УДК 517.958: 536.24: 539.18

В. С. Попович, О. М. Вовк

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОНДУКТИВНО-ПРОМЕНЕВОГО ТЕПЛООБМІНУ МІЖ ЦИЛІНДРИЧНОЮ ТА N -КУТНОЮ ПРИЗМАТИЧНОЮ ОБОЛОНКАМИ

Записано математичну модель і запропоновано аналітично-чисельну методику розв'язування задачі кондуктивно-променевого теплообміну між циліндричною оболонкою і поверхнею N-кутної призми. Для апроксимації густини потоку падаючої променевої енергії використано восьмивузлові граничні елементи.

Вступ. Значна кількість приладів теплотехніки, ядерної енергетики, ракетної техніки, металургії, фотоелектроніки є багатоелементними конструкціями, які працюють в умовах різких перепадів температур. Тому при визначенні температурних полів їх елементів необхідно враховувати як променевий, так і кондуктивний теплообмін між ними. У переважній більшості робіт ці процеси розглядаються відокремлено, тобто вважають відомими густини теплових потоків падаючої променевої енергії і визначають спричинений ними розподіл температурного поля або вважають відомим розподіл температурного поля і знаходять густини теплових потоків [4–6]. У роботі [3] побудовано точнішу модель для опису променево-кондуктивного теплообміну між двома циліндричними оболонками у випадку постійних коефіцієнтів поглинання і відбиття. Метою цієї роботи є побудова алгоритму розв'язування задачі променево-кондуктивного теплообміну між циліндричною і N-кутною призматичною оболонками, коли коефіцієнти поглинання та відбиття залежать від координат.

Постановка та математична модель задачі. Розглянемо задачу променево-кондуктивного теплообміну між циліндричною оболонкою Y^{g} радіуса $R^{0\mathrm{g}}$ і довжини Z^{g} та прямою N-гранною призматичною оболонкою Y^{f} висоти Z^{f}, яка паралельна до твірної циліндричної оболонки. Призматична оболонка розміщена всередині циліндричної, а їх основи лежать в одній площині.

Оскільки надалі будемо використовувати чотирикутні елементи дискретизації, то для зручності подамо верхню основу призматичної оболонки (N-кутник) у вигляді L чотирикутників, де $L \ge 2$.

Позначимо через Ω^{g} внутрішню поверхню Y^{g}, а через Ω^{f} – зовнішню поверхню Y^{f}; $\Omega^{\mathrm{f}} = \bigcup \Omega^{\mathrm{f}s}$, $s = 1,\ldots,N+L$ ($s = 1,\ldots,N$ відповідає бічним граням призматичної оболонки, $s = N+1,\ldots,N+L$ – чотирикутникам розбиття верхньої основи). Вважаючи, що розподіли температури $T^{\mathrm{g}}(x)$, $T^{\mathrm{f}s}(x)$ відповідно на Ω^{g} і на $\Omega^{\mathrm{f}s}$, $s = N+1,\ldots,N+L$, є відомими функціями, розглянемо кондуктивний теплообмін на бічних гранях призматичної оболонки $\Omega^{\mathrm{f}s}$, $s = 1,\ldots,N$, та променевий між поверхнями циліндричної Ω^{g} і призматичної Ω^{f} оболонок. Причому функції $T^{\mathrm{f}s}(x)$ на межі верхньої грані призматичної оболонки приймають сталі значення T^{+}, а на межі нижньої грані – T^{-}, де під x розуміємо збірну координату точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ у глобальній системі координат $Ox_1x_2x_3$.

Для зручності процеси теплопровідності будемо розглядати в локальних системах координат $O_{\mathrm{f}s}x_{1\mathrm{f}s}x_{2\mathrm{f}s}$, $s = 1,\ldots,N$, пов'язаних з бічними гранями призматичної оболонки, а променевий теплообмін – у глобальній системі координат $Ox_1x_2x_3$. Припускаючи, що поверхні Ω^{g}, $\Omega^{\mathrm{f}s}$ є сірими, а коефіцієнти поглинання $A^{\mathrm{g}}, A^{\mathrm{f}s}$ та відбиття $R^{\mathrm{g}}, R^{\mathrm{f}s}$ є відомими функціями від координат, запишемо систему рівнянь і крайових умов, що описують цей процес:

– рівняння теплопровідності для визначення температури $T^{\mathrm{f}s}$ у кожній з бічних граней призматичної оболонки

$$\frac{\partial^2 T^{\mathrm{f}s}}{\partial x_{1\mathrm{f}s}^2} + \frac{\partial^2 T^{\mathrm{f}s}}{\partial x_{2\mathrm{f}s}^2} = -\frac{1}{\delta^{\mathrm{f}s}\lambda^{\mathrm{f}s}} q_r^{\mathrm{f}s}, \qquad s = 1,\ldots,N; \tag{1}$$

– інтегральні рівняння для визначення густин потоків $E^{\Pi\mathrm{g}}$, $E^{\Pi\mathrm{f}s}$ падаючої променевої енергії на Ω^{g}, $\Omega^{\mathrm{f}s}$ і потоків власного випромінювання $E^{\mathrm{Vf}s}$ на бічних гранях призматичної оболонки, $s = 1,\ldots,N$ [6]:

$$E^{\Pi\mathrm{g}}(\xi) - \int_{\Omega^{\mathrm{g}}} R^{\mathrm{g}}(x)E^{\Pi\mathrm{g}}(x)\,d\varphi_{\mathrm{g}}^{\Pi\mathrm{g}}(x) - \sum_{s=1}^{N+L} \int_{\Omega^{\mathrm{f}s}} R^{\mathrm{f}s}(x)E^{\Pi\mathrm{f}s}(x)\,d\varphi_{\mathrm{f}s}^{\Pi\mathrm{g}}(x) =$$

$$= \int_{\Omega^{\mathrm{g}}} A^{\mathrm{g}}(x)E^{\mathrm{Vg}}(x)\,d\varphi_{\mathrm{g}}^{\Pi\mathrm{g}}(x) + \sum_{s=1}^{N+L} \int_{\Omega^{\mathrm{f}s}} A^{\mathrm{f}s}(x)E^{\mathrm{Vf}s}(x)\,d\varphi_{\mathrm{f}s}^{\Pi\mathrm{g}}(x), \tag{2}$$

$$E^{\Pi\mathrm{f}s}(\xi) - \int_{\Omega^{\mathrm{g}}} R^{\mathrm{g}}(x)E^{\Pi\mathrm{g}}(x)\,d\varphi_{\mathrm{g}}^{\Pi\mathrm{f}s}(x) = \int_{\Omega^{\mathrm{g}}} A^{\mathrm{g}}(x)E^{\mathrm{Vg}}(x)\,d\varphi_{\mathrm{g}}^{\Pi\mathrm{f}s}(x); \tag{3}$$

– умови рівності температур на ребрах нижньої і верхньої грані призматичної оболонки заданим сталим значенням T^-, T^+:

$$T^{\mathrm{f}1}(x_{1\mathrm{f}1}, x_{2f1}^-) = T^{\mathrm{f}2}(x_{1\mathrm{f}2}, x_{2\mathrm{f}2}^-) = \ldots = T^{\mathrm{f}N}(x_{1\mathrm{f}N}, x_{2\mathrm{f}N}^-) = T^-, \tag{4}$$

$$T^{\mathrm{f}1}(x_{1\mathrm{f}1}, x_{2\mathrm{f}1}^+) = T^{\mathrm{f}2}(x_{1\mathrm{f}2}, x_{2\mathrm{f}2}^+) = \ldots = T^{\mathrm{f}N}(x_{1\mathrm{f}N}, x_{2\mathrm{f}N}^+) = T^+; \tag{5}$$

