

ВПЛИВ ПРУЖНОЇ ПІДДАТЛИВОСТІ ЛАНОК МАНІПУЛЯТОРА НА ТОЧНІСТЬ ЙОГО ПОЗИЦІЮВАННЯ.

II. МЕТОДИКА ТА РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

У другій частині роботи обговорюється ефективність застосування розглянутих моделей динаміки маніпулятора для аналізу показників точності позиціонування його робочих органів. Викладено методика побудови розв'язків еволюційних задач для отриманих у цих моделях систем рівнянь. Розглянуто приклад.

Широке коло технічних задач вивчення рухів різноманітних машин і механізмів зводиться до математичних моделей динаміки змішаних систем зв'язаних твердих і пружних тіл, які включають гібридні системи диференціальних рівнянь, що складаються з взаємозв'язаних звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь з частинними похідними. Труднощі побудови розв'язків гібридних систем рівнянь значною мірою зумовлені особливостями їх структури та потребують розробки спеціальних математичних методів інтегрування таких систем. Деякі підходи до складання гібридних систем рівнянь у задачах динаміки вільного пружного тіла та гнучкої системи багатого тіл наведено в [3, 11]. Запропонована в [3] методика дослідження рухів змішаних механічних систем базується на сумісному використанні методів теорії збурень і методу Фур'є – Крилова розвинення розв'язків за власними формами пружних коливань для зведення їх дискретно-континуальних математичних моделей до систем зі скінченною кількістю степенів вільності. Її використання суттєво обмежене прийнятими при цьому спрощувальними припущеннями і тому ілюструється найпростішим випадком руху пружного тіла. Стосовно задач робототехніки, то гібридні системи диференціальних рівнянь виникають при побудові моделей динаміки маніпуляційних механізмів у разі врахування розподілених властивостей пружності та інерції їх виконавчих ланок [4–6, 9]. Складність розв'язання задачі підвищується зі збільшенням кількості пружних ланок маніпулятора і для багатоланкових маніпуляційних систем використання викладеного в [3] підходу з огляду на громіздкість розрахунків стає практично неможливим.

У цій частині роботи обговорюється методика розв'язування сформульованих у част. I [8] задач динамічного та кінематичного керування просторовими рухами багатоланкового жорсткого маніпулятора, що описуються системою звичайних диференціальних рівнянь. Запропоновано методика побудови розв'язків сформульованих задач керування просторовими рухами багатоланкового пружного маніпулятора, що базується на сумісному застосуванні методу початкових параметрів, неявної схеми Губолта зображення частинних похідних за часовою координатою їх скінченно-різницеви-ми аналогами та високоточних методів чисельного інтегрування жорстких систем звичайних диференціальних рівнянь [1, 2, 4–7, 9].

1. Методика розв'язування задач динаміки маніпулятора з жорсткими ланками. Як приклад реалізації викладеного у п. 1 [8] підходу розглянемо рівняння динаміки жорсткого дволанкового маніпулятора, що транспортує вантаж кулеподібної форми радіуса r . Осі з'єднувальних шарнірів O_1, O_2 маніпулятора співпадають відповідно з осями O_1y_1, O_2z_2 місцевих систем координат:

$$\ddot{\psi}_1 [b_1 l_1^2 + (b_2 l_2^2 + b_5) \cos^2 \theta_2 + b_4 \sin^2 \theta_2 + 2b_3 l_1 l_2 \cos \theta_2] + \dot{\psi}_1 \dot{\theta}_2 [(b_4 - b_5 - b_2 l_2^2) \sin 2\theta_2 - 2b_3 l_1 l_2 \sin \theta_2] = -g \sin \psi_1 (b_7 l_1 + b_3 l_2 \cos \theta_2) + M_1^e,$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta}_2(b_2 l_2^2 + b_6) - \frac{1}{2} \dot{\psi}_1^2 [(b_4 - b_5 - b_2 l_2^2) \sin 2\theta_2 + 2b_3 l_1 l_2 \sin \theta_2] = \\ & = -g b_3 l_2 \cos \psi_1 \sin \theta_2 + M_2^e, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{де } b_1 = \frac{1}{l_1^2} J_{y_1^0} + \frac{1}{4} m_1 + m_2 + m_3, \quad b_2 = \frac{1}{4} m_2 + \left(1 + \frac{r}{l_2}\right)^2 m_3, \quad b_3 = \frac{1}{2} m_2 + \left(1 + \frac{r}{l_2}\right) m_3,$$

$$b_4 = J_{x_2^0} + J_{x_3^0}, \quad b_5 = J_{y_2^0} + J_{y_3^0}, \quad b_6 = J_{z_2^0} + J_{z_3^0}, \quad b_7 = \frac{1}{2} m_1 + m_2 + m_3;$$

крапками зверху позначено диференціювання за часом.

