УДК 517.98

М. А. Митрофанов

УЗАГАЛЬНЕНІ ФУНКЦІЇ НА КУБІ ГІЛЬБЕРТОВОГО ПРОСТОРУ

Побудовано простір узагальнених функцій на кубі дійсного нескінченновимірного гільбертового простору. Визначено операції множення узагальненої функції на основну та диференціювання узагальненої функції.

Вступ. Нехай E — дійсний гільбертів простір з ортонормованим базисом $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ та скалярним добутком $(\cdot|\cdot)$. Позначимо через I^∞ підмножину векторів $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ таких, що $|x_i| < 1$. Легко бачити, що I^∞ — необмежена область в просторі E, яка природно ототожнюється з ℓ_2. Ми будемо називати цю множину кубом в гільбертовому просторі. Також ми будемо розглядати підпростори послідовностей $\ell_1 \subset \ell_2$ та $\ell_\infty \subset \ell_2$. Позначимо через T^∞ множину $\left\{ x = \sum x_i e_i \in \ell_\infty \ : \ |x_i| = 1 \right\}$.

Теорія узагальнених функцій від скінченної кількості змінних є добре розвиненою. У статті, в основному, використовуються результати з [2]. На основі підходу з [1] у [7] введено і досліджено узагальнені функції на нескінченновимірному гільбертовому просторі.

У роботах [5], [10], [4] досліджувались простори Харді аналітичних функцій на полідиску нескінченновимірного гільбертового простору. Простори аналітичних функцій на одиничній кулі гільбертового простору вивчались в [3], [9], [8].

Метою цієї статті є побудова простору узагальнених функцій на кубі дійсного гільбертового простору, як спряженого до простору слабко неперервних нескінченно диференційованих функцій, обмежених на I^∞. У роботі також введено основні операції над узагальненими функціями: множення на основну та диференціювання.

1. Побудова простору основних функцій. Нам потрібно буде наступне означення з теорії поліноміальних відображень на банахових просторах. Детальний виклад цієї теорії міститься, наприклад, в [6].

Означення 1. Поліном p називається гільбертовим n — однорідним поліномом на E, якщо він має вигляд $p(x) = \sum_{(i)\in J_n} a_{(i)} (x|e_{i_1}) \ldots (x|e_{i_n})$, де $\sum_{(i)\in J_n} |a_{(i)}| < \infty$, $(i) = (i_1, \ldots, i_n)$ — мультиіндекс, а J_n — множина таких мультиіндексів $(i) = (i_1, \ldots, i_n)$, що $i_1 \le \ldots \le i_n$.

Множину всіх гільбертових поліномів на E позначимо через $P_h(E)$.

Нехай $\bigotimes_{h,s}^n E$ — симетричний тензорний добуток Гільберта–Шмідта простору E на себе n разів. Відомо, що $\bigotimes_{h,s}^n E$ є гільбертовим простором і простір $P_h({}^nE)$ є спряженим до $\bigotimes_{h,s}^n E$. Тобто, за теремою Ріса, для довільного полінома $p \in P_h({}^nE)$ існує такий $w \in \bigotimes_{h,s}^n E$, $w = \sum_{(i)} a_{(i)} e_{(i)}$, що $p(x) = \langle x^{\otimes n} | w \rangle$, де $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ — скалярний добуток в $\bigotimes_{h,s}^n E$ (детальніше див. [9]).

ISSN 0130-9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2004. – 47, № 2. – С. 73-77.

Твердження 1. *Гільбертів поліном* p *є обмеженим на* I^{∞} *тоді, і тільки тоді, коли* $\sum_{(i)\in J_n}|a_{(i)}|<\infty$, *тобто послідовність* $\{a_{(i)}\}$ *належить до простору* ℓ_1 .

Д о в е д е н н я. Якщо $\{a_{(i)}\}\in\ell_1$, то оцінимо гільбертів поліном $|p(x)|=|\langle x^{\otimes n}|w\rangle|$, де $x^{\otimes n}=\sum_{(i)}x_{(i)}e_{(i)}$, а $w=\sum_{(i)}a_{(i)}e_{(i)}$, тоді $|\langle x^{\otimes n}|w\rangle|=\Big|\sum_{(i)}x_{(i)}a_{(i)}\Big|\le\sum_{(i)}|a_{(i)}|$, бо $|x_{(i)}|<1$, за умовою $\sum_{(i)}|a_{(i)}|<\infty$, отже, $p(x)$ — обмежений.