– умови рівності температур і потоків на бічних ребрах призматичної оболонки:

$$T^{\mathrm{f}1}(x_{1\mathrm{f}1}^+, x_{2\mathrm{f}1}) = T^{\mathrm{f}2}(x_{1\mathrm{f}2}^-, x_{2\mathrm{f}2}), \qquad T^{\mathrm{f}2}(x_{1\mathrm{f}2}^+, x_{2\mathrm{f}2}) = T^{\mathrm{f}3}(x_{1\mathrm{f}3}^-, x_{2\mathrm{f}3}), \qquad \ldots,$$

$$T^{\mathrm{f}N}(x_{1\mathrm{f}N}^+, x_{2\mathrm{f}N}) = T^{\mathrm{f}1}(x_{1\mathrm{f}1}^-, x_{2\mathrm{f}1}), \tag{6}$$

$$\lambda^{\mathrm{f}1} \frac{\partial T^{\mathrm{f}1}(x_{1\mathrm{f}1}^+, x_{2\mathrm{f}1})}{\partial x_{1\mathrm{f}1}} = -\lambda^{\mathrm{f}2} \frac{\partial T^{\mathrm{f}2}(x_{1\mathrm{f}2}^-, x_{2\mathrm{f}2})}{\partial x_{1\mathrm{f}2}},$$

$$\lambda^{\mathrm{f}2} \frac{\partial T^{\mathrm{f}2}(x_{1\mathrm{f}2}^+, x_{2\mathrm{f}2})}{\partial x_{1\mathrm{f}2}} = -\lambda^{\mathrm{f}3} \frac{\partial T^{\mathrm{f}3}(x_{1\mathrm{f}3}^-, x_{2\mathrm{f}3})}{\partial x_{1\mathrm{f}3}}, \qquad \ldots,$$

$$\lambda^{\mathrm{f}N} \frac{\partial T^{\mathrm{f}N}(x_{1\mathrm{f}N}^+, x_{2\mathrm{f}N})}{\partial x_{1\mathrm{f}N}} = -\lambda^{\mathrm{f}1} \frac{\partial T^{\mathrm{f}1}(x_{1\mathrm{f}1}^-, x_{2\mathrm{f}1})}{\partial x_{1\mathrm{f}1}}. \tag{7}$$

Тут $q_r^{\mathrm{f}s} = A^{\mathrm{f}s}(E^{\Pi\mathrm{f}s} - E^{\mathrm{Vf}s})$ – тепловий потік через грань $\Omega^{\mathrm{f}s}$, $s = 1,\ldots,N$; $\lambda^{\mathrm{f}s}$, $\delta^{\mathrm{f}s}$ – відповідно коефіцієнт теплопровідності матеріалу й товщина s-ї грані призматичної оболонки; $E^{\mathrm{Vg}} = \sigma(T^{\mathrm{g}})^4$, $E^{\mathrm{Vf}s} = \sigma(T^{\mathrm{f}s})^4$ – густини потоків власного випромінювання абсолютно чорного тіла при температурах T^{g} і $T^{\mathrm{f}s}$ відповідно, σ – стала Больцмана; $d\varphi_{\mu}^{\Pi\zeta}(x) = \dfrac{C(x,\xi)C(\xi,x)}{\pi r^2(x,\xi)}\,d\Omega^{\mu}$ – елементарні кутові коефіцієнти випромінювання, де $C(x,\xi) = \cos(\psi(x,\xi))\,\chi^*$, $\psi(x,\xi)$ – кут між нормаллю до поверхні в точці x і радіусом-вектором між точками x і ξ, причому $x \in \Omega^{\mu}$, а $\xi \in \Omega^{\zeta}$; $\chi^* = 1$, якщо точку x видно з точки спостереження ξ, і $\chi^* = 0$, якщо точку x з точки спостереження ξ не видно; $r(x,\xi)$ – довжина радіуса-вектора, що з'єднує точки x і ξ, $\mu,\ \zeta = \{\mathrm{f},\ \mathrm{g}\}$. У рівняннях (2), (3) для зручності використано координати ξ_i, які співпадають з координатами x_i, $i = 1,2,3$; $(x_{1\mathrm{f}s}^-, x_{2\mathrm{f}s}^-)$, $(x_{1\mathrm{f}s}^+, x_{2\mathrm{f}s}^-)$, $(x_{1\mathrm{f}s}^+, x_{2\mathrm{f}s}^+)$, $(x_{1\mathrm{f}s}^-, x_{2\mathrm{f}s}^+)$ – координати вершин прямокутників $\Omega^{\mathrm{f}s}$ у локальних системах координат, де знак «$-$» відповідає найменшому, а знак «$+$» – найбільшому значенню відповідної локальної координати.

Аналітично-чисельна методика розв'язування задачі. Дискретизуємо область Ω^{g} з кроками H_z^{g} у напрямку z і H_φ^{g} – у напрямку φ, використовуючи для зручності циліндричну систему координат $R^{0\mathrm{g}}, \varphi, z$. Як наслідок отримаємо $\Omega^{\mathrm{g}} = \bigcup \Omega_{n\ell}^{\mathrm{g}}$, $n = 1,\ldots,L^{\mathrm{g}}$, $\ell = 1,\ldots,I^{\mathrm{g}}$, де L^{g} – кількість елементів розбиття за координатою z, I^{g} – кількість елементів розбиття за координатою φ. Координати вершин елементів дискретизації у глобальній системі координат, початок якої співпадає з початком локальної циліндричної системи, визначаються таким чином:

$$x_{1n\ell}^1 = R^{0\mathrm{g}} \cos(H_\varphi^{\mathrm{g}}(\ell-1)), \quad x_{2n\ell}^1 = R^{0\mathrm{g}} \sin(H_\varphi^{\mathrm{g}}(\ell-1)), \quad x_{3n\ell}^1 = H_z^{\mathrm{g}}(n-1),$$

$$x_{1n\ell}^2 = R^{0\mathrm{g}} \cos(H_\varphi^{\mathrm{g}}\ell), \qquad x_{2n\ell}^2 = R^{0\mathrm{g}} \sin(H_\varphi^{\mathrm{g}}\ell), \qquad x_{3n\ell}^2 = H_z^{\mathrm{g}}(n-1),$$

$$x_{1n\ell}^3 = x_{1n\ell}^2, \quad x_{2n\ell}^3 = x_{2n\ell}^2, \quad x_{3n\ell}^3 = H_z^{\mathrm{g}} n,$$

$$x_{1n\ell}^4 = x_{1n\ell}^1, \quad x_{2n\ell}^4 = x_{2n\ell}^1, \quad x_{3n\ell}^4 = x_{3n\ell}^3.$$

Оскільки надалі будемо використовувати восьмивузлові граничні елементи, введемо ще одну систему вузлів, розміщених посередині сторін поверхневих елементів $\Omega_{n\ell}^{\mathrm{g}}$, координати яких визначаються формулами

$$x_{1n\ell}^5 = R^{0\mathrm{g}} \cos(H_\varphi^{\mathrm{g}}(\ell-1)/2), \quad x_{2n\ell}^5 = R^{0\mathrm{g}} \sin(H_\varphi^{\mathrm{g}}(\ell-1)/2), \quad x_{3n\ell}^5 = x_{3n\ell}^1,$$

$$x_{1n\ell}^6 = x_{1n\ell}^2, \quad x_{2n\ell}^6 = x_{2n\ell}^2, \quad x_{3n\ell}^6 = (x_{3n\ell}^3 - x_{3n\ell}^2)/2,$$

$$x_{1n\ell}^7 = x_{1n\ell}^5, \quad x_{2n\ell}^7 = x_{2n\ell}^5, \quad x_{3n\ell}^7 = x_{3n\ell}^3,$$

$$x_{1n\ell}^8 = x_{1n\ell}^1, \quad x_{2n\ell}^8 = x_{2n\ell}^1, \quad x_{3n\ell}^8 = x_{3n\ell}^6.$$

Для дискретизації області Ω^{f} розглянемо таке відображення:

$$x_{j\mathrm{f}s} = \sum_{i=1}^{8} \varphi_i^{\mathrm{f}s} x_{j\mathrm{f}s}^i, \qquad x_{\mathrm{f}s} \in \Omega^{\mathrm{f}s}, \qquad j = 1,2, \tag{8}$$