Побудову розв'язків задачі динамічного керування маніпулятором із жорсткими ланками можна здійснити шляхом інтегрування рівнянь вигляду (18) (або в загальному випадку вигляду (1) з [8]) з відповідними початковими умовами одним із методів чисельного інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь, які забезпечують потрібну точність обчислень. У цій роботі застосовано явний метод Рунге – Кутта 4-го порядку [10]. Визначення розв'язків задачі кінематичного керування маніпулятором фактично зводиться до необхідності знаходження невідомих зовнішніх моментів із системи алгебричних рівнянь (18) (або (1) з [8]).

2. Методика розв'язування задач динаміки маніпулятора з пружними ланками. Побудова розв'язків сформульованих задач керування просторовими рухами пружного маніпулятора пов'язана зі значними труднощами обчислювального характеру, які викликані наявністю взаємозв'язку суттєво нелінійних гібридних рівнянь, що входять у систему (15) з [8], і нерозв'язністю останніх відносно старших похідних за часом. З метою їх подолання пропонується наступний підхід до чисельного розв'язування розглянутих в п. 2 з [8] еволюційних задач для диференціальних рівнянь зі звичайними та частинними похідними за часовою координатою і з частинними похідними за просторовою координатою. Підхід включає три етапи:

- інтегрування за часом виділеної з (15) системи звичайних диференціальних рівнянь;
- часову дискретизацію залишеної в (15) системи диференціальних рівнянь з частинними похідними;
- побудову розв'язків багатоточкової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь, що виникає у кожному вузлі часової дискретизації, за неперервною просторовою координатою.

На першому етапі систему звичайних диференціальних рівнянь за часом, яка мститься у (15), зведемо до форми Коші й запишемо у вигляді

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t), \quad (19)$$

де $\mathbf{y} = (\boldsymbol{\omega}_1(0), \boldsymbol{\omega}_2(0), \dots, \boldsymbol{\omega}_N(0))^\top$ – вектор-функція шуканих змінних $\boldsymbol{\omega}_n(0) = (\omega_{x,n}(0), \omega_{y,n}(0), \omega_{z,n}(0))$ розмірності $3N$, $n = \overline{1, N}$; $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$ – у загальному випадку нелінійна вектор-функція (розмірності $3N$) від залежної \mathbf{y} і незалежної t змінних, а також від невідомої на цьому етапі вектора-функції $\dot{\mathbf{y}} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1(0), \boldsymbol{\varepsilon}_2(0), \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N(0))^\top$ змінних $\boldsymbol{\varepsilon}_n(0) = (\varepsilon_{x,n}(0), \varepsilon_{y,n}(0), \varepsilon_{z,n}(0))$ розмірності $3N$. Такий вигляд векторів \mathbf{y} , $\dot{\mathbf{y}}$, $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$ має місце тільки для випадку задання або визначення кутових прискорень відносних поворотів ланок. При розгляді постановок задач керування, сформульованих у термінах кутів відносних поворотів ланок, вказані вектори повинні бути доповнені компонентами, що відповідають змінним $\theta_1, \varphi_2, \dots, \psi_N$, $\dot{\theta}_1, \dot{\varphi}_2, \dots, \dot{\psi}_N$, $\ddot{\theta}_1, \ddot{\varphi}_2, \dots, \ddot{\psi}_N$.

