УДК 517.98

М. І. Дмитришин

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ СПЕКТРАЛЬНИХ ПІДПРОСТОРІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ТРІКОМІ

Встановлено інтерполяційні властивості спектральних підпросторів диференціальних операторів Трікомі. Наведено спектральні розклади таких операторів.

Вступ. У даній роботі наведено застосування теорії інтерполяції до побудови спектральних розкладів диференціальних операторів Трікомі.

У випадку операторів з точковим спектром спектральні підпростори можна описати за допомогою цілих векторів експоненціального типу [6], [7]. Для замкненого оператора A з щільною областю визначення $\mathcal{D}(A)$ в банаховому просторі $\mathfrak{X}$ елемент x називається вектором експоненціального типу, що не перевищує $\nu > 0$, якщо виконується нерівність

$$\|A^k x\| \le c\,\nu^k, \qquad k \in \mathbb{Z}_+\,,$$

де $c > 0$ — постійна, що не залежить від k [2]. Підпростір всіх таких векторів $\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A, \mathfrak{X})$ оператора з точковим спектром співпадає з лінійною оболонкою кореневих векторів, що відповідають власним значенням у колі радіуса $\nu > 0$.

У пропонованій роботі встановлено інтерполяційні властивості просторів цілих векторів експоненціального типу операторів Трікомі. На їх основі визначено та описано інтерполяційні шкали спектральних підпросторів (теорема 1).

Для замкнених операторів у банахових просторах побудовано функціональне числення на ультрагладких векторах в класі голоморфних функцій [1]. В [7] це числення розширено на алгебру символів, яка є проективною границею банахових скінченновимірних алгебр. Техніка дослідження, розвинена в цих роботах, використовується для побудови розкладу простору $L_2(\Omega)$ в ряди інваріантних спектральних підпросторів операторів Трікомі (теорема 2).

У зв'язку з даною роботою відзначимо також дослідження [8]. Використовуємо термінологію і позначення роботи [3].

Диференціальні оператори Трікомі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область класу C^∞, тобто, існує скінченний набір відкритих куль K_j, $j = 1,\dots,N$, що задовольняє умови $\bigcup\limits_{j=1}^{N} K_j \supset \partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$, $K_j \bigcap \partial\Omega = \emptyset$. Крім цього, існують такі нескінченно диференційовані дійсні вектор–функції $u^{(j)}(x)$, $x \in \overline{K}_j$, що $y = u^{(j)}(x)$ — взаємнооднозначне відображення кулі K_j на деяку обмежену область в $\mathbb{R}^n$, причому образ множини $K_j \bigcap \partial\Omega$ є частиною гіперплощини $\{y \in \mathbb{R}^n : y_n = 0\}$, а образ множини $K_j \bigcap \Omega$ — обмеженою областю в $\mathbb{R}^n_+ = \{y \in \mathbb{R}^n : y_n > 0\}$. Передбачається також, що $\dfrac{\partial u^{(j)}(x)}{\partial x} \ne 0$, $x \in \overline{K}_j$.

Нехай $\sigma(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ — додатна функція, причому $\sigma(x) = d(x)$ поблизу границі ($d(x)$ — відстань від точки x до границі $\partial\Omega$). Позначимо через $\big\{a_{js}(x)\big\}_{j,s}^{1,\dots,n}$ додатно визначену симетричну матрицю з дійснозначними коефіцієнтами $a_{js}(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, для якої $\sum\limits_{j,s=1}^{n} a_{js}(x)\xi_j\xi_s \ge c|\xi|^2$, де $c > 0$ — додатне число, що не залежить від $x \in \Omega$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Диференціальний оператор Трікомі задається співвідношеннями

$$Au = -\sum_{j,s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{js}(x)\sigma(x)\frac{\partial u}{\partial x_s}\Big),\ \mathcal{D}(A) = C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{1}$$

Наведене означення належить Бауенді та Гулауіку [4], [5].