де $x_{j\mathrm{f}s}^i$, $j = 1,2$, $i = 1,\ldots,4$, – локальні координати вершин чотирикутників $\Omega^{\mathrm{f}s}$, які дорівнюють: $x_{1\mathrm{f}s}^1 = x_{1\mathrm{f}s}^-$, $x_{2\mathrm{f}s}^1 = x_{2\mathrm{f}s}^-$, $x_{1\mathrm{f}s}^2 = x_{1\mathrm{f}s}^+$, $x_{2\mathrm{f}s}^2 = x_{2\mathrm{f}s}^-$, $x_{1\mathrm{f}s}^3 = x_{1\mathrm{f}s}^+$, $x_{2\mathrm{f}s}^3 = x_{2\mathrm{f}s}^+$, $x_{1\mathrm{f}s}^4 = x_{1\mathrm{f}s}^-$, $x_{2\mathrm{f}s}^4 = x_{2\mathrm{f}s}^+$, а $x_{j\mathrm{f}s}^i$, $j = 1,2$, $i = 5,\ldots,8$, – координати вузлів, розміщених посередині сторін чотирикутників $\Omega^{\mathrm{f}s}$; $\varphi_i^{\mathrm{f}s}$, $i = 1,\ldots,8$, – інтерполюючі функції, які визначаються наступними виразами: $\varphi_1^{\mathrm{f}s} = \theta_1\theta_2\theta_3/4$, $\varphi_2^{\mathrm{f}s} = \theta_4\theta_2\theta_5/4$, $\varphi_3^{\mathrm{f}s} = \theta_4\theta_6\theta_7/4$, $\varphi_4^{\mathrm{f}s} = \theta_1\theta_6\theta_8/4$, $\varphi_5^{\mathrm{f}s} = \theta_9\theta_2/2$, $\varphi_6^{\mathrm{f}s} = \theta_{10}\theta_4/2$, $\varphi_7^{\mathrm{f}s} = \theta_9\theta_5/2$, $\varphi_8^{\mathrm{f}s} = \theta_{10}\theta_1/2$, де $\theta_1 = 1 - \eta_1^{\mathrm{f}s}$, $\theta_2 = 1 - \eta_2^{\mathrm{f}s}$, $\theta_3 = -\eta_1^{\mathrm{f}s} - \eta_2^{\mathrm{f}s} - 1$, $\theta_4 = 1 + \eta_1^{\mathrm{f}s}$, $\theta_5 = \eta_1^{\mathrm{f}s} - \eta_2^{\mathrm{f}s} - 1$, $\theta_6 = 1 + \eta_2^{\mathrm{f}s}$,

$\theta_7 = -\eta_1^{fs} + \eta_2^{fs} - 1, \quad \theta_8 = -\eta_1^{fs} + \eta_2^{fs} - 1, \quad \theta_9 = 1 - (\eta_1^{fs})^2, \quad \theta_{10} = 1 - (\eta_2^{fs})^2$,

$\eta_1^{fs} \in [-1,1]$, $\eta_2^{fs} \in [-1,1]$ – локальні криволінійні координати [2].

На підставі (8) кожна з бічних граней призматичної оболонки, яка є чотирикутником, а також кожен із чотирикутників, на які розбита верхня основа, відображаються на квадрат зі стороною 2. Розбивши квадрат на L^{fs} частин за координатою η_2^{fs} та на I^{fs} частин – за координатою η_1^{fs}, отримаємо розбиття і для Ω^{fs}. Таким чином, Ω^{fs} можна подати як об'єднання чотирикутних елементів $\Omega_{m\alpha}^{\mathrm{fs}}$, $m = 1,\dots,L^{\mathrm{fs}}$, $\alpha = 1,\dots,I^{\mathrm{fs}}$, координати вузлів яких у глобальній системі координат визначаються за формулами (8), де в правій частині замість координат вузлів чотирикутників Ω^{fs} у локальних системах $O_{\mathrm{fs}}x_{1\mathrm{fs}}x_{2\mathrm{fs}}$ беруться їх координати в глобальній системі, а також відповідні значення локальних координат $\eta_1^{\mathrm{fs}}, \eta_2^{\mathrm{fs}}$. Наприклад, для елемента з номерами m, α можна записати таку відповідність між номером вузла та значенням локальних координат $\eta_1^{\mathrm{fs}}, \eta_2^{\mathrm{fs}}$:

1-й вузол – $\eta_1^{1\mathrm{fs}} = -1 + 2(\alpha - 1)(I^{\mathrm{fs}})^{-1}$, $\quad \eta_2^{1\mathrm{fs}} = -1 + 2(m-1)(L^{\mathrm{fs}})^{-1}$,

2-й вузол – $\eta_1^{2\mathrm{fs}} = -1 + 2\alpha(I^{\mathrm{fs}})^{-1}$, $\quad \eta_2^{2\mathrm{fs}} = -1 + 2(m-1)(L^{\mathrm{fs}})^{-1}$,

3-й вузол – $\eta_1^{3\mathrm{fs}} = -1 + 2\alpha(I^{\mathrm{fs}})^{-1}$, $\quad \eta_2^{3\mathrm{fs}} = -1 + 2m(L^{\mathrm{fs}})^{-1}$,

4-й вузол – $\eta_1^{4\mathrm{fs}} = -1 + 2(\alpha - 1)(I^{\mathrm{fs}})^{-1}$, $\quad \eta_2^{4\mathrm{fs}} = -1 + 2m(L^{\mathrm{fs}})^{-1}$,

5-й вузол – $\eta_j^{5\mathrm{fs}} = (\eta_j^{1\mathrm{fs}} + \eta_j^{2\mathrm{fs}})/2$,

6-й вузол – $\eta_j^{6\mathrm{fs}} = (\eta_j^{2\mathrm{fs}} + \eta_j^{3\mathrm{fs}})/2$,

7-й вузол – $\eta_j^{7\mathrm{fs}} = (\eta_j^{3\mathrm{fs}} + \eta_j^{4\mathrm{fs}})/2$,

8-й вузол – $\eta_j^{8\mathrm{fs}} = (\eta_j^{4\mathrm{fs}} + \eta_j^{1\mathrm{fs}})/2$, $\quad j = 1,2$.

Система рівнянь (2), (3) для дискретизованих Ω^{g}, Ω^{fs} матиме вигляд

$$\sum_{\varkappa,\gamma=1}^{L^{\mathrm{g}},I^{\mathrm{g}}} E_{\varkappa\gamma}^{\Pi\mathrm{g}} \chi_{\varkappa\gamma}^{\mathrm{g}} - \sum_{s=1}^{N+L} \sum_{m,\alpha=1}^{L^{\mathrm{fs}},I^{\mathrm{fs}}} \Phi_{m\alpha\mathrm{fs}}^{\varkappa\gamma\mathrm{g}}(R^{\mathrm{fs}}E^{\Pi}) - \sum_{n,\ell=1}^{L^{\mathrm{g}},I^{\mathrm{g}}} \Phi_{n\ell\mathrm{g}}^{\varkappa\gamma\mathrm{g}}(R^{\mathrm{g}}E^{\Pi}) =$$

$$= \sum_{s=1}^{N+L} \sum_{m,\alpha=1}^{L^{\mathrm{fs}},I^{\mathrm{fs}}} \Phi_{m\alpha\mathrm{fs}}^{\varkappa\gamma\mathrm{g}}(A^{\mathrm{fs}}E^{\mathrm{V}}) + \sum_{n,\ell=1}^{L^{\mathrm{g}},I^{\mathrm{g}}} \Phi_{n\ell\mathrm{g}}^{\varkappa\gamma\mathrm{g}}(A^{\mathrm{g}}E^{\mathrm{V}}), \tag{9}$$

$$\sum_{s=1}^{N+L} \sum_{j,\beta=1}^{L^{\mathrm{fs}},I^{\mathrm{fs}}} E_{j\beta}^{\Pi\mathrm{fs}} \chi_{j\beta}^{\mathrm{fs}} - \sum_{n,l=1}^{L^{\mathrm{g}},I^{\mathrm{g}}} \Phi_{n\ell\mathrm{g}}^{j\beta\mathrm{fs}}(R^{\mathrm{g}}E^{\Pi}) = \sum_{n,\ell=1}^{L^{\mathrm{g}},I^{\mathrm{g}}} \Phi_{n\ell\mathrm{g}}^{j\beta\mathrm{fs}}(A^{\mathrm{g}}E^{\mathrm{V}}), \tag{10}$$