Припущену на другому етапі дискретизацію за часом групи диференціальних рівнянь з частинними похідними у системі (15) виконаємо за допомогою заміни диференціальних співвідношень вигляду $\frac{\partial v_n}{\partial t}$, $\frac{\partial w_n}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2}$ їх скінченно-різницевиими аналогами відповідно до неявної схеми Губолта [1], за якою похідні $\frac{\partial X}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$ деякої функції X у деякий поточний момент часу $t = t_{i+1}$ апроксимуємо виразами

$$\left. \frac{\partial X}{\partial t} \right|_{t_{i+1}} = \left. \frac{\partial X}{\partial t} \right|_{t_{i+1}} = \frac{11}{6\Delta t} X|_{t_{i+1}} + X^f, \quad \left. \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \right|_{t_{i+1}} = \left. \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \right|_{t_{i+1}} = \frac{2}{\Delta t^2} X|_{t_{i+1}} + X^s, \quad (20)$$

і перетворення нелінійних членів типу добутку $X \cdot Y$ двох функцій на основі різницевого зображення

$$XY|_{t_{i+1}} = XY|_{t_{i+1}} = X|_t \cdot Y|_{t_{i+1}}, \quad (21)$$

де Δt – крок дискретизації за часом, $t_{i+1} = t_i + \Delta t$,

$$X^f = \frac{-18X|_t + 9X|_{t-1} - 2X|_{t-2}}{6\Delta t}, \quad X^s = \frac{-5X|_t + 4X|_{t-1} - X|_{t-2}}{(\Delta t)^2}.$$

З урахуванням (20), (21) у момент часу t_{i+1} замінимо вказану групу рівнянь з частинними похідними для n -ї пружної ланки системою звичайних диференціальних рівнянь з неперервною просторовою координатою:

$$\begin{aligned} EF \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{t_{i+1}} &= \rho F a_x(0)|_{t_{i+1}} - \rho F [(\omega_y^2(0) + \omega_z^2(0))x + g \cos(X, x)]|_{t_{i+1}}, \\ EJ_z \left. \frac{d^4 v}{dx^4} \right|_{t_{i+1}} - EF \left[\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_t \left. \frac{dv}{dx} \right|_{t_{i+1}} + \left. \frac{du}{dx} \right|_t \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{t_{i+1}} \right] + \rho F \left. \frac{2}{\Delta t^2} v \right|_{t_{i+1}} &= \\ &= -\rho F a_y(0)|_{t_{i+1}} - \rho F x \varepsilon_z(0)|_{t_{i+1}} + \rho F [-\omega_x(0)\omega_y(0)x - v^s + g \cos(X, y)]|_{t_{i+1}}, \\ EJ_y \left. \frac{d^4 w}{dx^4} \right|_{t_{i+1}} - EF \left[\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_t \left. \frac{dw}{dx} \right|_{t_{i+1}} + \left. \frac{du}{dx} \right|_t \left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{t_{i+1}} \right] + \rho F \left. \frac{2}{\Delta t^2} w \right|_{t_{i+1}} &= \\ &= -\rho F a_z(0)|_{t_{i+1}} + \rho F x \varepsilon_y(0)|_{t_{i+1}} + \rho F [-\omega_x(0)\omega_z(0)x - w^s + g \cos(X, z)]|_{t_{i+1}}, \\ GJ_x \left. \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \right|_{t_{i+1}} &= \rho J_x \varepsilon_x(0)|_{t_{i+1}}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{де } v^s = \frac{-5v|_t + 4v|_{t-1} - v|_{t-2}}{(\Delta t)^2}, \quad w^s = \frac{-5w|_t + 4w|_{t-1} - w|_{t-2}}{(\Delta t)^2}.$$

Після виконання аналогічних перетворень у розглядуваний момент часу для відповідних граничних рівнянь (17), які містять частинні похідні за часовою координатою, переходимо до реалізації третього етапу побудови розв'язків задачі (15)–(17) (див. [8]). Отриману вище лінійну багатоточкову напівдискретну крайову задачу будемо розв'язувати за допомогою модифікованого методу початкових параметрів, запропонованого раніше в [4–6, 9]. Для цього, виконуючи заміну змінних $x_1 = x$, $x_2 = l_2 x / l_1$, ..., $x_N = l_N x / l_1$ і опускаючи індекс t_{i+1} у шуканих змінних, подамо систему звичайних диференціальних рівнянь (22) у формі Коші:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} = A(x)\mathbf{z} + \mathbf{b}(x), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (23)$$

де $\mathbf{z}(x)$ – вектор-функція шуканих змінних розмірності $p = 19N$, яка для випадків динамічного та кінематичного керувань відповідно має вигляд