Згідно з [5], оператор A, визначений формулою (1), допускає замикання $\overline{A}$ в $L_2(\Omega)$ і для $r \in \mathbb{N}$ виконуються рівності

$$\mathcal{D}(\overline{A}^r) = W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}) = \Big\{u \in L_2(\Omega) :\ \|u\|_{W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r})} = \sum_{|\alpha|\le 2r}\Big(\int_\Omega \sigma^{2r}(x)|D^\alpha u(x)|^2 dx\Big)^{1/2} < \infty\Big\}.$$

Крім цього, оператор $\overline{A}$ має точковий спектр $\sigma(\overline{A}) = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ і кореневі підпростори $\mathcal{R}_n$, що відповідають власним значенням $\lambda_n \in \mathbb{C}$, є скінченновимірними.

Інтерполяційні простори. Для довільних чисел $\nu > 0$, $1 \le q \le \infty$ визначимо простір

$$\mathcal{E}_q^\nu(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r})) = \Big\{u \in L_2(\Omega) :\ \|u\|_{\mathcal{E}_q^\nu(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}))} < \infty\Big\}$$

з нормою

$$\|u\|_{\mathcal{E}_q^\nu(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}))} = \begin{cases} \Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|\overline{A}^k u\|^q_{W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r})}}{\nu^{kq}}\Big)^{1/q} & : \quad 1 \le q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{\|\overline{A}^k u\|_{W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r})}}{\nu^k} & : \quad q = \infty. \end{cases}$$

Нехай $0 < t,\ \nu_0,\ \nu_1 < \infty$, $1 \le q_0,\ q_1 \le \infty$, $0 < \theta < 1$. Визначимо інтерполяційний простір $\big(\mathcal{E}_{q_0}^{\nu_0}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r})), \mathcal{E}_{q_1}^{\nu_1}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}))\big)_{\theta,q}$ з нормою

$$\|u\|_{\left(\mathcal{E}_{q_0}^{\nu_0}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r})), \mathcal{E}_{q_1}^{\nu_1}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}))\right)_{\theta,q}} = \Big(\int_0^\infty \big[t^{-\theta}\mathcal{K}_r(t,u)\big]^q\frac{dt}{t}\Big)^{1/q},$$

де позначено $\mathcal{K}_r(t,u) = \inf\limits_{u=u_0+u_1}\Big(\|u_0\|_{\mathcal{E}_{q_0}^{\nu_0}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}))} + t\,\|u_1\|_{\mathcal{E}_{q_1}^{\nu_1}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}))}\Big)$, $u_0 \in \mathcal{E}_{q_0}^{\nu_0}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}))$, $u_1 \in \mathcal{E}_{q_1}^{\nu_1}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}))$.

Лема 1. *Для* $1 \le q,\ q_0,\ q_1 \le \infty$, $\nu_0 \ne \nu_1$ *справджується рівність*

$$\mathcal{E}_q^\nu(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r})) = \big(\mathcal{E}_{q_0}^{\nu_0}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r})),\ \mathcal{E}_{q_1}^{\nu_1}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}))\big)_{\theta,q}, \tag{2}$$

де $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^\theta$.

Д о в е д е н н я. Простір $\mathcal{E}_q^\nu(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}))$ ізометрично ізоморфний підпростору послідовностей в $L_2(\Omega)$ вигляду

$$l_{q,r}^\sigma = \big\{(A^k u)_{k=0}^\infty :\ \|(A^k u)\|_{l_{q,r}^\sigma} < \infty\big\},$$

де $\sigma = \log_2 \nu^{-1}$ і $\|(A^k u)\|_{l_{q,r}^\sigma} = \|u\|_{\mathcal{E}_q^\nu(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}))}$, $u \in \mathcal{E}_q^\nu(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}))$. Тому рівність (2) випливає з теореми 1.18.2 [3], згідно з якою $\big(l_{q_0,r}^{\sigma_0},\, l_{q_1,r}^{\sigma_1}\big)_{\theta,q} = l_{q,r}^\sigma$, де $\sigma = (1-\theta)\sigma_0 + \theta\sigma_1$, $\sigma_0 \ne \sigma_1$.

Для $1 \leq q < \infty$, $0 < \theta < 1$ визначимо інтерполяційний простір $\big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}$ з нормою

$$\|u\|_{\left(W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\,\sigma^{2l})\right)_{\theta,q}} = \Big(\int\limits_0^{\infty} \big[t^{-\theta}\mathcal{K}_{r,l}(t,u)\big]^q \frac{dt}{t}\Big)^{1/q},$$

де $\mathcal{K}_{r,l}(t,u) = \inf\limits_{u=u_0+u_1} \big(\|u_0\|_{W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r})} + t\,\|u_1\|_{W_2^{2l}(\Omega;\,\sigma^{2l})}\big)$, $u_0 \in W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r})$, $u_1 \in W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})$.