де $\Phi_{wv\zeta}^{yz\mu}(K^{\zeta}E^{i}) = \int\limits_{\Omega_{wv}^{\zeta}} K^{\zeta}E_{wv}^{i\zeta}\, d\varphi_{wv\zeta}^{\Pi yz\mu}$, $\quad i = \{\mathrm{V},\Pi\}$, $\quad \sum\limits_{w,v=1}^{L^{\zeta},I^{\zeta}} b_{wv} = \sum\limits_{w=1}^{L^{\zeta}} \sum\limits_{v=1}^{I^{\zeta}} b_{wv}$,

$\chi_{wv}^{\zeta} = \begin{cases} 1, & x_{wv}^{\zeta} \in \Omega_{wv}^{\zeta}, \\ 0, & x_{wv}^{\zeta} \notin \Omega_{wv}^{\zeta}, \end{cases}$ $\quad K^{\zeta} = \{R^{\zeta}, A^{\zeta}\}$, $\quad \zeta, \mu = \{\mathrm{fs}, \mathrm{g}\}$; $E_{m\alpha}^{\Pi\mathrm{fs}}$, $E_{n\ell}^{\Pi\mathrm{g}}$ – густини падаючих променевих енергій на $\Omega_{m\alpha}^{\mathrm{fs}}$, $\Omega_{n\ell}^{\mathrm{g}}$ відповідно.

Якщо використати відображення, аналогічне до (8), і для елементів дискретизації циліндричної оболонки та перейти в (9), (10) до нових змінних інтегрування η_1^ζ, η_2^ζ, $\zeta = \{fs, g\}$, отримаємо таку систему інтегральних рівнянь:

$$\sum_{x,\gamma=1}^{L^g, I^g} E_{x\gamma}^{\Pi g}\chi_{x\gamma}^g - \sum_{s=1}^{N+L}\sum_{m,\alpha=1}^{L^{fs}, I^{fs}} Q_{m\alpha fs}^{x\gamma g}(R^{fs}E^\Pi) - \sum_{n,\ell=1}^{L^g, I^g} Q_{n\ell g}^{x\gamma g}(R^g E^\Pi) =$$

$$= \sum_{s=1}^{N+L}\sum_{m,\alpha=1}^{L^{fs}, I^{fs}} Q_{m\alpha fs}^{x\gamma g}(A^{fs}E^V) + \sum_{n,\ell=1}^{L^g, I^g} Q_{n\ell g}^{x\gamma g}(A^g E^V), \tag{11}$$

$$\sum_{s=1}^{N+L}\sum_{j,\beta=1}^{L^{fs}, I^{fs}} E_{j\beta}^{\Pi fs}\chi_{j\beta}^{fs} - \sum_{n,\ell=1}^{L^g, I^g} Q_{n\ell g}^{j\beta fs}(R^g E^\Pi) = \sum_{n,\ell=1}^{L^g, I^g} Q_{n\ell g}^{j\beta fs}(A^g E^V), \tag{12}$$

де

$$Q_{wv\mu}^{yz\zeta}(K^\mu E^\Pi) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K^\mu E_{wv}^{\Pi\mu} C_{wv\mu}^{yz\zeta} C_{yz\zeta}^{wv\mu} \frac{\left|G_{wv}^\mu\right|}{\pi\left(r_{yz\zeta}^{wv\mu}\right)^2} d\eta_1^\mu d\eta_2^\mu, \tag{13}$$

$\left|G_{wv}^\mu\right| = \left[(g_{1wv}^\mu)^2 + (g_{2wv}^\mu)^2 + (g_{3wv}^\mu)^2\right]^{1/2}$ – функція Ґаусса для переходу від поверхневого інтеграла по елементу до інтеграла по квадрату [2];

$$C_{yz\zeta}^{wv\mu} = \sum_{i=1}^{3} r_{iwv\mu}^{yz\zeta} g_{iwv}^\mu \left(\left|r_{wv\mu}^{yz\zeta}\right|\left|G_{wv}^\mu\right|\right)^{-1}, \quad C_{wv\mu}^{yz\zeta} = \sum_{i=1}^{3} r_{iyz\zeta}^{wv\mu} g_{iyz}^\zeta \left(\left|r_{yz\zeta}^{wv\mu}\right|\left|G_{yz}^\zeta\right|\right)^{-1},$$

$r_{iyz\zeta}^{wv\mu} = x_i^\zeta - x_i^\mu(\eta_1^\mu, \eta_2^\mu)$, $r_{iwv\mu}^{yz\zeta} = x_i^\mu(\eta_1^\mu, \eta_2^\mu) - x_i^\zeta$; g_{iwv}^μ – координати вектора нормалі до елемента Ω_{wv}^μ, $i = 1, 2, 3$; $\left|r_{iwv\mu}^{yz\zeta}\right| = \left(\sum_{i=1}^{3}(x_i^\mu(\eta_1^\mu, \eta_2^\mu) - x_i^\zeta)^2\right)^{1/2}$; $x^\mu =$ $= (x_1^\mu, x_2^\mu, x_3^\mu) \in \Omega_{wv}^\mu$ (елемент інтегрування); $x^\zeta = (x_1^\zeta, x_2^\zeta, x_3^\zeta) \in \Omega_{yz}^\zeta$ (елемент спостереження); μ, $\zeta = \{fs, g\}$.

Позначимо через $E_{n\ell i}^{\Pi g}$, $E_{m\alpha i}^{\Pi fs}$, $i = 1, \ldots, 8$, густини падаючих променевих енергій у вузлах та апроксимуємо $E_{n\ell}^{\Pi g}$ на $\Omega_{n\ell}^g$ і $E_{m\alpha}^{\Pi fs}$ на $\Omega_{m\alpha}^{fs}$ аналогічно до (8):

$$E_{n\ell}^{\Pi g} \approx \sum_{i=1}^{8} E_{n\ell i}^{\Pi g}\varphi_i^g, \qquad E_{m\alpha}^{\Pi fs} \approx \sum_{i=1}^{8} E_{m\alpha i}^{\Pi fs}\varphi_i^{fs}. \tag{14}$$

Враховуючи те, що один вузол може належати чотирьом або двом елементам, і використовуючи для опису поверхневого елемента три вузли – перший, п'ятий і восьмий, можемо виразити густини падаючих променевих енергій у вузлах через $E_{wv1}^{\Pi g}$, $E_{wv5}^{\Pi g}$, $E_{wv8}^{\Pi g}$ для циліндричної оболонки:

$$E_{wv1}^{\Pi g} = E_{wq2}^{\Pi g} = E_{(w-1)q3}^{\Pi g} = E_{(w-1)v4}^{\Pi g}, \qquad w = 2, \ldots, L^g, \quad v = 1, \ldots, I^g, \tag{15}$$

$$E_{1v1}^{\Pi g} = E_{1q2}^{\Pi g}, \qquad E_{(L^g+1)v1}^{\Pi g} = E_{L^g v4}^{\Pi g} = E_{L^g q3}^{\Pi g}, \qquad v = 1, \ldots, I^g, \tag{16}$$

$$E_{wv5}^{\Pi g} = E_{(w-1)v7}^{\Pi g}, \qquad w = 2, \ldots, L^g, \quad v = 1, \ldots, I^g, \tag{17}$$

$$E_{(L^g+1)v5}^{\Pi g} = E_{L^g v7}^{\Pi g}, \quad v = 1, \ldots, I^g, \quad E_{wv8}^{\Pi g} = E_{wq6}^{\Pi g}, \quad w = 1, \ldots, L^g, \; v = 1, \ldots, I^g, \tag{18}$$

де $q = v - 1$, якщо $1 < v \le I^g$, $q = I^g$, якщо $v = 1$.