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N, \boldsymbol{\alpha}_1(0), \boldsymbol{\alpha}_2(0), \dots, \boldsymbol{\alpha}_N(0), \boldsymbol{\varepsilon}_1(0), \boldsymbol{\varepsilon}_2(0), \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N(0), \ddot{\theta}_1, \ddot{\phi}_2, \dots, \ddot{\psi}_N)^\top,$$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N, \boldsymbol{\alpha}_1(0), \boldsymbol{\alpha}_2(0), \dots, \boldsymbol{\alpha}_N(0), \boldsymbol{\varepsilon}_1(0), \boldsymbol{\varepsilon}_2(0), \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N(0), M_1^e, M_2^e, \dots, M_N^e)^\top$$

з компонентами

$$\mathbf{z}_n = \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial x}, v_n, \frac{\partial v_n}{\partial x}, \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 v_n}{\partial x^3}, w_n, \frac{\partial w_n}{\partial x}, \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 w_n}{\partial x^3}, \gamma_n, \frac{\partial \gamma_n}{\partial x} \right),$$

$$\boldsymbol{\alpha}_n(0) = (a_{x,n}(0), a_{y,n}(0), a_{z,n}(0)), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_n(0) = (\varepsilon_{x,n}(0), \varepsilon_{y,n}(0), \varepsilon_{z,n}(0)), \quad n = \overline{1, N};$$

$A(x)$ – матриця-функція розміру $p \times p$; $\mathbf{b}(x)$ – вектор-функція правих частин розмірності p , яка обчислюється на основі визначених у попередні моменти часу t_{i-2}, t_{i-1}, t_i значень вектора \mathbf{z} . Оскільки тип керування не впливає на форму рівнянь (23) і функції $\ddot{\theta}_1, \ddot{\phi}_2, \dots, \ddot{\psi}_N$ або $M_1^e, M_2^e, \dots, M_N^e$ не залежать від просторової координати x , структура матриці $A(x)$ і вектора $\mathbf{b}(x)$ не змінюється для сформульованих задач керування.

Граничні рівняння (16), (17) (див. [8]) на кінцях стержнів $x = 0, x = l_1$ запишемо у матричному вигляді

$$F\mathbf{z}(0, t) = 0, \quad S\mathbf{z}(0, t) + G\mathbf{z}(l_1, t) = 0. \quad (24)$$

Матриці F, S, G мають розміри відповідно $6N \times p, 13N \times p, 13N \times p$ і визначаються способом закріплення кінців стержнів.

Зведемо отриману у вузлі t_{i+1} дискретизації за часом двоточкову крайову задачу (23), (24) до задачі Коші інтегрування рівнянь (23) з вектором початкових умов $\mathbf{z}(0) = (z_1(0), z_2(0), \dots, z_p(0))^\top$, $6N$ компонент якого згідно з першим граничним рівнянням з групи (24) є відомими. Для визначення компонент вектора $\mathbf{z}(0)$, які є невідомими, запишемо відповідний йому вектор розв'язків $\mathbf{z}(x)$ рівняння (23) у вигляді

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{z}^*(x) + \mathbf{z}^{**}(x), \quad (25)$$

$$\text{де } \mathbf{z}^*(x) = (z_1(x)\delta_1^h, z_2(x)\delta_2^h, \dots, z_p(x)\delta_p^h)^\top, \quad h \in H,$$

$$\mathbf{z}^{**}(x) = (z_1(x)\delta_1^h, z_2(x)\delta_2^h, \dots, z_p(x)\delta_p^h)^\top, \quad h \notin H;$$

$\delta_v^h, v = \overline{1, p}$, – символ Кронекера; H – $13N$ -вимірний множина індексів початкових умов, яких не вистачає.

Вектор $\mathbf{z}^*(x)$ подамо у формі

$$\mathbf{z}^*(x) = Z^0(x)\mathbf{C} + \mathbf{z}^b(x), \quad (26)$$

$Z^0(x) = \|\mathbf{z}_h(x)\|, h \in H$, – зрізана фундаментальна матриця розв'язків розміру $p \times 13N$ відповідної до (23) однорідної системи

$$\frac{d\mathbf{z}^0}{dx} = A(x)\mathbf{z}^0 \quad (27)$$

з матрицею початкових умов $Z^0(0) = \|\mathbf{z}_h(0)\|, h \in H$, векторів станів $\mathbf{z}_h(0) = (\delta_1^h, \delta_2^h, \dots, \delta_p^h)^\top$ розмірності p ; $\mathbf{z}^b(x)$ – вектор часткового розв'язку розмірності p неоднорідної системи (23) з нульовими початковими