Зауважимо, що, згідно із означенням, значення гільбертового поліному не залежить від порядку сумування. Якщо ряд $\sum_{(i)\in J_n}a_{(i)}$ збігається умовно, то змінивши порядок сумування можна вважати, що $\sum_{(i)}a_{(i)}=\infty$. Нехай $w=\sum_{(i)}a_{(i)}e_{(i)}$, $a_{(i)}e_{(i)}\notin\ell_1$, тобто $\sum_{(i)}|a_{(i)}|=\infty$ і згідно з зауваженим вище $\sum_{(i)}a_{(i)}=\infty$. Візьмемо послідовність

$$x^k=\Big(\underbrace{1-1/k,\dots,1-1/k}_{k},0\dots\Big),\quad k\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

Тоді

$$p(x)=\Big\langle (x^k)^{\otimes n}\Big|\,w\Big\rangle=\sum_{(i)\in I_1}\Big\langle\Big(1-\frac{1}{k}\Big)^n e_{(i)}\Big|\,a_{(i)}e_{(i)}\Big\rangle.$$

Нехай I_1 — така множина мультиіндексів $(i)=(i_1,\dots,i_n)$, що $i_1\le k$, $\cdots$, $i_n\le k$. Тоді

$$\Big\langle (x^k)^{\otimes n}\Big|\,w\Big\rangle=\sum_{(i)\in I_1}\Big(1-\frac{1}{k}\Big)^n a_{(i)}, \tag{2}$$

при $k\to\infty$ права частина у формулі (2) прямує до ряду $\sum_{(i)\in I}a_{(i)}$, який є розбіжним, тобто $p(x^k)\to\infty$, а, отже, p — необмежений на I^{∞}.

Наведемо приклад необмеженого гільбертового полінома на I^{∞}.

Приклад. Нехай φ — лінійний функціонал на E такий, що $\varphi(x)=(x|y)$, де $x=\sum_i x_ie_i$, а $y=\sum_i y_ie_i$ такий, що $y\in\ell_2$ та $y\notin\ell_1$. Зафіксуємо $y_n=n^{-1}$. Використавши другу частину доведення теореми, легко показати, що $\varphi(x)$ — необмежений, зокрема, на послідовності (1).

Позначимо через $P_{h,b}(E)$ простір обмежених гільбертових поліномів на I^{∞}. Нехай $r_{(n,i_1,\cdots,i_k)}$ — система напівнорм

$$r_{(n,i_1,\cdots,i_k)}=\sup_{x\in I^{\infty}}|p(x)|+\cdots+\sup_{x\in I^{\infty}}\sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{k}\left|\frac{\partial^n p(x)}{\partial e_{(i_{j_1})}\cdots\partial e_{(i_{j_n})}}\right|.$$

Система напівнорм $r_{(n,i_1,\cdots,i_k)}$ породжує деяку метрику в $P_{h,b}(E)$. Ця метрика відповідає найслабшій топології, в якій всі $r_{(n,i_1,\cdots,i_k)}$ є неперервними. Поповнимо простір $P_{h,b}(E)$ за цією метрикою. Функції з цього поповнення $\overline{P_{h,b}(E)}$ є нескінченно диференційованими та обмеженими в I^{∞}. Позначимо через

$D(I^\infty)$ підпростір $\overline{P_{h,b}(E)}$, який складається з функцій φ, що задовольняють наступну умову періодичності на T^∞: для кожного $x_0 \in T^\infty$ визначена границя $\varphi(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ і $\varphi(x_0) = \varphi(-x_0)$.

2. Простір узагальнених функцій на I^∞.

Множину I^∞ можна подати у вигляді декартового добутку $\prod\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, де $I_k = I$ — відрізок $[-1,1]$. Позначимо через μ_k таку лебегову міру на I_k, що $\mu_k(I) = 1$. Нагадаємо, що циліндричною множиною на I^∞ називається множина Ω вигляду:

$$\Omega((i),\delta) = \{\lambda(\cdot) \in I^\infty : \lambda(i_1), \dots, \lambda(i_n) \in \delta\},$$

де $\delta \in \prod\limits_{i=1}^{n} I_i$, $(i) = (i_1, \dots, i_n)$. Множина всіх циліндричних підмножин $C_\sigma(I^\infty)$ є $\sigma-$ алгеброю і на ній існує ймовірнісна $\sigma-$ адитивна міра μ (детальніше див. [1, с. 82]). При цьому $\mu\Omega((i),\delta) = \mu_{(i)}(\delta)$, де $\mu_{(i)}(\delta) = \mu_{(i_1)} \otimes \cdots \otimes \mu_{(i_n)}(\delta)$. Зауважимо, що $C_\sigma(I^n) \subset C_\sigma(I^\infty)$, де $C_\sigma(I^n)$ — $\sigma-$ алгебра циліндричних множин вигляду $\Omega((1,\dots,n),\delta)$ для фіксованого n.