Для призматичної оболонки отримаємо такі вирази:

$$E_{wv1}^{\Pi fs} = E_{w(v-1)2}^{\Pi fs} = E_{(w-1)(v-1)3}^{\Pi fs} = E_{(w-1)v4}^{\Pi fs}, \quad w = 2, \ldots, L^{fs}, \quad v = 1, \ldots, I^{fs}, \tag{19}$$

$$E_{1v1}^{\Pi fs} = E_{1(v-1)2}^{\Pi fs}, \qquad v = 2, \ldots, I^{fs}, \qquad E_{wv5}^{\Pi fs} = E_{(w-1)v7}^{\Pi fs},$$

$$w = 2, \ldots, L^{fs}, \qquad v = 1, \ldots, I^{fs}, \tag{20}$$

$$E^{\Pi fs}_{(L^{fs}+1)v1} = E^{\Pi fs}_{L^{fs}v4} = E^{\Pi fs}_{L^{fs}(v-1)3}, \qquad v = 2,\dots,I^{fs}_m, \qquad E^{\Pi fs}_{(L^{fs}+1)11} = E^{\Pi fs}_{L^{fs}14}, \tag{21}$$

$$E^{\Pi fs}_{(L^{fs}+1)v5} = E^{\Pi fs}_{L^{fs}v7}, \qquad v = 1,\dots,I^{fs}. \tag{22}$$

Враховуючи (15)–(22), після згрупування подібних членів в (11), (12) отримаємо таку систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення густин потоків падаючої променевої енергії у вузлах:

$$\begin{aligned}
E^{\Pi g}_{æ\gamma d} &- \sum_{s=1}^{N+L} \sum_{m,\alpha=1}^{L^{fs},I^{fs}} \left(E^{\Pi fs}_{m\alpha 1} B^{æ\gamma g}_{m\alpha 1fs} + E^{\Pi fs}_{m\alpha 5} B^{æ\gamma g}_{m\alpha 5fs} + E^{\Pi fs}_{m\alpha 8} B^{æ\gamma g}_{m\alpha 8fs}\right) - \\
&- \sum_{n,\ell=1}^{L^g,I^g} \left(E^{\Pi g}_{n\ell 1} B^{æ\gamma g}_{n\ell 1g} + E^{\Pi g}_{n\ell 5} B^{æ\gamma g}_{n\ell 5g} + E^{\Pi g}_{n\ell 8} B^{æ\gamma g}_{n\ell 8g}\right) - \\
&- \sum_{s=1}^{N+L} \sum_{\alpha=1}^{I^{fs}} \left(E^{\Pi fs}_{(L^{fs}+1)\alpha 1} B^{æ\gamma g}_{(L^{fs}+1)\alpha 1fs} + E^{\Pi fs}_{(L^{fs}+1)\alpha 5} B^{æ\gamma g}_{(L^{fs}+1)\alpha 5fs}\right) - \\
&- \sum_{\ell=1}^{I^g} \left(E^{\Pi g}_{(L^g+1)\ell 1} B^{æ\gamma g}_{(L^g+1)\ell 1g} + E^{\Pi g}_{(L^g+1)\ell 5} B^{æ\gamma g}_{(L^g+1)\ell 5g}\right) = \\
&= \sum_{m,\alpha=1}^{L^{fs}+1,I^{fs}} Q^{æ\gamma g}_{m\alpha fs}\left(A^{fs}E^{V}\right) + \sum_{n,\ell=1}^{L^g+1,I^g} Q^{æ\gamma g}_{n\ell g}\left(A^g E^{V}\right), \\
&\qquad æ = 1,\dots,L^g, \qquad \gamma = 1,\dots,I^g, \qquad d = 1,5,8,
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
E^{\Pi fs}_{j\beta d} &- \sum_{n,\ell=1}^{L^g,I^g} \left(E^{\Pi g}_{n\ell 1} B^{j\beta fs}_{n\ell 1g} + E^{\Pi g}_{n\ell 5} B^{j\beta fs}_{n\ell 5g} + E^{\Pi g}_{nl8} B^{j\beta fs}_{n\ell 8g}\right) - \\
&- \sum_{\ell=1}^{I^g} \left(E^{\Pi g}_{(L^g+1)\ell 1} B^{j\beta fs}_{(L^g+1)\ell 1g} + E^{\Pi g}_{(L^g+1)\ell 5} B^{j\beta fs}_{(L^g+1)\ell 5g}\right) = \\
&= \sum_{n,\ell=1}^{L^g+1,I^g} Q^{j\beta fs}_{n\ell g}\left(A^g E^{V}\right), \quad æ = 1,\dots,L^{fs}, \ \gamma = 1,\dots,I^{fs}, \ d = 1,5,8.
\end{aligned} \tag{24}$$

Тут коефіцієнти при невідомих густинах теплових потоків падаючої променевої енергії на циліндричній оболонці мають вигляд

– *у 1-му вузлі*:

$$B^{wv\mu}_{111g} = Q^{wv\mu}_{11g}(R^g\varphi^g_1) + Q^{wv\mu}_{1I^g g}(R^g\varphi^g_2), \qquad B^{wv\mu}_{1\ell 1g} = Q^{wv\mu}_{1\ell g}(R^g\varphi^g_1) + Q^{wv\mu}_{1(\ell-1)g}(R^g\varphi^g_2),$$

$$\ell = 2,\dots,I^g,$$

$$B^{wv\mu}_{n11g} = Q^{wv\mu}_{n1g}(R^g\varphi^g_1) + Q^{wv\mu}_{nI^g g}(R^g\varphi^g_2) + Q^{wv\mu}_{(n-1)I^g g}(R^g\varphi^g_3) + Q^{wv\mu}_{(n-1)1g}(R^g\varphi^g_4),$$

$$n = 2,\dots,L^g,$$

$$B^{wv\mu}_{n\ell 1g} = Q^{wv\mu}_{n\ell g}(R^g\varphi^g_1) + Q^{wv\mu}_{n(\ell-1)g}(R^g\varphi^g_2) + Q^{wv\mu}_{(n-1)(\ell-1)g}(R^g\varphi^g_3) + Q^{wv\mu}_{(n-1)\ell g}(R^g\varphi^g_4),$$

$$n = 2,\dots,L^g, \qquad \ell = 2,\dots,I^g,$$

$$B^{wv\mu}_{(L^g+1)11g} = Q^{wv\mu}_{L^g I^g g}(R^g\varphi^g_3) + Q^{wv\mu}_{L^g 1g}(R^g\varphi^g_4), \qquad B^{wv\mu}_{(L^g+1)\ell 1g} = Q^{wv\mu}_{L^g(\ell-1)g}(R^g\varphi^g_3) +$$

$$+ Q^{wv\mu}_{L^g\ell g}(R^g\varphi^g_4), \qquad \ell = 2,\dots,I^g;$$

– *у 5-му вузлі*:

$$B^{wv\mu}_{1\ell 5g} = Q^{wv\mu}_{1\ell g}(R^g\varphi^g_5), \qquad B^{wv\mu}_{n\ell 5g} = Q^{wv\mu}_{n\ell g}(R^g\varphi^g_5) + Q^{wv\mu}_{(n-1)\ell g}(R^g\varphi^g_7),$$

$$n = 2,\dots,L^g, \qquad \ell = 1,\dots,I^g,$$

$$B^{wv\mu}_{(L^g+1)\ell 5g} = Q^{wv\mu}_{L^g\ell g}(R^g\varphi^g_7), \qquad \ell = 1,\dots,I^g;$$

– *у 8-му вузлі*:

$$B^{wv\mu}_{n18g} = Q^{wv\mu}_{nI^g g}(R^g \varphi^g_6) + Q^{wv\mu}_{n1g}(R^g \varphi^g_8), \qquad n = 1,\ldots,L^g,$$

$$B^{wv\mu}_{n\ell 8g} = Q^{wv\mu}_{n(\ell-1)g}(R^g \varphi^g_6) + Q^{wv\mu}_{n\ell g}(R^g \varphi^g_8), \quad n = 1,\ldots,L^g, \qquad \ell = 2,\ldots,I^g,$$

$$w = 1,\ldots,L^\mu + 1, \quad v = 1,\ldots,I^\mu, \quad \mu = \{\mathrm{fs}, \mathrm{g}\}.$$

Коефіцієнти при невідомих густинах теплових потоків падаючої променевої енергії на призматичній оболонці мають вигляд