умовами; $\mathbf{C} = (\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2, \dots, \mathbf{C}^N)^\top$ – вектор сталих інтегрування розмірності $13N$, компоненти складової \mathbf{C}^n , $n = \overline{1, N}$, якого для прийнятого в п. 2 [8] способу з’єднання прилеглих стержнів мають вигляд:

$$\begin{aligned} C_1^n &= \frac{du_n(0)}{dx}, & C_2^n &= a_{x,n}(0), & C_3^n &= \frac{d^2v_n(0)}{dx^2}, \\ C_4^n &= \frac{d^3v_n(0)}{dx^3}, & C_5^n &= a_{y,n}(0), & C_6^n &= \varepsilon_{z,n}(0), \\ C_7^n &= \frac{d^2w_n(0)}{dx^2}, & C_8^n &= \frac{d^3w_n(0)}{dx^3}, & C_9^n &= a_{z,n}(0), \\ C_{10}^n &= \varepsilon_{y,n}(0), & C_{11}^n &= \frac{d\gamma_n(0)}{dx}, & C_{12}^n &= \varepsilon_{x,n}(0), & C_{13}^n &= \ddot{\theta}_n. \end{aligned}$$

Після виконання побудови матриці $Z^0(x)$ і вектора $\mathbf{z}^b(x)$ шляхом чисельного інтегрування рівнянь (27) і (23) з відповідними початковими умовами вектор $\mathbf{z}^*(0)$ початкових умов, яких не вистачає, обчислюємо на основі зображення (26) з умов виконання другого з граничних рівнянь (24). Тоді, якщо вважати відомим стан маніпулятора в моменти часу t_i , t_{i-1} , t_{i-2} , вектор $\mathbf{z}(x)$ можна визначити в момент часу t_{i+1} інтегруванням рівнянь (23) з остаточно сформованим відповідно до (25) вектором початкових умов $\mathbf{z}(0)$.

Оскільки $A(x) = A(x, \Delta t)$ і $\mathbf{b}(x) = \mathbf{b}(x, \Delta t)$, то еквівалентна (22) система звичайних диференціальних рівнянь (23) відноситься до жорсткого типу [2, 7] і, отже, її розв’язки містять одночасно компоненти, що повільно змінюються і швидко затухають. Наявність останніх істотно утруднює побудову розв’язків на великих інтервалах. Як показали дослідження [4–6, 9], вимога отримання збіжних розв’язків сформульованих задач керування для рівнянь (22) призводить до необхідності вибирати крок Δt дискретизації за часом досить малим. Проте зі зменшенням Δt жорсткість системи (23) зростає і, отже, підвищуються вимоги до стійкості використовуваних методів чисельного інтегрування і з огляду на це застосування явних методів Рунге – Кутта (див. п. 1) стає практично неможливим. З метою подолання вказаних труднощів залучали розвинути раніше в [4–6, 9] чисельну процедуру, що базується на сумісному застосуванні методів Рунге – Кутта 4-го порядку та дискретної ортогоналізації Годунова [2].

Таким чином, на основі розробленого обчислювального алгоритму для визначення стану маніпулятора в розглядуваний момент часу t_{i+1} необхідно спочатку, застосовуючи багатокроковий метод предиктор-коректор (наприклад, Адамса – Башфорта) [1, 10], проінтегрувати рівняння (19) і знайти тим самим у цей момент часу значення вектора-функції часу \mathbf{y} , використавши обчислені для чотирьох попередніх моментів часу значення векторів-функцій часу \mathbf{y} , $\dot{\mathbf{y}}$. Потім на основі відповідних компонент вектора \mathbf{y} належить обчислити матриці $B_{n-1,n}$, $\dot{B}_{n-1,n}$, різні випадки підрахунку яких залежно від орієнтації осьової лінії циліндричного шарніра розглянуто в [4]. Після цього за описаною вище схемою виконується побудова розв’язку крайової задачі (23), (24) з подальшим уточненням вектора-функції \mathbf{y} на основі методу предиктор-коректор і відбувається перехід до наступного вузла t_{i+2} дискретизації за часом.

