УДК 517.524

В. Я. Лозинська, О. М. М'яус

РОЗПОДІЛИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ І ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

В статті описано властивості операторного числення для генераторів сильно неперервних груп лінійних операторів, що діють над довільним банаховим простором. Робота продовжує дослідження розпочаті в статтях [1], [2].

У даній роботі операторне числення, розвинене в [2], застосовується до генераторів тензорно-комутуючих груп операторів, заданних над проективними тензорними добутками банахових просторів. Показано, що у цьому випадку операторне числення існує над тензорними добутками спектральних підпросторів, введених Ю. Любичем і В. Мацаєвим в [4].

Для опису просторів, яким належать символи функціонального числення, у банаховому просторі $L_1(\mathbb{R}^n)$ сумовних за Лебегом функцій вигляду $\varphi : \mathbb{R}^n \ni t = (t_1, \dots, t_n) \longrightarrow \varphi(t) \in \mathbb{C}$ довільному вектору $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ такому, що $\nu_j > 0 \quad (j = 1, \dots, n)$ співставимо підпростір

$$E_1^\nu := \Big\{\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{E_1^\nu} < \infty\Big\} \quad \text{з нормою} \quad \|\varphi\|_{E_1^\nu} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\|D^k\varphi\|_{L_1}}{\nu^k},$$

де позначено $k = (k_1, \dots, k_n)$, $\nu^k = \nu_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \nu_n^{k_n}$, $D^k = D_1^{k_1} \dots D_n^{k_n}$. Простори E_1^ν є банаховими. Крім цього, вони є інваріантними відносно операторів частинного диференціювання $D_j = \partial/\partial t_j$ функцій φ. Нехай далі

$$E_1 := \bigcup\nolimits_\nu E_1^\nu = \liminf_\nu E_1^\nu$$

об'єднання просторів з топологією індуктивної границі відносно неперервних вкладень $E_1^\nu \subset E_1^\mu$, де вектор $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ є такий, що $\nu_j \le \mu_j \quad (j = 1, \dots, n)$. Простір E_1 належить області визначення операторів диференціювання D_j та є інваріантним відносно їх дії [1] .

Спряжений простір до E_1 позначимо через E_1' і наділимо слабкою топологією. Білінійна форма, яка визначає двоїстість $\langle E_1' \mid E_1\rangle$ має вигляд $\langle f \mid \varphi\rangle = \langle f_\nu \mid \varphi\rangle$, де $\varphi \in E_1^\nu$ і $f_\nu := f\,|_{E_1^\nu}$ — звуження f на E_1^ν. Функціонали $f \in E_1'$ називаємо розподілами експоненціального типу.

Над простором E_1 є визначеним перетворення Фур'є, яке позначаємо через $\mathcal{F}$. Образ простору E_1 при перетворенні $\mathcal{F}$ позначаємо

$$\widehat{E}_1 := \left\{\widehat{\varphi}(\xi) = \int e^{-it\cdot\xi}\varphi(t)\,dt : \varphi \in E_1\right\},$$

де $t \cdot \xi := t_1\xi_1 + \ldots + t_n\xi_n$ для будь–якого $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Перетворення Фур'є здійснює лінійний ізоморфізм $\mathcal{F} : E_1 \ni \varphi(t) \longrightarrow \widehat{\varphi}(\xi) \in \widehat{E}_1$ і далі простір $\widehat{E}_1$ наділяємо індуктивною топологією відносно $\mathcal{F}$. Обернене перетворення визначимо інтегральною формулою

$$\mathcal{F}^\# := \mathcal{F}^{-1} : \widehat{E}_1 \ni \widehat{\varphi}(\xi) \longrightarrow \varphi(t) = \int e^{it\cdot\xi}\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi \in E_1.$$

Двоїстість $\langle E_1' \mid E_1\rangle$ дозволяє визначити відображення, спряжене до оберненого: $(\mathcal{F}^{-1})' : E_1' \ni f \longrightarrow \widehat{f} \in \widehat{E}_1'$ формулою $\langle \widehat{f} \mid \widehat{\varphi}\rangle := \langle f \mid \varphi\rangle$. Його образ $\widehat{E}_1'$, який породжує двоїстість вигляду $\langle \widehat{E}'_1 \mid \widehat{E}_1 \rangle$, наділимо слабкою топологією, яка збігається з індуктивною відносно $\mathcal{F}^{\#}$.