Лема 2. *Нехай* $\nu > 0$, $1 \leq q < \infty$, $0 < \theta < 1$. *Тоді виконується рівність*

$$\mathcal{E}_q^{\nu}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big) =$$

$$\big(\mathcal{E}_{q_0}^{\nu}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r})),\, \mathcal{E}_{q_1}^{\nu}(\overline{A}, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l}))\big)_{\theta,q}, \tag{3}$$

де $r \neq l$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$.

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 1.3.3 [3], звуження оператора $\overline{A}^k$ на інтерполяційний простір $\big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}$ є замкненим оператором із щільною областю визначення вигляду

$$\big(W_2^{2(r+k)}(\Omega;\, \sigma^{2(r+k)}),\, W_2^{2(l+k)}(\Omega;\, \sigma^{2(l+k)})\big)_{\theta,q}.$$

Тому є визначеним простір $\mathcal{E}_q^{\nu}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big)$ з нормою

$$\|u\|_{\theta,q,r,l} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \nu^{-kq} \|\overline{A}^k u\|^q_{\left(W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\,\sigma^{2l})\right)_{\theta,q}}\Big)^{1/q}.$$

Простір $\mathcal{E}_q^{\nu}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big)$ є ізометрично ізоморфним підпростору послідовностей $l_{q,rl}^{\sigma} = \big\{(A^k u)_{k=0}^{\infty} : \|(A^k u)\|_{l_{q,rl}^{\sigma}} < \infty\big\}$, де $\sigma = \log_2 \nu^{-1}$ і $\|(A^k u)\|_{l_{q,rl}^{\sigma}} = \|u\|_{\theta,q,r,l}$, $u \in \mathcal{E}_q^{\nu}\big(A, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big)$.

Згідно з теоремою 1.18.1 [3], маємо $l_{q,rl}^{\sigma} = \big(l_{q_0,r}^{\sigma}, l_{q_1,l}^{\sigma}\big)_{\theta,q}$, де $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$. Звідси отримуємо (3).

Норма простору $\mathcal{E}_q^{\nu}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big)$ є еквівалентною нормі

$$\|u\|^*_{\theta,q,r,l} = \Big(\int\limits_0^{\infty} \big[t^{-\theta}\mathcal{K}_{r,l}^{\nu}(t,u)\big]^q \frac{dt}{t}\Big)^{1/q},$$

де позначено $\mathcal{K}_{r,l}^{\nu}(t,u) = \inf\limits_{u=u_0+u_1} \Big(\|u_0\|_{\mathcal{E}_{q_0}^{\nu}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}))} + t\,\|u_1\|_{\mathcal{E}_{q_1}^{\nu}(\overline{A}, W_2^{2l}(\Omega;\,\sigma^{2l}))}\Big)$, $u_0 \in \mathcal{E}_{q_0}^{\nu}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}))$, $u_1 \in \mathcal{E}_{q_1}^{\nu}(\overline{A}, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l}))$.

Простір $\mathcal{E}_q^{\nu}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big)$ є інваріантним відносно оператора $\overline{A}^k$ і виконується нерівність

$$\|\overline{A}^k u\|_{\theta,q,r,l} \leq \nu^k \|u\|_{\theta,q,r,l}$$

для всіх $u \in \mathcal{E}_q^{\nu}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big)$.

Теорема 1. *Нехай* $\nu > 0$, $1 \le q < \infty$, $r \ne l$ *і* $0 < \theta < 1$. *Тоді для оператора* $\overline{A}$, *заданого формулою* (1), *виконуються рівності*

$$\mathcal{E}_q^{\nu}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big) = Lin\Big\{\mathcal{R}_n :\, |\lambda_n| < \min\big(\nu^{\frac{1}{r+1}},\, \nu^{\frac{1}{l+1}}\big)\Big\}, \qquad (4)$$

$$\mathcal{E}_q^{\nu}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big) = \Big\{u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) :\; \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{-k} \|\overline{A}^{\,k} u\|_{\left(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\right)_{\theta,q}} < \infty\Big\}. \qquad (5)$$