3. Обговорення результатів. Наведемо результати дослідження задачі динамічного керування просторовими рухами дволанкового робота-маніпулятора шарнірно-стержневої структури, розглянутого у двох викладених вище постановках. Перша з них відповідає випадку абсолютно жорстких

ланок і, як показано в п. 1 [8], зводиться із залученням формалізму Лагранжа до системи звичайних диференціальних рівнянь (18). Друга постановка формулюється в термінах пружнопіддатливих ланок, що мають еквівалентні фізичні та геометричні характеристики, і зводиться на основі запропонованого в п. 2 [8] підходу до гібридної моделі (15)–(17). Підхід, що базується на порівняльному аналізі одержаних у двох постановках динамічних характеристик маніпулятора, може бути ефективним засобом оцінки точності позиціонування його робочих органів за рахунок можливості визначення похибки позиціонування, яка є однією з основних характеристик промислового робота і залежить від пружної піддатливості конструкції маніпулятора. Вважаючи, що при виконанні технологічних операцій робочі органи маніпулятора (зокрема, схоп) у кожен момент часу повинні займати цілком визначене положення в просторі (програмне положення), яке задається програмними значеннями узагальнених координат $q_1 = q_1(t)$, $q_2 = q_2(t)$, обчисленими в жорсткій постановці для випадку динамічного керування, будемо визначати зумовлені пружною піддатливістю похибки позиціонування центра мас O_3^0 тіла, яке переносить маніпулятор, стосовно до його програмного положення на основі наступних формул:

$$\Delta x_3 = u_2(l_2), \quad \Delta y_3 = v_2(l_2) + (l_2 + r) \frac{\partial v_2(l_2)}{\partial x_2}, \quad \Delta z_3 = w_2(l_2) + (l_2 + r) \frac{\partial w_2(l_2)}{\partial x_2}.$$

Обчислення виконано для наведених нижче параметрів конструкції маніпулятора. Ланки моделювали сталевими стержнями кільцевого поперечного перерізу з внутрішніми $d_1 = d_2 = 0.06$ м і зовнішніми $D_1 = D_2 = 0.07$ м діаметрами і довжинами $l_1 = 1$ м, $l_2 = 0.8$ м відповідно. Щільність матеріалу стержнів $\rho_1 = \rho_2 = 7.85 \cdot 10^3$ кг/м³, модулі пружності $E_1 = E_2 = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $G_1 = G_2 = 7.9 \cdot 10^{10}$ Па. Вантаж, який переноситься маніпулятором, є кулеподібним однорідним абсолютно твердим тілом радіуса $r = 0.05$ м і маси $M = 0.5$ кг. Прийнято, що осі першого та другого з'єднувальних шарнірів співпадають відповідно з осями O_1y_1 і O_2z_2 місцевих систем координат.

У вихідному положенні маніпулятор перебуває у стані спокою; його кінематичний ланцюг витягнутий в одну пряму лінію, вздовж якої спрямовано координатні осі O_1X , O_1x_1 і O_2x_2 .

Динамічне керування просторовими рухами маніпулятора здійснювали шляхом зміни зовнішніх моментів $M_1^e(t)$, $M_2^e(t)$ у з'єднувальних шарнірах на відрізку часу $0 \leq t \leq 6$ с вивчення руху маніпуляційної системи. Заданий закон програмного керування маніпулятором наведено на рис. 1 і має гармонічний характер.

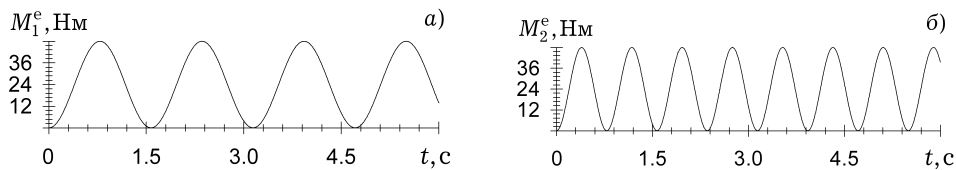


Рис. 1

Обчислені в процесі розв'язування задач динамічного керування кути поворотів $\psi_1(t)$, $\theta_2(t)$, зв'язаних з ланками місцевих систем координат $O_1x_1y_1z_1$, $O_2x_2y_2z_2$ відносно інерційної O_1XYZ і місцевої $O_1x_1y_1z_1$ систем координат у жорсткому випадку (пунктирні лінії) і відносно інерційної O_1XYZ і додаткової $O_2x_1^*y_1^*z_1^*$ систем координат у пружному випадку (суцільні лінії) навколо осей O_1y_1 , O_2z_2 , відповідно зображено на рис. 2. Ви-

значені для жорсткої і пружної постановок значення вказаних кутів співпадають з точністю до третьої значущої цифри тільки на відрізку часу $0 \leq t \leq 3.15$ с. У наступні моменти часу відмінності значень цих кутів для розглянутих постановок стають візуально легко помітними.