Розглянемо набір комплексних банахових просторів $\{X_j, \|\cdot\|_{X_j}\}, j = 1, \dots, n$, і нехай в кожному з X_j діє рівномірно обмежена однопараметрична C_0— група $\mathbb{R} \ni t_j \to e^{-it_j \mathcal{A}_j} \in \mathcal{L}(X_j)$ з генератором $\mathcal{A}_j$. Вище і далі $\mathcal{L}(X_j)$ — банахова алгебра обмежених лінійних операторів над X_j з одиничним оператором I_j. Через $X := X_1 \widetilde{\otimes} \dots \widetilde{\otimes} X_n$ позначимо поповнення проективного тензорного добутку просторів X_j. Над простором X кожен оператор вигляду

$$A_j := I_1 \otimes \dots \otimes I_{j-1} \otimes \mathcal{A}_j \otimes I_{j+1} \otimes \dots \otimes I_n$$

генерує однопараметричну C_0— групу

$$e^{-it_j A_j} := I_1 \otimes \dots \otimes I_{j-1} \otimes \, e^{-it_j \mathcal{A}_j} \otimes I_{j+1} \otimes \dots \otimes I_n,$$

при цьому оператори A_j з різними індексами комутують. Групи $e^{-it_j A_j}$ належать банаховій алгебрі $\mathcal{L}(X)$ обмежених лінійних операторів над X. Набір груп $e^{-it_j A_j}$ $(j = 1, \dots, n)$ також комутує між собою і тому їх добуток є n— параметричною C_0— групою вигляду

$$\mathbb{R}^n \ni t \to e^{-i\,t \cdot A} = e^{-it_1 \mathcal{A}_1} \otimes \dots \otimes e^{-it_n \mathcal{A}_n}, \quad A = (A_1, \dots, A_n),$$

визначеною над простором X, де позначено $t \cdot A := \sum_{j=1}^{n} t_j \mathcal{A}_j$.

Використаємо поняття спектрального підпростору набору операторів [3]. Введемо простір функцій

$$\mathcal{E}_m := \left\{ \rho \in E_1(\mathbb{R}) : \, \widehat{\rho}\mid_{[-m,m]} = 1 \right\}.$$

Спільним спектральним підпростором комутуючого набору операторів $\mathcal{A} := \left[\mathcal{A}_1 \,, \dots, \mathcal{A}_n \right]$ називаємо підпростір вигляду

$$S_m := \bigcap_{1 \le j \le n} \; \bigcap_{\rho_j\,(t_j) \,\in\, \mathcal{E}_m} \left\{ x \in X : \, \widehat{\rho}_j \, (\mathcal{A}_j) \, x = x \, \right\},$$

де позначено $\widehat{\rho}_j \, (\mathcal{A}_j) = I_1 \otimes \dots \otimes \widehat{\rho}_j(A_j) \otimes \dots \otimes I_n$, а оператори $\widehat{\rho}_j(A_j)$ визначені наступним чином

$$\widehat{\rho_j}(A_j) = \int e^{-i\,t_j\,A_j} \, \rho_j(t_j) \, dt_j, \qquad \widehat{\rho_j}(\xi_j) := \int e^{-i\,t_j \xi_j} \, \rho_j(t_j) \, dt_j.$$

Далі позначаємо $\widehat{\rho}(A) := \widehat{\rho}_1(\mathcal{A}_1) \otimes \dots \otimes \widehat{\rho}_n(\mathcal{A}_n)$, де $\rho_1, \dots, \rho_n \in E_1(\mathbb{R}^n)$. В роботі [4] встановлено, що підпростори

$$\mathcal{S}_{j,m} := \bigcap_{\rho_1 \cdots \rho_n \in \mathcal{E}_m} \left\{ x \in X_j : \, \widehat{\rho}(\mathcal{A}_j) x = x \right\}$$