– *у 1-му вузлі*:

$$B^{\varpi\gamma g}_{111fs} = Q^{\varpi\gamma g}_{11fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_1), \qquad B^{\varpi\gamma g}_{1\alpha 1fs} = Q^{\varpi\gamma g}_{1\alpha fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_1) + Q^{\varpi\gamma g}_{1(\alpha-1)fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_2),$$

$$\alpha = 2,\ldots,I^{fs},$$

$$B^{\varpi\gamma g}_{m11fs} = Q^{\varpi\gamma g}_{m1fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_1) + Q^{\varpi\gamma g}_{(m-1)1fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_4), \qquad m = 2,\ldots,L^{fs},$$

$$B^{\varpi\gamma g}_{m\alpha 1fs} = Q^{\varpi\gamma g}_{m\alpha fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_1) + Q^{\varpi\gamma g}_{m(\alpha-1)fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_2) + Q^{\varpi\gamma g}_{(m-1)(\alpha-1)fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_3) +$$

$$+ Q^{\varpi\gamma g}_{(m-1)\alpha fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_4), \quad m = 2,\ldots,L^{fs}, \quad \alpha = 2,\ldots,I^{fs},$$

$$B^{\varpi\gamma g}_{(L^{fs}+1)11fs} = Q^{\varpi\gamma g}_{L^{fs}1fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_4), \qquad B^{\varpi\gamma g}_{(L^{fs}+1)\alpha 1fs} = Q^{\varpi\gamma g}_{L^{fs}(\alpha-1)fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_3) +$$

$$+ Q^{\varpi\gamma g}_{L^{fs}\alpha fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_4), \qquad \alpha = 2,\ldots,I^{fs};$$

– *у 5-му вузлі*:

$$B^{\varpi\gamma g}_{1\alpha 5fs} = Q^{\varpi\gamma g}_{1\alpha fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_5), \qquad B^{\varpi\gamma g}_{m\alpha 5fs} = Q^{\varpi\gamma g}_{m\alpha fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_5) + Q^{\varpi\gamma g}_{(m-1)\alpha fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_7),$$

$$m = 2,\ldots,L^{fs}, \qquad \alpha = 1,\ldots,I^{fs},$$

$$B^{\varpi\gamma g}_{(L^{fs}+1)\alpha 5fs} = Q^{\varpi\gamma g}_{L^{fs}\alpha fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_7), \qquad \alpha = 1,\ldots,I^{fs};$$

– *у 8-му вузлі*:

$$B^{\varpi\gamma g}_{m18fs} = Q^{\varpi\gamma g}_{m1fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_8), \qquad B^{\varpi\gamma g}_{m\alpha 8fs} = Q^{\varpi\gamma g}_{m(\alpha-1)fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_6) + Q^{\varpi\gamma g}_{m\alpha fs}(R^{fs}\varphi^{fs}_6),$$

$$m = 1,\ldots,L^{fs}, \qquad \alpha = 2,\ldots,I^{fs}.$$

За початкове наближення для температурного поля на бічних гранях призматичної оболонки виберемо розв'язок задачі при відсутності випромінювання. Якщо $\lambda^{fs} = \lambda$, тобто матеріал призматичної оболонки є однорідним, то нульове наближення можна записати у явному вигляді:

$$T^{fs}_0 = \frac{T^+ - T^-}{x^+_{1fs} - x^-_{1fs}} x_{1fs} + \frac{T^- x^+_{1fs} - T^+ x^-_{1fs}}{x^+_{1fs} - x^-_{1fs}}. \tag{25}$$

Початкове наближення використаємо для знаходження спочатку густин падаючих променевих енергій, а потім – температурного поля T^{fs} у задачі променево-кондуктивного теплообміну (1)–(7). Обчислимо значення T^{fs} у вузлах дискретизації, використовуючи апроксимацію, аналогічну до (8). Отримані T^{0fs}_{wv1}, T^{0fs}_{wv5}, T^{0fs}_{wv8} підставимо в систему рівнянь (23), (24), розв'язавши яку одержимо початкове наближення для густин потоків падаючої променевої енергії у вузлах $E^{0\Pi\zeta}_{wv1}$, $E^{0\Pi\zeta}_{wv5}$, $E^{0\Pi\zeta}_{wv8}$, $\zeta = \{g, \mathrm{fs}\}$.

Запишемо вираз для густини падаючої променевої енергії на елементі $\Omega^{fs}_{m\alpha}$, використовуючи отримані значення і рівності (15)–(22):

$$E^{0\Pi fs}_{m\alpha}(x) = E^{0\Pi fs}_{m\alpha 1}\varphi^{fs}_{1m\alpha}(x) + E^{0\Pi fs}_{m(\alpha+1)1}\varphi^{fs}_{2m\alpha}(x) + E^{0\Pi fs}_{(m+1)(\alpha+1)1}\varphi^{fs}_{3m\alpha}(x) +$$

$$+ E^{0\Pi fs}_{(m+1)\alpha 1}\varphi^{fs}_{4m\alpha}(x) + E^{0\Pi fs}_{m\alpha 5}\varphi^{fs}_{5m\alpha}(x) + E^{0\Pi fs}_{m(\alpha+1)8}\varphi^{fs}_{6m\alpha}(x) +$$

$$+ E^{0\Pi fs}_{(m+1)\alpha 5}\varphi^{fs}_{7m\alpha}(x) + E^{0\Pi fs}_{m\alpha 8}\varphi^{fs}_{8m\alpha}(x).$$

Тоді

$$E^{0\Pi fs} = \sum_{m,\alpha=1}^{L^{fs}, I^{fs}} E^{0\Pi fs}_{m\alpha}(x)\,\chi_{m\alpha}(x), \qquad \chi_{m\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega^{fs}_{m\alpha}, \\ 0, & x \notin \Omega^{fs}_{m\alpha}. \end{cases}$$

Підставивши вираз для густини падаючої променевої енергії $E^{0\Pi fs}$ у праву частину рівняння (1), отримаємо задачу

$$\frac{\partial^2 T^{fs}}{\partial x_{1fs}^2} + \frac{\partial^2 T^{fs}}{\partial x_{2fs}^2} = -\,\omega^{fs}, \qquad (x_{1fs}, x_{2fs}) \in \Omega^{fs}, \qquad s = 1,\dots,N\,, \tag{26}$$

$$\omega^{fs} = \frac{1}{\delta^{fs}\lambda^{fs}} A^{fs}(E^{0\Pi fs} - E^{Vfs})\,, \tag{27}$$

з крайовими умовами (4)–(7).

Для розв'язання цієї задачі використаємо непрямий метод граничних елементів. Введемо «фіктивні» джерела тепла з невідомою наперед інтенсивністю $g^{fs}(\xi)$ у розрахунку на одиницю довжини $\partial\Omega^{fs}$, використовуючи для опису розміщення джерел нові координати ξ_{fs}, які співпадають із координатами x_{fs}. Реакцію системи в деякій точці спостереження $x_{fs} = (x_{1fs}, x_{2fs})$ на розподіл внутрішніх джерел тепла ω^{fs} і граничних джерел g^{fs}, тобто значення у ній температурного поля T^{fs}, знаходимо інтегруванням фундаментальних розв'язків по Ω^{fs} [1]:

$$T^{fs}(x_{fs}) = \int_{\partial\Omega^{fs}} \tilde{E}(x_{fs}, \xi_{fs}) g^{fs}(\xi_{fs})\, d\partial\Omega^{fs}(\xi_{fs}) + \int_{\Omega^{fs}} \tilde{E}(x_{fs}, \xi_{fs})\omega^{fs}\, d\Omega^{fs} + C^{fs}\,, \tag{28}$$

де

$$\tilde{E}(x_{fs}, \xi_{fs}) = -\frac{1}{2\pi\lambda^{fs}} \ln\left|\frac{r_{fs}}{r_0}\right|, \qquad r_{fs}^2 = (x_{1fs} - \xi_{1fs})^2 + (x_{2fs} - \xi_{2fs})^2\,, \tag{29}$$