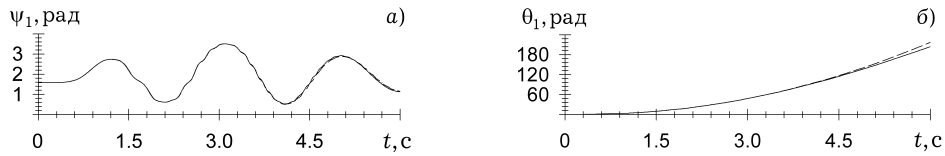


Рис. 2

Вказані особливості поведінки розглядуваної механічної системи значною мірою зумовлені розвитком процесу пружного деформування ланок, який на першому періоді керуючої дії має квазістатичний характер і в наступні моменти часу виявляє властивості високочастотних коливань амплітуди, яка зростає. Виникнення вказаних коливальних процесів, пов'язаних із наявністю пружної піддатливості ланок маніпулятора, можна спостерігати при $1.5 < t < 6$ с на рис. 3, де зображено функції переміщень $v_1(l_1, t)$, $v_2(l_2, t)$ і $w_1(l_1, t)$, $w_2(l_2, t)$ і кутів закручування $\gamma_1(l_1, t)$, $\gamma_2(l_2, t)$ кінців стержнів. Легко бачити, що при $0 \leq t \leq 1.5$ с ці функції є гладкими і процес деформування ланок відбувається квазістатично. Найбільших амплітудних значень вказані функції досягають на відрізку часу $1.5 \leq t \leq 6$ с. Вони складають відповідно для першої ланки $|v_1(l_1, t)|_{\max} = 1.607 \cdot 10^{-2}$ м, $|w_1(l_1, t)|_{\max} = 4.5772 \cdot 10^{-4}$ м, $|\gamma_1(l_1, t)|_{\max} = 5.4789 \cdot 10^{-3}$ рад. і для другої ланки $|v_2(l_2, t)|_{\max} = 1.9541 \cdot 10^{-4}$ м, $|w_2(l_2, t)|_{\max} = 9.9512 \cdot 10^{-4}$ м, $|\gamma_2(l_2, t)|_{\max} = 1.1211 \cdot 10^{-5}$ рад.

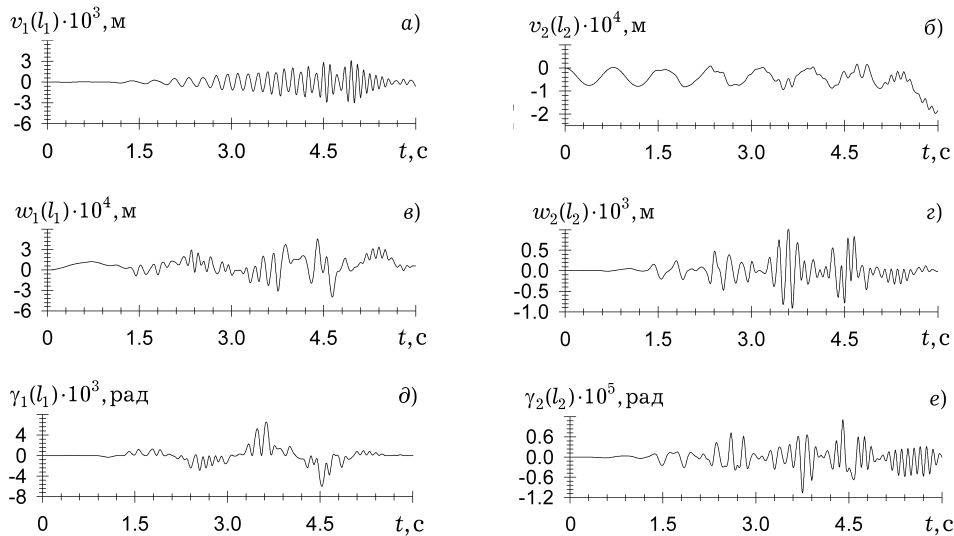


Рис. 3

Похибки позиціонування $\Delta x_3(t)$, $\Delta y_3(t)$, $\Delta z_3(t)$ центра мас вантажу, який транспортується маніпулятором, як функції часу зображено на рис. 4. Максимальні абсолютні значення вказаних функцій сягають $|\Delta x_3(t)|_{\max} = 3.3484 \cdot 10^{-5}$ м, $|\Delta y_3(t)|_{\max} = 4.485 \cdot 10^{-4}$ м, $|\Delta z_3(t)|_{\max} = 2.5084 \cdot 10^{-3}$ м. Очевидно, що максимальна похибка позиціонування за координатою x значно нижча за допустиму похибку ($\approx 10^{-3} \div 10^{-4}$ м), яку приймають найчастіше

при розрахунках реальних маніпуляторів, на відміну від похибок позиціонування за координатами y і z , значення яких стають близькими до граничних.