задовольняють умовам $\mathcal{S}_{j,m} \subset \mathcal{S}_{j,m+1}$ та є замкненими, а звуження оператора $\mathcal{A}_j$ на них має властивість $\mathcal{A}_j x = \mathcal{A}_j \widehat{\rho}(\mathcal{A}_j) x = \widehat{-i\rho'}(\mathcal{A}_j) x$. Тому $\mathcal{S}_{j,m} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$. Для будь–якої функції $\varphi \in E_1(\mathbb{R}^n)$, маємо $\widehat{\rho}(\mathcal{A}_j) \widehat{\varphi}(\mathcal{A}_j) x = \widehat{\varphi}(\mathcal{A}_j) \widehat{\rho}(\mathcal{A}_j) x = \widehat{\varphi}(\mathcal{A}_j) x$, тому $\mathcal{S}_{j,m}$ є інваріантним відносно $\widehat{\rho}(\mathcal{A}_j)$. Оскільки $\widehat{\rho}(\mathcal{A}_j) \mathcal{A}_j x = \mathcal{A}_j \widehat{\rho}(\mathcal{A}_j) x = \mathcal{A}_j x \in \mathcal{S}_{j,m}$, то $\mathcal{S}_{j,m}$ є інваріантним відносно $\mathcal{A}_j$. Отже, оператор $\mathcal{A}_j$ на $\mathcal{S}_{j,m}$ обмежений. В [4] також встановлено, що якщо $\mathcal{A}_j$ є генератором рівномірно обмеженої C_0— групи, то об'єднання $\bigcup_m \mathcal{S}_{j,m}$ буде щільним в X_j.

З ізоморфізму

$$S_m := \bigcap_{1\le j\le n}\bigcap_{\rho_j\in\mathcal{E}_m}\{x\in X:\ \widehat{\rho}(A)x = x\}\simeq \mathcal{S}_{1,m}\widetilde{\otimes}\ldots\widetilde{\otimes}\mathcal{S}_{n,m},$$

встановленого в [3] випливає, що простори S_m мають подібні властивості по відношенню до набору A. А саме, задовольняють умовам $S_m\subset S_{m+1}$ та є замкненими і інваріантними підпросторами в просторі X відносно кожного з операторів A_j, а їх звуження на S_m належать алгебрі обмежених операторів $\mathcal{L}(S_m)$. З вказаного ізоморфізму також випливає, що об'єднання $S := \bigcup_m S_m$ буде щільним в X.

Лема 1. [2] *Для будь–яких функцій $f\in E_1'(\mathbb{R}^n)$ та чисел $m\in\mathbb{N}$ співвідношення $\widehat{f}(A):\ S_m\ni x\longrightarrow \widehat{(f\star\rho)}(A)x\in S_m$ виконується для кожної функції вигляду $\rho(t)=\rho_1(t_1)\cdot\ldots\cdot\rho_n(t_n)$, де $\rho_j\in\mathcal{E}_m$ при $j=1,\ldots,n$. Крім цього, $\widehat{f}(A)\mid_{S_m}\in\mathcal{L}(S_m)$.*

Нехай топологія в підпросторі $S=\bigcup\limits_m S_m$ індукується з простору X і в алгебрі $\mathcal{L}(S)$ задана сильна операторна топологія.

Теорема. *Відображення $\widehat{E}_1'(\mathbb{R}^n)\ni\widehat{f}\longrightarrow\widehat{f}(A)\in\mathcal{L}(S)$ здійснює неперервний гомоморфізм алгебри $\widehat{E}_1'(\mathbb{R}^n)$ в алгебру $\mathcal{L}(S)$, при цьому $\widehat{(D^k f)}(A) = A^k\widehat{f}(A)$, де $A^k := A_1^{k_1}\otimes\ldots\otimes A_n^{k_n}$ $(\forall k\in\mathbb{Z}_+)$. Оператори $\widehat{f}(A)$ над простором X припускають замикання з областю визначення*

$$\left\{x=\sum_{m=1}^{\infty}x_m\in X:\ x_m\in S_m,\ \sum_{m=1}^{\infty}\|\widehat{f}(A)x_m\|<\infty\right\}.$$

Д о в е д е н н я. З того, що $\mathcal{E}_m\subset E_1(\mathbb{R}^n)$ випливає, що оператор $\widehat{f}(A)$ в теоремі є звуженням такого ж оператора з теореми 4 [2]. Тому залишилося перевірити неперервність відображення $E_1'(\mathbb{R}^n)\ni f\longrightarrow\widehat{f}(A)x\in X$. Справді, для кожного $x\in S$, маємо

$$\|\widehat{f}(A)x-\widehat{g}(A)x\|\le\int\|U_t x\|\,|(f-g)\star\rho(t)|\,dt\to 0$$

при $f\to g$ в просторі $E_1'(\mathbb{R}^n)$. Далі частину твердження про існування замикання оператора $\widehat{f}(A)$ над простором X доведемо узагальнюючи міркування наведені в роботі [9]. А саме, визначимо простір абсолютно збіжних рядів

$$l_1(S_m;X):=\left\{x=\sum_{m=1}^{\infty}x_m\in X:\ x_m\in S_m\ ;\ \sum_{m=1}^{\infty}\|x_m\|<\infty\right\}$$

з нормою $\|x\|_l=\inf\sum\limits_{m=1}^{\infty}\|x_m\|$, де $\inf$ береться по всіх зображеннях вектора x у вигляді такого ряду $x=\sum x_m$.