а стала r_0 використовується для покращення обчислювального процесу. Значення сталої C^{fs} у рівності (28) виберемо так, щоб сумарний тепловий потік через нескінченно віддалену межу дорівнював нулеві, що, в свою чергу, буде гарантувати єдиність розв'язку [1]. Звідси отримуємо умову

$$\int_{\partial\Omega^{fs}} g^{fs}(\xi_{fs})\, d\partial\Omega^{fs}(\xi_{fs}) + \int_{\Omega^{fs}} \omega^{fs}\, d\Omega^{fs} = 0\,. \tag{30}$$

Підставивши крайові умови в (28), отримаємо інтегральні рівняння з невідомою функцією $g^{fs}(\xi_{fs})$:

$$T^{+} = \int_{\partial\Omega^{fs}} \tilde{E}(x_{0fs}, \xi_{fs}) g^{fs}(\xi_{fs})\, d\partial\Omega^{fs}(\xi_{fs}) + \int_{\Omega^{fs}} \tilde{E}(x_{0fs}, \xi_{fs})\omega^{fs}\, d\Omega^{fs} + C^{fs}\,,$$
$$x_{1fs}^{-} < x_{10fs} < x_{1fs}^{+}, \qquad x_{20fs} = x_{2fs}^{+}, \qquad s = 1,\dots,N\,, \tag{31}$$

$$T^{-} = \int_{\partial\Omega^{fs}} \tilde{E}(x_{0fs}, \xi_{fs}) g^{fs}(\xi_{fs})\, d\partial\Omega^{fs}(\xi_{fs}) + \int_{\Omega^{fs}} \tilde{E}(x_{0fs}, \xi_{fs})\omega^{fs}\, d\Omega^{fs} + C^{fs}\,,$$
$$x_{1fs}^{-} < x_{10fs} < x_{1fs}^{+}, \qquad x_{20fs} = x_{2fs}^{-}, \qquad s = 1,\dots,N\,, \tag{32}$$

$$\int_{\partial\Omega^{fi}} \tilde{E}(x_{0fi}, \xi_{fi}) g^{fi}(\xi_{fi})\, d\partial\Omega^{fi}(\xi_{fi}) + \int_{\Omega^{fi}} \tilde{E}(x_{0fi}, \xi_{fi})\omega^{fi}\, d\partial\Omega^{fi} =$$
$$= \int_{\partial\Omega^{fj}} \tilde{E}(x_{0fj}, \xi_{fj}) g^{fj}(\xi_{fj})\, d\partial\Omega^{fj}(\xi_{fj}) + \int_{\Omega^{fj}} \tilde{E}(x_{0fj}, \xi_{fj})\omega^{fj}\, d\Omega^{fj}\,,$$
$$x_{10fi} = x_{1fi}^{+}, \quad x_{2fi}^{-} < x_{20fi} < x_{2fi}^{+}, \quad x_{10fj} = x_{1fj}^{-}, \quad x_{2fj}^{-} < x_{20fj} < x_{2fj}^{+}\,,$$
$$i = 1,\dots,N-1,\ j = i+1; \qquad \text{якщо } i = N\,, \text{ то } j = 1\,. \tag{33}$$

Умови для потоку після заміни особливого інтеграла інтегралом типу Коші по $\partial\Omega^{\mathrm{f}s}$ з додатковим членом $-g^{\mathrm{f}s}(x_{0\mathrm{f}s})/2$ запишемо у вигляді

$$-\frac{g^{\mathrm{f}i}(x_{0\mathrm{f}i})}{2}+\int\limits_{\partial\Omega^{\mathrm{f}i}} F(x_{0\mathrm{f}i},\xi_{\mathrm{f}i})g^{\mathrm{f}i}(\xi_{\mathrm{f}i})\,d\partial\Omega^{\mathrm{f}i}(\xi_{\mathrm{f}i})+$$

$$+\int\limits_{\Omega^{\mathrm{f}i}} F(x_{0\mathrm{f}i},\xi_{\mathrm{f}i})\omega^{\mathrm{f}i}\,d\Omega^{\mathrm{f}i}=\frac{g^{\mathrm{f}j}(x_{0\mathrm{f}j})}{2}-$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega^{\mathrm{f}j}} F(x_{0\mathrm{f}j},\xi_{\mathrm{f}j})g^{\mathrm{f}j}(\xi_{\mathrm{f}j})\,d\partial\Omega^{\mathrm{f}j}(\xi_{\mathrm{f}j})-\int\limits_{\Omega^{\mathrm{f}j}} F(x_{0\mathrm{f}j},\xi_{\mathrm{f}j})\omega^{\mathrm{f}j}\,d\Omega^{\mathrm{f}j}, \qquad (34)$$

де $F(x_{0\mathrm{f}i},\xi_{\mathrm{f}i})=\dfrac{1}{2\pi r_0^2}\left[(x_{0\mathrm{f}i1}-\xi_{\mathrm{f}i1})n_1(x_{0\mathrm{f}i})+(x_{0\mathrm{f}i2}-\xi_{\mathrm{f}i2})n_2(x_{0\mathrm{f}i})\right]$,

$x_{10\mathrm{f}i}=x_{1\mathrm{f}i}^{+}$, $x_{2\mathrm{f}i}^{-}<x_{20\mathrm{f}i}<x_{2\mathrm{f}i}^{+}$, $x_{10\mathrm{f}j}=x_{1\mathrm{f}j}^{-}$, $x_{2\mathrm{f}j}^{-}<x_{20\mathrm{f}j}<x_{2\mathrm{f}j}^{+}$,
$i=1,\dots,N-1$, $j=i+1$; якщо $i=N$, то $j=1$.

Розглянемо наближену методику розв'язування системи рівнянь (30)–(34). Дискретизуємо межі $\partial\Omega_1^{\mathrm{f}s}=\{x_{1\mathrm{f}s}^{-}<x_{1\mathrm{f}s}<x_{1\mathrm{f}s}^{+},\ x_{2\mathrm{f}s}=x_{2\mathrm{f}s}^{+}\}$ і $\partial\Omega_2^{\mathrm{f}s}=\{x_{1\mathrm{f}s}^{-}<x_{1\mathrm{f}s}<x_{1\mathrm{f}s}^{+},\ x_{2\mathrm{f}s}=x_{2\mathrm{f}s}^{-}\}$ відповідно $N_1^{\mathrm{f}s}$ і $N_2^{\mathrm{f}s}$, а межу $\partial\Omega_{i\cap j}^{\mathrm{f}}=\partial\Omega^{\mathrm{f}i}\cap\partial\Omega^{\mathrm{f}j}$, що відповідає ребрам призматичної оболонки, – N_{ij}^{f} граничними елементами $\Delta_q\partial\Omega^{\mathrm{f}s}$, $q=1,\dots,N^{\mathrm{f}}$, де $N^{\mathrm{f}}=\sum\limits_{s=1}^{N}(N_1^{\mathrm{f}s}+N_2^{\mathrm{f}s})+\sum\limits_{i=1}^{N-1}N_{i(i+1)}^{\mathrm{f}}+N_{N1}^{\mathrm{f}}$. Будемо вважати, що вздовж кожного елемента $\Delta_q\partial\Omega^{\mathrm{f}s}$ інтенсивність фіктивних джерел є сталою і дорівнює $g_q^{\mathrm{f}s}$. На основі цього можемо записати дискретні аналоги виразів (31)–(34):

$$T^{+}=\sum_{q=1}^{N^{\mathrm{f}}}g_q^{\mathrm{f}s}\int\limits_{\Delta_q\partial\Omega^{\mathrm{f}s}}\tilde{E}(x_{0\mathrm{f}sp},\xi_{\mathrm{f}s})\,d\partial\Omega^{\mathrm{f}s}(\xi_{\mathrm{f}s})+$$

$$+\sum_{m,\alpha=1}^{L^{\mathrm{f}s},I^{\mathrm{f}s}}\omega_{m\alpha}^{\mathrm{f}s}\int\limits_{\Omega_{m\alpha}^{\mathrm{f}s}}\tilde{E}(x_{0\mathrm{f}sp},\xi_{\mathrm{f}s})d\Omega^{\mathrm{f}s}+C^{\mathrm{f}s},\quad x_{0\mathrm{f}sp}\in\Delta_p\partial\Omega^{\mathrm{f}s},\quad p=1,\dots,N_1^{\mathrm{f}s}, \quad (35)$$