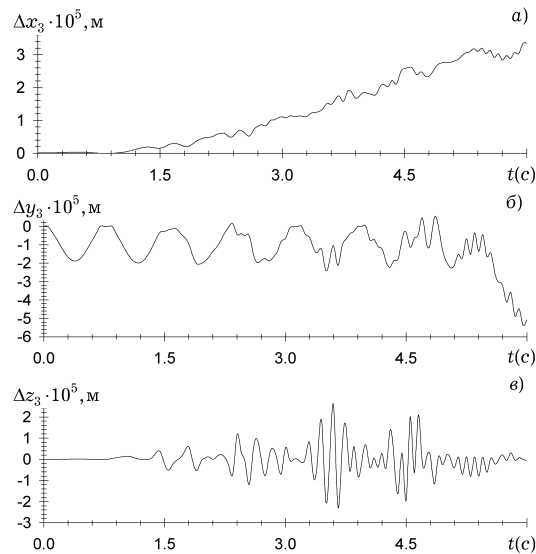


Рис. 4

Таким чином, урахування розподілених властивостей пружності та інерції ланок дозволяє не тільки точніше описати динаміку реальних промислових робототехнічних систем, але й дати кількісні оцінки динамічних характеристик їх керуючих органів. Чисельне моделювання динаміки таких систем, що базується на порівняльному аналізі їх скінченновимірних (жорстких) і пружноконтинуальних моделей, надає можливість розробити рекомендації щодо підвищення точності позиціонування маніпуляторів, конструкція яких має пружну піддатливість.

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
2. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
3. Гробов В. А. Теория колебаний механических систем. – Киев: Вища шк., 1982. – 183 с.
4. Гуляев В. И., Завражина Т. В. Динамика двузвенного плоского упругого манипулятора с распределенными параметрами // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1998. – № 4. – С. 84–91.
5. Гуляев В. И., Завражина Т. В. Динамика управляемых движений упругого робота-манипулятора // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 5. – С. 19–28.
6. Гуляев В. И., Завражина Т. В. Динамическое управление плоскими движениями упругого двузвенного космического робота-манипулятора // Проблемы управления и информатики. – 1998. – № 1. – С. 140–150.
7. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 334 с.
8. Завражина Т. В. Вплив пружної піддатливості ланок маніпулятора на точність його позиціонування. I. Математичні моделі динаміки // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – 45, № 3. – С. 124–133.
9. Завражина Т. В. Компьютерное моделирование динамики гибких многозвенных космических роботов-манипуляторов // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 1. – С. 156–162.
10. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
11. Meirovitch L., Stemple T. Hybrid equations of motion for flexible multibody systems using quasicordinates // J. Guid., Contr. and Dyn. – 1995. – 18, No. 4. – P. 678–688.

**ВЛИЯНИЕ УПРУГОЙ ПОДАТЛИВОСТИ ЗВЕНЬЕВ МАНИПУЛЯТОРА
НА ТОЧНОСТЬ ЕГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ.
II. МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Во второй части обсуждается эффективность применения рассмотренных моделей динамики манипулятора для анализа показателей точности позиционирования его рабочего органа. Изложена методика построения решений эволюционных задач для полученных в этих моделях систем уравнений. Рассмотрен пример.

**INFLUENCE OF ELASTIC PLIABILITY OF MANIPULATOR LINKS
ON PRECISION OF ITS POSITIONING.
II. TECHNIQUE AND RESULTS OF NUMERICAL SIMULATION**

In the second part the efficiency of considered models, used for the analysis of the manipulator positioning accuracy, is discussed. The technique to construct the solutions to the evolutionary problems for the systems of equations obtained in these models is presented. An example is considered.

Київ. нац. ун-т будівництва і архітектури

Одержано
30.08.01