Визначимо простір узагальнених функцій $D'(I^\infty)$ як спряжений до простору основних $D(I^\infty)$ на I^∞. *Регулярними елементами з цього простору є* елементи $T_f(\varphi)$ (де $f(x)$ — абсолютно інтегровна функція) такого вигляду:

$$T_f(\varphi) = \int\limits_{I^\infty} f(x)\varphi(x)d\mu,$$

для довільного $\varphi \in D(I^\infty)$.

Крім регулярних, існують сингулярні узагальнені функції, наприклад, $\delta-$ функція. Її дія на основну дає значення в точці: $\delta(\varphi) = \varphi(0)$, $\delta(x - x_0)(\varphi) = \varphi(x_0)$.

Розглянемо в I^∞ найслабшу топологію, в якій неперервні всі лінійні функціонали вигляду $L(x) = (x \mid u)$, де $u \in \ell_1$. Будемо називати таку топологію ℓ_1- слабкою. Оскільки ℓ_1 є щільним підпростором в ℓ_2, то ℓ_1-слабка топологія є гаусдорфовою.

Наступна теорема є аналогом теореми про достатність запасу основних функцій.

Теорема. *Якщо f_1 та f_2 дві різні ℓ_1 –слабко неперервні локально інтегровні на I^∞ функції, то існує така основна функція $\varphi \in D(I^\infty)$, що*

$$\int\limits_{I^\infty} f_1(x)\varphi(x)d\mu \neq \int\limits_{I^\infty} f_2(x)\varphi(x)d\mu.$$

Д о в е д е н н я. Оскільки f_1 і f_2 ℓ_1–слабко неперервні і $f_1 \neq f_2$, то існує ℓ_1–слабкий окіл $V_{L_1,\cdots,L_n,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n} = \{x \ : \ |L_1(x)| < \varepsilon_1, \cdots, |L_n(x)| < \varepsilon_n\}$, в якому $f_1 - f_2 > 0$ (де $L_1, \cdots, L_n$— деякі лінійні ℓ_1–слабко неперервні функціонали, які залежать від f_1, f_2, а $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ — додатні числа). Взявши $\varepsilon = \inf\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$, ми можемо вважати цим околом $V_{L_1,\cdots,L_n,\varepsilon}$. Кожен функціонал $L_1, \cdots, L_n$, який визначає окіл $V_{L_1,\dots,L_n,\varepsilon}$ може бути поданий у вигляді $L_k = (x, u_k)$, де $u_k \in \ell_1 \subset E$. Без обмеження загальності можемо вважати, що $u_1, \cdots, u_n$ лінійно незалежні та мають одиничну норму. Визначимо функцію

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |t|^2}}, & |t| \le \varepsilon, \\ 0, & |t| > \varepsilon, \end{cases}$$

де $\varepsilon > 0$, $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$, а стала C_ε визначається рівністю

$$C_\varepsilon \varepsilon^n \int\limits_{|\xi|<1} e^{-\frac{1}{1-|\xi|^2}} d\xi = 1.$$

Покладемо $\varphi(x) = \varphi_\varepsilon((x, u_1), \cdots, (x, u_n))$. Носієм функції φ_ε є ε-окіл нуля в $\mathbb{R}^n$. Тому носієм функції φ є ℓ_1–слабкий окіл $V_{L_1,\cdots,L_n,\varepsilon}$. Використовуючи розклад Тейлора функції φ_ε, подамо φ у вигляді абсолютно збіжного ряду $\varphi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n$, де φ_n — n–однорідні поліноми, які є алгебраїчною комбінацією функціоналів L_k. Згідно з твердженням 1, $\sum\limits_{n=1}^{k} \varphi_n \in P_{h,b}(E)$, тому $\varphi \in \overline{P_{h,b}(E)}$. Крім того, функція φ є парною, тому задовольняє умову періодичності. Отже, $\varphi \in D(I^\infty)$. Згідно з [2], функція φ_ε — „шапочка" в $\mathbb{R}^n$ (тобто нескінченно диференційована і має фінітний носій). Тому,

$$\int\limits_{I^\infty} (f_1 - f_2)(x)\varphi(x)d\mu = \int\limits_{I^n} (f_1 - f_2)(t_1 \cdots t_n)\varphi(t_1 \cdots t_n)dt_1 \cdots dt_n > 0.$$

Отже, φ — шукана функція.

3. Множення узагальненої функції на основну.