Лема 2. *Якщо оператор A замкнений, то простір $l_1(S_m;X)$ ізометричний простору X.*

Д о в е д е н н я. Оскільки $\|x\| = \| \sum_{m=1}^{\infty} x_m \| \le \sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\|, \ \forall x \in l_1(S_m; X)$, то $l_1(S_m; X) \subset \overline{S}$, де замикання за нормою X. З іншого боку, $S \subset l_1(S_m; X)$ і $\|x\|_l = \|x\|$ для всіх $x \in S_m$ і всіх $m \in \mathrm{N}$. Тому $\|x\|_l = \|x\|$ для всіх $x \in S$. Переходячи до поповнення, одержимо $\overline{S} \subset l_1(S_m; X)$. Згідно із попереднім зауваженням $\overline{S} = X$, звідки приходимо до ізометрії просторів $l_1(S_m; X)$ та X. Лема доведена.

Нехай $l_1(S_m) = \Big\{ x = (x_m) : x_m \in S_m\,, \ \|x\|_l = \sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\| < \infty \Big\}$ і нехай $S_m^{'}$ — спряжений простір до S_m з нормою $\|y_m\| = \sup\limits_{\|x_m\| \le 1} |\langle x_m\,, y_m \rangle|$, де $x_m \in S_m$.

Лема 3. *Сильно спряжений простір до* $l_1(S_m)$ *має вигляд* $l_{\infty}(S_m^{'}) = \Big\{ y = (y_m) : y_m \in S_m^{'}\,, \ \|y\|_{\infty} < \infty \Big\}$, *де* $\|y\|_{\infty} = \sup\limits_{m \ge 1} \|y_m\|$ *— його норма.*

Д о в е д е н н я. Нехай

$$e_m = \{\eta_i^m\}, \ \text{ де } \ \eta_i^m = \left\{ \begin{array}{ll} x_m, & i = m, \ \ \|x_m\| = 1, \\ 0, & i \ne m. \end{array} \right\}.$$

Для елемента $x = (x_m) \in l_1(S_m)$, маємо $\|(x_m) - [\,\xi_m\, e_m\,]_{m=1}^{N}\|_l = \sum_{m=N}^{\infty} \|x_m\| = \sum_{m=N}^{\infty} |\xi_m| \to 0$ при $N \to \infty$, $\xi_m \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{Z}_+$. Отже, $x = \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m\, e_m$. Для будь–якого лінійного функціоналу y над $l_1(S_m)$ покладемо $y(e_m) := y_m(e_m)$. Звідси і з вигляду x випливає $y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m \langle e_m, y_m \rangle$. Тому $\|y\|_{\infty} = \sup\limits_{\|x\|_l \le 1} |\langle x, y \rangle| \ge \sup\limits_{\|x_m\| \le 1} |\langle x_m, y_m \rangle| = \|y_m\|$, тобто $\|y\|_{\infty} \ge \sup\limits_{m} \|y_m\|$. З іншого боку, $|y(x)| \le \sup\limits_{m} |\langle e_m, y_m \rangle| \sum_{m=1}^{\infty} |\xi_m| \le \sup\limits_{m} \|y_m\| \sum_{m=1}^{\infty} |\xi_m|$, тобто $\|y\|_{\infty} \le \sup\limits_{m} \|y_m\|$. Таким чином, простір $l_1(S_m)^{'}$ співпадає з простором $l_{\infty}(S_m^{'})$. Лема доведена.

Лема 4. *Сильно спряжений простір до* $l_1(S_m; X)$ *ізометричний простору* $l_{\infty}^{0}(S_m^{'}) = \Big\{ y = (y_m) \in l_{\infty}(S_m^{'}) : \sum_{m=1}^{\infty} \langle x_m, y_m \rangle = 0, \ \forall \sum_{m=1}^{\infty} x_m = 0 \Big\}$.