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 2.2 [7] виконується рівність

$$\mathcal{E}_1^{\nu}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r})) = Lin\,\{\mathcal{R}_n :\, |\lambda_n|^{r+1} < \nu\}, \quad r \in \mathbb{Z}_+.$$

Тому простори $\mathcal{E}_1^{\nu}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}))$ скінченновимірні. З леми 1 для $1 \le q \le \infty$ і $\nu = \nu_0^{1-\theta}(\nu_0 + \varepsilon)^{\theta}$, $\varepsilon > 0$, маємо

$$\mathcal{E}_q^{\nu}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r})) = \big(\mathcal{E}_1^{\nu_0}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r})),\, \mathcal{E}_1^{\nu_0+\varepsilon}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}))\big)_{\theta,q}.$$

Оскільки підпростір $\mathcal{E}_1^{\nu_0}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r})) \bigcap \mathcal{E}_1^{\nu_0+\varepsilon}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}))$ щільний в просторі $\big(\mathcal{E}_1^{\nu_0}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r})),\, \mathcal{E}_1^{\nu_0+\varepsilon}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}))\big)_{\theta,q}$ (теорема 1.6.2 [3]), то $\mathcal{E}_1^{\nu}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r})) = \mathcal{E}_q^{\nu}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}))$ для всіх $\nu > 0$, $1 \le q < \infty$. Звідси і з леми 2, отримуємо

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_q^{\nu}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big) = \\
&\mathcal{E}_{q_0}^{\nu}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r})) \bigcap \mathcal{E}_{q_1}^{\nu}(\overline{A}, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})) = \\
&Lin\,\{\mathcal{R}_n :\, |\lambda_n|^{r+1} < \nu\} \bigcap Lin\,\{\mathcal{R}_n :\, |\lambda_n|^{l+1} < \nu\} = \\
&Lin\,\{\mathcal{R}_n :\, |\lambda_n| < \min\big(\nu^{\frac{1}{r+1}},\, \nu^{\frac{1}{l+1}}\big)\},
\end{aligned}$$

що і доводить рівність (4).

Рівність (5) випливає з теореми 7.3.2/1 [3] та з рівностей $\mathcal{D}(\overline{A}^{\,r}) = W_2^{2r}(\Omega; \sigma^{2r})$, $\mathcal{E}_1^{\nu}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r})) = \mathcal{E}_q^{\nu}(\overline{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}))$ $(1 \le q < \infty)$.

Зауваження. Простори $\mathcal{E}_q^{\nu}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega; \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega; \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big), 0 < \theta < 1$, визначені рівністю (3), утворюють інтерполяційну шкалу спектральних підпросторів оператора $\overline{A}$.

Узагальнений спектральний розклад. Розглянемо послідовність просторів $\big\{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big)\big\}$, що відповідає послідовності додатних чисел $\{\nu(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(n) = \infty$.

Кожному елементу $u \in \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}$ співставимо збіжний ряд $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ в просторі $\big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}$, де елемент $u_n \in \mathcal{E}_q^{\nu(n)}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big)$. Для $1 \le \beta < \infty$ визначимо простір

$$\ell_\beta\big[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big)\big] = \Big\{u \in \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q};\;\; \|u\|_{\ell_\beta} < \infty\Big\},$$

де $\|u\|_{\ell_\beta} = \inf\limits_{u=\sum u_n} \Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n(\beta-1)} \|u_n\|^{\beta}_{\theta,q,r,l} \Big)^{1/\beta}$. Для всіх $1 \le q < \infty$ позначаємо

$$\mathcal{E}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big) :=$$

$$\bigcup_{\nu(n)>0} \mathcal{E}_q^{\nu(n)}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big). \qquad (6)$$

Теорема 2. *Справедлива наступна рівність*

$$L_2(\Omega) = \Big\{ u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n : \quad u_n \in Lin \Big\{ \mathcal{R}_k : |\lambda_k| < \min\big(\nu(n)^{\frac{1}{r+1}},\, \nu(n)^{\frac{1}{l+1}}\big) \Big\} \Big\}, \qquad (7)$$

де $\mathcal{R}_k$ — кореневий підпростір оператора $\overline{A}$, що відповідає власному значенню $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

Д о в е д е н н я. Достатньо показати, що виконується рівність

$$\ell_\beta\big[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big)\big] =$$

$$\overline{\mathcal{E}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big)}, \qquad (8)$$

де замикання в нормі простору $\big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}$.

