda_0}$$

і умовою $\varlimsup_{t\to+\infty} \ln\psi(t)/\ln t < 1$, отримуємо, що для деякого $\theta \in (0;1)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n^\theta} < +\infty. \tag{13}$$

Виберемо $\varepsilon_n = \lambda_n^{-\theta}$ і застосуємо лему. Повторюючи проведені вище міркування, отримаємо, що нерівність (11) з $\varepsilon_\nu = \lambda_\nu^{-\theta}$ виконується для всіх $n \ge 0$ і $x \notin E_1$, де E_1 — деяка множина скінченної міри.

Зауважимо тепер, що

$$\sum_{n=q(\nu)+1}^{+\infty} e^{-\lambda_\nu^{-\theta}|\lambda_\nu-\lambda_n|} \le \int\limits_{2\lambda_\nu}^{+\infty} e^{-\lambda_\nu^{-\theta}(t-\lambda_\nu)} dn(t) =$$

$$-n(2\lambda_\nu)e^{-\lambda_\nu^{1-\theta}} + \lambda_\nu^{-\theta} \int\limits_{2\lambda_\nu}^{+\infty} n(t) e^{-\lambda_\nu^{-\theta}(t-\lambda_\nu)} dt, \tag{14}$$

при цьому ми скористались співвідношенням $n(t) = o(t^\theta)$ $(t \to +\infty)$. При $\nu \to +\infty$

$$\sum_{n=q(\nu)+1}^{+\infty} e^{-\lambda_\nu^{-\theta}|\lambda_\nu-\lambda_n|} = o(1)\lambda_\nu^{-\theta} \int\limits_{2\lambda_\nu}^{+\infty} e^{\theta \ln t - \lambda_\nu^{-\theta}(t-\lambda_\nu)} dt \le$$

$$o(1)\lambda_\nu^{-\theta} \exp(\max\{h(t) :\ t \ge 2\lambda_\nu\}) \int\limits_{2\lambda_\nu}^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\eta}},$$

де $h(t) = \theta_1 \ln t - \lambda_\nu^{-\theta}(t-\lambda_\nu)$, $\theta_1 = \theta + 1 + \eta$. Оскільки $h'(t) < 0$ для всіх $t > 2\lambda_\nu$ при $\nu \to +\infty$, то з (11) (для $\varepsilon = \lambda_\nu^{-\theta}$) і (14) при $x \to +\infty$ $(x \notin E_1)$ отримуємо

$$\sum_{n=q(\nu)+1}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} = o(\mu(x, F)),$$

що разом з нерівностями (12) і (11) (для $\varepsilon_\nu = c_\nu \delta_\nu$) дає

$$F(x) \le (1 + o(1))\mu(x, F)$$

при $x \to +\infty$ $(x \notin E \cup E_1)$. Залишилось зауважити, що $D(E \cup E_1) = 0$. Теорему доведено.

У випадку, коли $\tau(x) \ge x$ $(x > 0)$ твердження теореми можна переформулювати у наступний спосіб.

Наслідок 1. *Нехай функція* τ *така, що* $\tau(x) \ge x$ $(x > 0)$, *послідовності* λ, β *неспадні, а функція* ψ *така, що* $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \ln\psi(t)/\ln t < 1$. *Якщо для функції* F *вигляду* (3) *виконуються умови*

$$a_n \le \exp\{-(\lambda_n + \beta_n)\psi(\beta_n)\} \quad (n \ge n_0),$$

$$(\forall b > 0) : \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\psi(bt)} \sum_{\beta_n < t} \frac{1}{\beta_{n+1} - \beta_n} = 0,$$

то співвідношення (4) *справджується при* $x \to +\infty$ *зовні деякої множини* E *такої, що*

$$D_\tau E = \overline{\lim_{R\to+\infty}} \frac{1}{\tau(R)} \int\limits_{E\cap[0;R]} d\tau(x) = 0.$$

Для того, щоб отримати твердження наслідку, досить застосувати теорему до функції $F_1(x) = F(\tau^{-1}(x))$, де τ^{-1} обернена функція до функції τ.

Твердження теореми є непокращуваним у наступному сенсі.

Нехай $S(\lambda, \beta, \tau)$ — клас збіжних для всіх $x \geq 0$ рядів вигляду (3), $S_\psi(\lambda, \beta, \tau)$ — його підклас, у який входять функції F, для яких виконується (6), а

$$S_\psi(\lambda, \tau) = \bigcup_\beta S_\psi(\lambda, \beta, \tau),$$

де об'єднання береться за всіма неспадними невід'ємними послідовностями β.

Наслідок 2. *Для того, щоб для кожної функції $F \in S_\psi(\lambda, \tau)$ співвідношення* (4) *виконувалось при $x \to +\infty$ зовні деякої множини нульової лінійної щільності, необхідно і досить, щоб виконувалась умова* (7).

Достатність отримуємо з доведеної тут теореми, а необхідність отримуємо з теореми, доведеної в [6], якщо вибрати $\beta_n = 0 \ \ (n \geq 0)$.

1. *Величко С. Д., Скасків О. Б.* Асимптотичні властивості одного класу функціональних рядів// Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1989. – Вип.32. – С. 50–51.
2. *Скасків О. Б.* Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле// Доп. АН УРСР, сер. А. – 1984. – № 11. – С. 22–24.
3. *Скаскив О. Б.* О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей// Мат. заметки. – 1994. – Т.56, № 5. – С. 117–128.
4. *Скасків О. Б., Трусевич О. М.* Максимальний член і сума регулярно збіжного функціонального ряду// Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.49. – С. 75–79.
5. *Скаскив О. Б., Шеремета М. Н.* Об асимптотическом поведении целых рядов Дирихле// Матем. сб. – 1986. – Т.131, № 3(11). – С. 385–402.
6. *Шеремета М. Н., Скаскив О. Б.* Об асимптотическом поведении целых рядов Дирихле// Исследов. по комплексн. анализу. Межвуз. науч. сб. – Уфа: БФ АН СССР, 1987. – С. 206–217.
7. *Fenton P. C.* The minimum modulus of gap power series// Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1978. – V.21. – P. 49–54.

О СУММЕ И МАКСИМАЛЬНОМ ЧЛЕНЕ РЯДОВ, ПОДОБНЫХ РЯДУ ТЕЙЛОРА–ДИРИХЛЕ

Устанавливаются условия, при выполнении которых для положительных рядов вида $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{\lambda_n x + \tau(x)\beta_n}$ *имеет место при $x \to +\infty$ вне некоторого исключительного множества соотношение* $F(x) = (1 + o(1)) \max\{a_n e^{\lambda_n x + \tau(x)\beta_n} : n \geq 0\}$, *где τ — положительная на $[0; +\infty)$ функция, а λ_n и β_n — неотрицательные последовательности.*

ABOUT A SUM AND MAXIMUM TERM OF SERIES SIMILAR TO THE TAYLOR–DIRICHLET SERIES

We establish conditions under which for positive series of the form $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{\lambda_n x + \tau(x)\beta_n}$ *relation* $F(x) = (1 + o(1)) \max\{a_n e^{\lambda_n x + \tau(x)\beta_n} : \ n \geq 0\}$ *as* $x \to +\infty$ *outside some exceptional set hold, where τ be a positive on $[0; +\infty)$ function, λ_n and β_n are positive sequences.*

Львівський національний
університет ім. І. Франка,
Львівський пожежний інститут,
Національний університет
„Львівська політехніка"

Отримано
26.06.03