Д о в е д е н н я. Визначимо відображення $\Phi : l_1(S_m) \ni x \to \sum_{m=1}^{\infty} x_m \in X$. Згідно з означенням простір $l_1(S_m; X)$ ізометричний фактор–простору по ядру відображення Φ, тобто, $l_1(S_m; X) \simeq l_1(S_m) / \operatorname{Ker} \Phi$. Сильно спряжений простір до $l_1(S_m)$ співпадає з $l_{\infty}(S_m^{'})$ (лема 3). Тому сильно спряжений до $l_1(S_m) / \operatorname{Ker} \Phi$ є полярою в $l_{\infty}(S_m^{'})$ ядра $\operatorname{Ker} \Phi$ відносно двоїстості $\big\langle l_1(S_m), l_{\infty}(S_m^{'}) \big\rangle$ [7, гл.V, п.1]. Лема доведена.

Із лем 2 та 4 випливає, що для будь–якого функціоналу $y \in X'$ послідовність його звужень $y_m = y\,|_{S_m}$ визначає елемент простору $l_{\infty}^{0}(S_m^{'})$ і відображення $X' \ni y \to \{y_m\} \in l_{\infty}^{0}(S_m^{'})$ здійснює ізометричний ізоморфізм просторів, тобто, виконується рівність $\|y\| = \sup\limits_{m \ge 1} \|y_m\|$.

Позначимо $T = \widehat{f}(A)$. Підпростір $l_{fin}(S_m^{'})$ — фінітних послідовностей слабо щільний у просторі $l_{\infty}(S_m^{'})$. Тому підпростір вигляду $l_{fin}^0(S_m^{'}) := l_{fin}(S_m^{'}) \bigcap l_{\infty}^0(S_m^{'})$ слабо щільний у $l_{\infty}^0(S_m^{'})$.

Двоїстість $\langle l_{\infty}^0(S_m^{'}), l_1(S_m;\, X)\rangle$ реалізується білінійною формою $\langle x\,,\, y\rangle = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \langle x_m\,,\, y_m\rangle$, де $x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x_m \in l_1(S_m;\, X), y = (y_m) \in l_{\infty}^0(S_m^{'})$ і білінійні форми $\langle x_m\,,\, y_m\rangle$ відповідають дуальним парам $\langle S_m\,,\, S_m^{'}\rangle$.

Підпростір $l_{fin}^0(S_m^{'})$ лежить в області визначення спряженого оператора T' до оператора $T = \widehat{f}(A)$ відносно двоїстості $\langle l_{\infty}^0(S_m^{'}), l_1(S_m;\, X)\rangle$. Справді, кожна послідовность $y = (y_m) \in l_{fin}^0(S_m^{'})$ із j ненульовими членами визначає функціонал вигляду $S_m \ni x_m \to \langle T_m x_m\,,\, y_m\rangle = \langle x_m\,,\, T_m' y_m\rangle$, де позначено $T_m = \widehat{f}_m(A_m)$ і T_m' — спряжений оператор до оператора T_m відносно двоїстості $\langle S_m\,,\, S_m'\rangle$. Тому досить показати, що цей функціонал має неперервне розширення на простір $l_1(S_m;\, X)$.

Для довільного елемента $x = \sum x_m$ простору $l_1(S_m;\, X)$ справедлива нерівність $\Big|\sum\limits_{m=1}^{j} \langle x_m, T_m' y_m\rangle\Big| \le \Big(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \|x_m\|\Big) \sup\limits_{1\le m\le j} \|T_m' y_m\| = \Big(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \|x_m\|\Big)\|T'y\|$. Тому функціонал $\langle x, T'y\rangle = \sum\limits_{m=1}^{j} \langle x_m\,,\, T_m' y_m\rangle$ задовольняє нерівність $|\langle x, T'y\rangle| \le \Big(\inf \sum\limits_{m=1}^{\infty} \|x_m\|\Big) \|T'y\| = \|x\|_l\, \|T'y\|$. Функціонал $\langle x\,,\, T'y\rangle$ є шуканим розширенням, яке визначає спряжений оператор T'. Отже, підпростір $l_{fin}^0(S_m^{'})$ лежить в області визначення оператора спряженого до оператора T відносно двоїстості $\langle l_{\infty}^0(S_m^{'}), l_1(S_m;\, X)\rangle$.

Далі скористаємося відомою теоремою [8, гл.IV, п.7], згідно з якою замикання $\overline{T}$ оператора T існує і співпадає із його другим спряженим, як тільки область визначення спряженого оператора є слабо щільною у спряженому просторі. Існування замикання оператора T доведено.