Якщо T_f — регулярна узагальнена функція з $D'(I^\infty)$, а $g(x)$ — нескінченно диференційовна, то виконується рівність:

$$T_{fg}(\varphi) = (gf, \varphi) = \int\limits_{I^\infty} g(x)f(x)\varphi(x)d\mu = (f, g\varphi) = T_f(g\varphi).$$

Означення 2. Добутком узагальненої функції $T_f(\varphi)$ на нескінченно диференційовану функцію g назвемо таку узагальнену функцію $T_{fg}(\varphi)$, що задовольняє рівність

$$T_{fg}(\varphi) = T_f(g\varphi)$$

для довільної основної функції $\varphi \in D(I^\infty)$.

4. Диференціювання узагальнених функцій.

Означення 3. Похідною узагальненої функції $T_f(\varphi)$ по напрямку h назвемо таку узагальнену функцію $T_{f'_h}(\varphi)$, що задовольняє рівність

$$T_{f'_h}(\varphi) = -T_f(\varphi'_h)$$

для довільної основної функції $\varphi \in D(I^\infty)$.

Твердження 2. *Введене нами означення узгоджується з рівністю*

$$\int\limits_{I^\infty} f'_h(x)\varphi(x)d\mu = \int\limits_{I^\infty} f(x)\varphi'_h(x)d\mu,$$

яка виконується для всіх $\varphi \in D(I^\infty)$, якщо f і f'_h є абсолютно інтегровними. Тобто збігається зі звичайним диференціюванням у випадку регулярних узагальнених функцій T_f та $T_{f'_h}$.

Д о в е д е н н я. Згідно введеної міри,

$$\int\limits_{I^\infty} f(x)\varphi(x)d\mu = \prod_{i=1}^{\infty}\int\limits_{I_i} f(x_ie_i)\varphi(x_ie_i)dx_i.$$

Зафіксуємо довільний напрямок $h = \sum h_ie_i = (h_1, \cdots, h_n, \cdots)$. Диференціюючи за цим напрямком, використовуючи інтегрування частинами та періодичність основної функції, отримаємо

$$\int\limits_{I^\infty} f'_h(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{I^\infty} \frac{d}{dt}f(x+th)\varphi(x)d\mu = \prod_{i=1}^{\infty}\int\limits_{I_i} \frac{d}{dt}f((x_i+th_i)e_i)\varphi(x_ie_i)dx_i =$$

$$\prod_{i=1}^{\infty}\int\limits_{I_i}(-f(x_ie_i))\frac{d}{dt}\varphi((x_i+th_i)e_i)dx_i = -\int\limits_{I^\infty} f(x)\varphi'_h(x)d\mu.$$

Твердження доведено.

1. *Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – К.: Наук. думка, 1988. – 680 с.
2. *Владимиров В.С.* Обобщённые функции в математической физике.– М.: Наука, 1979. – 320 с.
3. *Загороднюк А. В. , Лопушанський О. В.* Класи функцій H_2 в одиничній кулі гільбертового простору // Доп. НАН України, № 5, 2001. – С. 13–18.
4. *Загороднюк А. В. , Митрофанов М. А.* Аналітичні функції на одиничному диску гільбертового простору. – Вісник Львівського національного університету (в друці).
5. *Cole B. and Gamelin T.W.* Representing measures and Hardy spaces for the infinite polydisk algebra// Proc. London Math. Soc. 1986. – V. 53. – P. 112–142.
6. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces. Monographs in Mathematics, Springer, New York, 1999.
7. *Kondratiev Yu. G., Streit L., Westerkamp W., Yan J.* Generalized Functions in Infinite Dimensional Analysis// Hiroshima Mathematical Journal, 1998. – V. 28. – P. 213–260.
8. *Lopushansky O. V. , Zagorodnyuk A. V.* Function Hilbert spaces of infinitely many variables.// Methods Funct. Anal. Topol. 2004. – V. 10, № 2. – P. 13–20.
9. *Lopushansky O. V. , Zagorodnyuk A. V.* Hilbert spaces of analytic functions of infinitely many variables// Ann. Pol. Math. 2003. – V. 81, № 2. – P. 111–122.
10. *Neeb K.- H., Orsted B.* Hardy Spaces in an Infinite Dimensional Setting// Proceedings of II international workshop „Lie thery and its application in physics", Clausthal, Germany (ed. H.-D. Doebrer, V.K. Dobrev and J. Hilgert). – 1998. – P. 3–27.

ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ НА КУБЕ ГИЛЬБЕРТОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Построено пространство обобщённых функций на кубе гильбертового пространства. Определены операции умножения обобщенной функции на основную и дифференцирования обобщенной функции.

DISTRIBUTIONS ON CUBE IN HILBERT SPACE

We construct a space of distribuions on a cube in Hilbert space. We define the operation of differentiation and multiplication on this space.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Отримано
14.01.04