Для елементів $u \in \mathcal{E}_q^{\nu(n)}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big)$, маємо

$$\|u\|_{\ell_\beta} \le 2^{\beta-1} \lim_{n\to\infty} \|u\|_{\theta,q,r,l} = 2^{\beta-1} \|u\|_{\left(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\right)_{\theta,q}}.$$

В силу нерівності Гельдера

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\ell_\beta} \le 2^{\beta-1} \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\theta,q,r,l} \le 2^{\beta-1} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\beta-1)} \|u_n\|^{\beta}_{\theta,q,r,l} \Big)^{1/\beta}$$

ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно збіжні $\ell_\beta\big[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}), W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big)\big]$. Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\left(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\right)_{\theta,q}} \le \Big(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\beta-1)} \|u_n\|^{\beta}_{\theta,q,r,l} \Big)^{1/\beta},$$

то ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ також абсолютно збіжні в $\big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}$. Отже, для $\varepsilon > 0$ існує таке N, що

$$\Big\| u - \sum_{n=1}^{N} u_n \Big\|_{\ell_\beta} = \Big\| \sum_{n>N} u_n \Big\|_{\ell_\beta} \le \sum_{n>N} \|u_n\|_{\ell_\beta} \le$$

$$2^{\beta-1} \sum_{n>N} \|u_n\|_{\left(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\right)_{\theta,q}} < \varepsilon.$$

Далі, з нерівностей

$$\|u\|_{\left(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\right)_{\theta,q}} \le \inf_{u=\sum u_n} \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\left(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\right)_{\theta,q}} \le$$

$$\inf_{u=\sum u_n} \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\theta,q,r,l} \le \|u\|_{\ell_\beta},$$

маємо

$$\|u\|_{\left(W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}),\,W_2^{2l}(\Omega;\,\sigma^{2l})\right)_{\theta,q}} \le \|u\|_{\ell_\beta} \le 2^{\beta-1}\|u\|_{\left(W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}),\,W_2^{2l}(\Omega;\,\sigma^{2l})\right)_{\theta,q}}$$

для всіх $u \in \mathcal{E}_q^{\nu(n)}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big)$. З (6) випливає, що остання нерівність виконується для всіх $u \in \mathcal{E}\big(\overline{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2l}(\Omega;\, \sigma^{2l})\big)_{\theta,q}\big)$, що і доводить рівність (8).

Рівність (7) випливає тепер із рівностей (4) та (8).

1. *Лопушанський О.В.* Операторне числення на ультрагладких векторах // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, №4. – С. 502–513.
2. *Радыно Я.В.* Пространство векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. – 1983. – Т. 27, №9. – С. 791–793.
3. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы: Пер. с англ. – М: Мир, 1980. – 664 с.
4. *Baouendi M. S., Goulaouic C.* Étude de la régularité et du spectre d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1968. – V. 266. – P. A336–A338.
5. *Baouendi M. S., Goulaouic C.* Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1969. – V. 34. – P. 361–379.
6. *Lopushansky O. V., Dmytryshyn M. I.* Vectors of exponential type of operators with discrete spectrum // Математичні студії. Праці Львівського матем. т-ва. – 1998. – Т. 9, №1. – С. 70–77.
7. *Lopushansky O., Dmytryshyn M.* Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum. // Chapter 12 in book *„General Topology in Banach Spaces"*. Nova Sci. Publ., Huntington, New York. – 2001. – P. 137–145.
8. *Lopushansky O., Dmytryshyn M.* Interpolation of spectral subspaces of the unbounded operators in Banach spaces // Demonstratio Mathematica. – 2004. – V. 37, №1. – P. 149–158.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТРИКОМИ

Установлены интерполяционные свойства спектральных подпространств дифференциальных операторов Трикоми. Приведены спектральные разложения таких операторов.

INTERPOLATION OF SPECTRAL SUBSPACES OF TRICOMI DIFFERENTIAL OPERATORS

The interpolation properties of Tricomi differential operators are established. The spectral decompositions of such operators are given.

Прикарпатський університет
ім. В. Стефаника, Івано–Франківськ

Отримано
10.03.03