Якщо $\widehat{f}_m(A_m) = A_m,\ m \in \mathbb{N}$, то $T' = A'$. Тому другі спряжені оператори також рівні, тобто $f(A) = A$.

Область визначення замикання $f(A)$, як другого спряженого до T, має вигляд $\Big\{x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x_m \in l_1(S_m; X) :\ \Big|\sum\limits_{m=1}^{\infty} \langle f_m(A_m)x_m, y_m\rangle\Big| \le C\|y\|\Big\}$ для всіх $y \in l_{\infty}^0(S_n')$, де C не залежить від y. Позначимо $y_m = y\mid_{S_m}$. Якщо ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \langle f_m(A_m)x_m\,,\, y_m\rangle$ збіжний для будь–якого $y \in l_{\infty}^0(S_n')$, то він збіжний абсолютно, тобто збігаються ряди $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \big|\langle f_m(A_m)x_m, y_m\rangle\big|$ для всіх таких y. Справді, для цього досить покласти $y_m' = e^{-i\theta(m)} y_m$, де $\theta(m)$ — аргумент комплексного числа $\langle f_m(A_m)x_m\,,\, y_m\rangle$. Тоді $\|y_m'\| = \|y_m\|$ $y' = (y_m') \in l_{\infty}^0(S_m')$. Навпаки, оскільки

$$\Big|\sum_{m=1}^{\infty} \langle f_m(A_m)x_m\,,\, y_m\rangle\Big| \le \sum_{m=1}^{\infty} \big|\langle f_m(A_m)x_m\,,\, y_m\rangle\big| < \infty,$$

то використовуючи довільність $y' = (y_m') \in l_{\infty}^0(S_m')$ для кожного m знайдеться вектор y_m' такий, що $\|y_m'\| = 1$ і $\|f_m(A_m)x_m\| = \big|\langle f_m(A_m)x_m\,,\, y_m'\rangle\big|$.

Тому для всіх x із області визначення оператора $f(A)$ збігаються ряди $\sum_{m=1}^{\infty}\|f_m(A_m)x_m\|$. Теорема доведена.

Приклад. $U : \mathbb{R}^n \ni t \longrightarrow U_t \in \mathcal{L}(L_1)$ є групою зсуву над $L_1(\mathbb{R})$, тобто $U_t\varphi(s) = \varphi(s+t)$ $,\varphi \in L_1(\mathbb{R})$. Генератор групи зсуву — оператор диференціювання $-D$ є замкненим і щільно визначеним. Для будь–яких $f \in E_1'(\mathbb{R})$ та $m \in \mathbb{N}$, маємо

$$\widehat{f}(D) : S_m \ni x \longrightarrow \widehat{(f \star \rho)}(D)x = (f \star \rho) \star x \in S_m,$$

де $\rho(t) \in \mathcal{E}_m$. Крім цього, $\widehat{f}(D)_{|S_m} \in \mathcal{L}(S_m)$.

1. *Лопушанський О. В., Лозинська В. Я.* Аналітичні розподіли експоненціального типу // Мат. методи і фіз.-мех. поля – 1999. – Т. 42, № 4 – С. 46–55.
2. *Лопушанський О. В., Лозинська В. Я.* Операторне числення в алгебрах розподілів експоненціального типу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 3 – С. 24–33.
3. *Лопушанський О. В., Ряжська В. А.* Спектральні властивості генераторів (C_0) – груп над тензорними добутками банахових просторів // Мат. методи і фіз.-мех. поля – 1997. – Т. 40, № 4 – С. 40–47.
4. *Любич Ю. И., Мацаев В. И.* Об операторах с отделимым спектром // Матем. сборник – 1962. – Т. 56(98), № 4 – С. 433–468.
7. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства: Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 257 с.
8. *Шефер Г.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. – 359 с.
9. *Lopushansky O. V., Dmytryshyn M. I.* Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum. In book „General Topology in Banach Spaces." – NOVA Sci. Publ., Inc. Huntington, New York. – 2001. – P. 137–145.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА И ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В статье описаны свойства операторного исчисления для генераторов сильно непрерывных групп линейных операторов, которые действуют над произвольным банаховым пространством. Работа продолжает исследования начатые в статьях [1], [2].

DISTRIBUTIONS OF EXPONENTIAL TYPE AND FUNCTIONAL CALCULUS

The some properties of the operator calculus for the generators of strongly continuous groups of linear operators on arbitrary Banach spaces are constructed are described. This article is the supplement of [1], [2].

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Отримано
07.05.03