$$T^{-}=\sum_{q=1}^{N^{\mathrm{f}}}g_q^{\mathrm{f}s}\int\limits_{\Delta_q\partial\Omega^{\mathrm{f}s}}\tilde{E}(x_{0\mathrm{f}sp},\xi_{\mathrm{f}s})\,d\partial\Omega^{\mathrm{f}s}(\xi_{\mathrm{f}s})+$$

$$+\sum_{m,\alpha=1}^{L^{\mathrm{f}s},I^{\mathrm{f}s}}\omega_{m\alpha}^{\mathrm{f}s}\int\limits_{\Omega_{m\alpha}^{\mathrm{f}s}}\tilde{E}(x_{0\mathrm{f}sp},\xi_{\mathrm{f}s})d\Omega^{\mathrm{f}s}+C^{\mathrm{f}s},\quad x_{0\mathrm{f}sp}\in\Delta_p\partial\Omega^{\mathrm{f}s},\quad p=1,\dots,N_2^{\mathrm{f}s}, \quad (36)$$

$$\sum_{p=1}^{N^{\mathrm{f}}}g_p^{\mathrm{f}i}\int\limits_{\Delta_p\partial\Omega^{\mathrm{f}i}}\tilde{E}(x_{0\mathrm{f}ic},\xi_{\mathrm{f}i})\,d\partial\Omega^{\mathrm{f}i}(\xi_{\mathrm{f}i})+\sum_{m,\alpha=1}^{L^{\mathrm{f}s},I^{\mathrm{f}s}}\omega_{m\alpha}^{\mathrm{f}i}\int\limits_{\Omega^{\mathrm{f}i}}\tilde{E}(x_{0\mathrm{f}ic},\xi_{\mathrm{f}i})d\Omega^{\mathrm{f}i}=$$

$$=\sum_{p=1}^{N^{\mathrm{f}}}g_p^{\mathrm{f}j}\int\limits_{\Delta_p\partial\Omega^{\mathrm{f}j}}\tilde{E}(x_{0\mathrm{f}jc},\xi_{\mathrm{f}j})\,d\partial\Omega^{\mathrm{f}j}(\xi_{\mathrm{f}j})+\sum_{m,\alpha=1}^{L^{\mathrm{f}s},I^{\mathrm{f}s}}\omega_{m\alpha}^{\mathrm{f}j}\int\limits_{\Omega^{\mathrm{f}j}}\tilde{E}(x_{0\mathrm{f}jc},\xi_{\mathrm{f}j})d\Omega^{\mathrm{f}j},$$

$$x_{0\mathrm{f}ic},\quad x_{0\mathrm{f}jc}\in\Delta_c\Omega_{i\cap j}^{\mathrm{f}},\quad c=1,\dots,N_{ij}^{\mathrm{f}},\quad i=1,\dots,N-1,\quad j=i+1,$$
$$\text{якщо}\quad i=N,\quad\text{то } j=1; \qquad (37)$$

$$-\frac{g_c^{fi}\delta_{ij}}{2}+\sum_{p=1}^{N^f} g_p^{fi} \int\limits_{\Delta_p\partial\Omega^{fi}} F(x_{0f\,ic},\xi_{fi})\,d\partial\Omega^{fi}(\xi_{fi})+\sum_{m,\alpha=1}^{L^{fs},I^{fs}} \omega_{m\alpha}^{fi} \int\limits_{\Omega^{fi}} F(x_{0fic},\xi_{fi})\,d\Omega^{fi} =$$

$$=\frac{g_c^{fj}\delta_{ij}}{2}-\sum_{p=1}^{N^f} g_p^{fj} \int\limits_{\Delta_p\partial\Omega^{fj}} F(x_{0fjc},\xi_{fj})\,d\partial\Omega^{fj}(\xi_{fj})-\sum_{m,\alpha=1}^{L^{fs},I^{fs}} \omega_{m\alpha}^{fj} \int\limits_{\Omega^{fj}} F(x_{0fjc},\xi_{fj})d\Omega^{fj} ,$$

$$x_{0f\,ic},\quad x_{0f\,jc}\in\Delta_c\Omega^f_{i\cap j}\qquad c=1,\ldots,N^f_{ij},\qquad i=1,\ldots,N-1,\quad j=i+1,$$

$$\text{якщо}\qquad i=N,\quad \text{то}\ \ j=1. \tag{38}$$

Розв'язавши лінійну систему рівнянь (35)–(38) відносно C^{fs}, g_p^{fs}, $p=1,\ldots,N^f$, $s=1,\ldots,N$, і підставивши отримані значення у (28), одержимо вираз для температурного поля T^{fs}.

Отже, отримано алгоритм розв'язування задачі променево-кондуктивного теплообміну між циліндричною та N-кутною призматичною оболонками, який описується наступними кроками:

1°. Присвоюємо температурному полю T^{ifs} початкове значення T^{0fs} (задача теплопровідності при відсутності опромінення).

2°. Підставляємо T^{ifs} у систему рівнянь (23), (24) і розв'язуємо її відносно густин падаючих променевих енергій у вузлах $E_{wv1}^{i\Pi\zeta}$, $E_{wv5}^{i\Pi\zeta}$, $E_{wv8}^{i\Pi\zeta}$, $\zeta=\{fs, g\}$.

3°. Отримані значення $E_{wv1}^{i\Pi\zeta}$, $E_{wv5}^{i\Pi\zeta}$, $E_{wv8}^{i\Pi\zeta}$ підставляємо в систему рівнянь (30), (35)–(38) і розв'язуємо її відносно C^{fs}, g_p^{fs}, $p=1,\ldots,N^f$, $s=1,\ldots,N$.

4°. Значення C^{fs}, g_p^{fs}, визначені в п. ***3°,*** підставляємо у формулу (28) для обчислення $T^{(i+1)fs}$.

5°. Здійснюємо перевірку:

$$\sum_{i=1}^{N}\left| T^{(i+1)fs}-T^{ifs}\right|<\varepsilon, \tag{39}$$

де ε – задана точність.

6°. Якщо нерівність (39) не виконується, то робимо перепризвоєння $T^{ifs}=T^{(i+1)fs}$ і повертаємося до п. ***2°***.

Метою подальшого дослідження авторів буде визначення напружено-деформованого стану призматичної оболонки за знайденим розподілом температури.

1. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
3. *Грицько Є. Г., Вовк О. М.* Моделювання кондуктивно-променевого теплообміну між тримачем та корпусом фотоелектронного приладу // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Прикл. математика. – 2000. – № 407. – С. 134–138.
4. *Грицько Є. Г., Вовк О. М.* Моделювання променевого теплообміну між скінченними неспіввісними циліндричними оболонками // Крайові задачі для диференц. рівнянь. – К.: Ін-т математики НАН України, 1999. – Вип. 4. – С. 58–62.
5. *Грицько Є. Г., Вовк О. М., Шуміліна Н. В.* Моделювання променевого теплообміну між тримачем та корпусом фотоелектронного приладу // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Електроніка. – 1999. – № 382. – С. 17–22.
6. *Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С.* Теплопередача. – М.: Энергоиздат, 1981. – 417 с.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОНДУКТИВНО-ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА МЕЖДУ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И N -УГОЛЬНОЙ ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКАМИ

Записана математическая модель и предложена аналитико-численная методика решения задачи кондуктивно-лучистого теплообмена между цилиндрической оболочкой и поверхностью N -угольной призмы. Для аппроксимации плотности потока падающей лучевой энергии применены восьмиузловые граничные элементы.

METHODS FOR SOLUTION OF PROBLEM ON CONDUCTIVE-RADIAL HEAT EXCHANGE BETWEEN CYLINDRICAL AND N -ANGULAR PRISMATIC SHELLS

A mathematical model is written and numerical-analytical technique for solution of the problem on conductive-radial heat exchange between a cylindrical shell and the surface of N -angular prism is proposed. The eight-nodal boundary elements are utilized for approximation of the flux density of incident radiant energy.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
29.12.03